Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

Aufgaben (mit Ergebnissen) der Klausur vom 9. August 2019

- für Studierende des Maschinenwesens zum Modul Ingenieurmathematik
- für Studierende des Verkehrsingenieuerwesens zum Modul Differentialgleichungen und Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variablen
- Prüfungsdauer 120 Minuten
- Inhalt ohne Gewähr

1. Gegeben sei die Ebene $\mathcal{E} := \{(x,y,z)^\top \mid x+y-z=2\}$. Ein Lichtstrahl verläuft vom Punkt $A(1,2,4)$ in Richtung $\mathbf{d} = (0,0,-1)^\top$ und trifft im Punkt S auf die Ebene $\mathcal{E}$.

a) Stellen Sie die durch A und S verlaufende Gerade $\mathcal{G}$ in Parameterform dar und ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes S. $\boxed{2}$

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Lofußpunktes L, der entsteht, wenn A senkrecht auf die Ebene $\mathcal{E}$ projiziert wird. $\boxed{2}$

Ergebnis: $\mathcal{G} = \{(1,2,4-t)^\top \mid t \in \mathbb{R}\}$, $S = (1,2,1)^\top$, $L = (2,3,3)^\top$

2. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $y' = \mathrm{e}^x\,(y-1)^2$. $\boxed{3}$
Ergebnis: Lösungen sind $y(x) = 1$ und $y(x) = 1 - 1/(\mathrm{e}^x + C)$

3. Gegeben sei das charakteristische Polynom $p(\lambda) := (\lambda-2)(\lambda^2+1)$ der Differentialgleichung

$$y''' + ay'' + by' + cy = r(x).$$

a) Ermitteln Sie die konstanten reellen Koeffizienten a, b und c. $\boxed{2}$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, falls $r \equiv 0$. $\boxed{2}$

c) Geben Sie jeweils einen sinnvollen Ansatz zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung für die folgenden zwei Fälle an: $\boxed{2}$
c1) $r(x) := \mathrm{e}^x x^2$ und c2) $r(x) := \cos(x)$.
Bemerkung: Eine partikuläre Lösung soll nicht ermittelt werden!

Ergebnis: $a=-2$, $b=1$, $c=-2$, $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_3\cos(x) + C_3\sin(x)$,
c1): $y_p(x) = \mathrm{e}^x(ax^2+bx+c)$, c2): $x(a\cos(x) + b\sin(x))$

4. Ermitteln Sie ein Fundamentalsystem des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\boxed{3}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ergebnis: $\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := -2x^3 + 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 - 1$.

a) Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$ und $\nabla^2 f(x, y)$. **2**

b) Bestimmen Sie zur Funktion f ein Taylor-Polynom $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit möglichst niedrigem Grad, sodass an der Entwicklungsstelle $(\hat{x}, \hat{y}) := (1, -1)$ die Gleichungen **2**

$$p(\hat{x}, \hat{y}) = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{und} \quad \nabla p(\hat{x}, \hat{y}) = \nabla f(\hat{x}, \hat{y})$$

erfüllt sind.

c) Für $\bar{x} := 1$ und genau einen geeigneten Wert $\bar{y}$ wird durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(\bar{x}, \bar{y})$ eindeutig eine Funktion $x \mapsto g(x)$ definiert, sodass $f(x, g(x)) = 0$ für x nahe 1 gilt. **3**
Ermitteln Sie $\bar{y}$ sowie $g'(1)$.

d) Zur Bestimmung einer Näherungslösung der Gleichung $\nabla f(x, y) = 0$ kann das Newton-Verfahren benutzt werden. Bestimmen Sie alle $y_0 \in \mathbb{R}$, sodass dieses Verfahren für Startvektoren der Form $(0, y_0)^\top$ nicht durchführbar ist. **1**

Ergebnis: $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x^2 + 6x \\ 6y^2 + 6y \end{pmatrix}$, $\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -12x + 6 & 0 \\ 0 & 12y + 6 \end{pmatrix}$,
$p(x, y) = 1$, $\bar{y} = \frac{3}{2}$, $g'(1) = 0$, $y_0 = -\frac{1}{2}$

6. Gegeben sei dieselbe Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 5., d.h.

$$f(x, y) = -2x^3 + 3x^2 + 2y^3 + 3y^2 - 1.$$

a) Berechnen Sie die vier stationären Punkte der Funktion f und stellen Sie zu jedem der Punkte fest, ob er eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder ein Sattelpunkt ist. **4**

b) Es werde die folgende restringierte Opimierungsaufgabe betrachtet:

$$f(x, y) \to \min \qquad \text{bei} \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad x + y = 0.$$

b1) Stellen Sie die zugehörigen Karush-Kuhn-Tucker (KKT)-Bedingungen auf. **2**

b2) Ermitteln Sie alle Punkte (x, y), die mit geeigneten Lagrange-Multiplikatoren (u, v) den KKT-Bedingungen aus b1) genügen. **3**

b3) Ermitteln Sie die beiden Punkte (x, y), die eine lokale Minimalstelle der restringierten Optimierungsaufgabe sind. **3**

Ergebnis: $(0, 0)$ lok. Minimalstelle, $(1, 0)$ und $(0, -1)$ Sattelpunkte, $(1, -1)$ lok. Maximalstelle,
$-6x^2 + 6x + u + 2vx = 0$, $6y^2 + 6y + u + 2vy = 0$, $x + y = 0$, $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$, $v \geq 0$, $v(x^2 + y^2 - 4) = 0$,
$(x, y, u, v) \in \{(0, 0, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 3(\sqrt{2} - 1)\}$,
lok. Minimalstellen sind $(0, 0)$ und $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$