Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

9. August 2010

Prüfungsklausur

Mathematik II für Studierende der Fakultät Maschinenwesen

Mathematik III für Studierende des Studiengangs Mechatronik

1. a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht.

a1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ a2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{10n^2+n}$ $\boxed{2}$

b) Gegeben sei die Potenzreihe

$$P(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}(x-1)^n.$$

Ermitteln Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $P(x)$ für jedes x aus dem offenen Intervall (a, b) konvergiert und $b-a$ möglichst groß ist. $\boxed{2}$

Lösung:

a1) konvergent. a2) divergent. b) $a = 0$, $b = 2$

2. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter sei $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit

$$\mathbf{v}(x,y) := \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y^2 \\ 6xy + g(x) \end{pmatrix}.$$

Durch $\mathbf{x} : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^2$ werde eine Kurve bezeichnet.

a) Die Funktion g sei durch $g(x) := x$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ dann wegunabhängig ist. $\boxed{1}$

b) Geben Sie t_a, t_b und eine Abbildung $\mathbf{x} : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^2$ an, so dass die Spur der dadurch definierten Kurve gleich dem Viertelkreis mit Radius 1 um $(0,0)^\top \in \mathbb{R}^2$ ist und $\mathbf{x}(t_a) = (1,0)^\top$ und $\mathbf{x}(t_b) = (0,1)^\top$ gilt. $\boxed{1}$

c) Die Funktion g sei durch $g(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Ermitteln Sie eine Funktion $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die Potential des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ ist. $\boxed{2}$

d) Die Funktion g sei durch $g(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}$ für die in b) definierte Kurve $\mathbf{x}$. $\boxed{1}$

Lösung:

a) wegabhängig. b) $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$

c) $\Phi(x,y) = x^3 + 3y^2 x$. d) $\int_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = -1$

3. Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{v}(x,y,z) := (4xz^2, 4yz^2, 0)^\top$$

sowie der Körper

$$\mathcal{K} := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \le 1 - 2z,\ z \ge 0\}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ und $\operatorname{div}\mathbf{v}$. $\boxed{2}$

b) Geben Sie eine Beschreibung des Körpers $\mathcal{K}$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten an. $\boxed{1}$

c) Es bezeichne $\partial\mathcal{K}$ die Oberfläche des Körpers $\mathcal{K}$. Berechnen Sie den Wert des Oberflächenintegrals $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{K}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}$. $\boxed{2}$

Lösung:

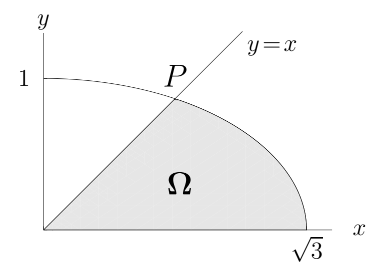
a) $\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = (-8yz, 8xz, 0)^\top, \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 8z^2.$

b) $0 \le r \le 1, ; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi; \quad 0 \le z \le \frac{1}{2}(1 - r^2);$ c) $\dfrac{\pi}{12}$

4. Der ebene Bereich Ω (in der Skizze grau hervorgehoben) ist durch

$$\Omega := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 3y^2 \le 3, \quad 0 \le y \le x\}$$

gegeben.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten (x_P, y_P) des Schnittpunkts P (vgl. Skizze) $\boxed{1}$

b) Beschreiben Sie den Bereich Ω mittels Ellipsenkoordinaten (r,φ), d.h. bestimmen Sie Zahlen a, b, R, Φ, so dass

$$\Omega = \{(x,y)^\top \,|\, x = a\,r\cos\varphi,\ y = b\,r\sin\varphi,\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le \Phi\} \quad \text{gilt.}$$ $\boxed{2}$

c) Geben Sie jeweils ein Doppelintegral zur Berechnung des Flächeninhalts von Ω

c1) in kartesischen Koordinaten (x,y) und $\boxed{1}$

c2) in Ellipsenkoordinaten (r,φ) $\boxed{2}$

an. Der Flächeninhalt selbst ist nicht zu berechnen.

Lösung:

a) $P\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

b) $\Omega = \{(x,y)^\top \,|\, x = \sqrt{3}\,r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\}$

c1) $F = \displaystyle\int_{y=0}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \int_{x=y}^{\sqrt{3-3y^2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y;$ c2) $F = \displaystyle\int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi/3} \sqrt{3}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$

5. a) Untersuchen Sie, ob die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u_{xx} - 2\mathrm{e}^{x} u_{xy} - 3\mathrm{e}^{2x} u_{yy} - u_x = 0$$

elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist. $\boxed{1}$

b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_{xy} = 1$. $\boxed{1}$

c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_x + x u_y = 1$$

Bestimmen Sie die zugehörige Charakteristik in der Form $c = f(x, y)$. $\boxed{2}$

d) Geben Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_x + x u_y = 0$ an. $\boxed{1}$

Lösung:

a) hyperbolisch.

b) $u = xy + C_1(x) + C_2(y)$.

c) $C = 2y - x^2$

d) $u(x, y) = v(2y - x^2)$.

6. Zur Beschreibung der Ausbreitung eines Schadstoffes in einem rinnenförmigen Filterbecken wird die Differentialgleichung

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx}$$

verwendet. Dabei bezeichnet $u(x, t)$ die Schadstoffkonzentration zum Zeitpunkt $t \geq 0$ an der Stelle $x \in [0, \ell]$ der Rinne.

a) Der Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ führt auf je eine Differentialgleichung für die Funktionen $X : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ und $T : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.
Leiten Sie diese Differentialgleichungen her. $\boxed{2}$

b) Die Funktion X in a) besitzt die Gestalt

$$X(x) = a \sin(2\sqrt{\mu}\, x) + b \cos(2\sqrt{\mu}\, x)$$

mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mu > 0$. Ermitteln Sie alle a, b, μ, so dass der Separationsansatz aus a) den Randbedingungen

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

genügt und X nicht die Nullfunktion ist. $\boxed{3}$

Lösung:

a) $X'' = \mu X$ und $4T' = \mu T$ oder auch $X'' = 4\mu X$ und $T' = \mu T$

b) $b = 0$; $a \neq 0$: $\mu = \left(\frac{n\pi}{2\ell}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

7. a) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer stetigen Zufallsgröße X, deren Dichte $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 1, \\ \mathrm{e}^{-x+1} & \text{falls } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. $\boxed{1}$

b) Die Zufallsgröße Y besitze die Verteilungsfunktion $F_Y : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit

$$F_Y(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq -1, \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 & \text{falls } x \in (-1,2], \\ 1 & \text{falls } x > 2 \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Ermitteln Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P\left(|Y-1| \leq 1 \;\middle|\; |Y| \leq 1\right)$. $\boxed{2}$

c) Bestimmen Sie die Dichte $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der in b) gegebenen Zufallsgröße Y. $\boxed{1}$

d) Die diskrete Zufallsgröße Z kann die drei Werte -1, 0 und 1 jeweils mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ annehmen. Ermitteln Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $U := 3Z^2 + 1$. $\boxed{1}$

e) Begründen Sie, warum die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^x - 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

nicht Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße sein kann. $\boxed{1}$

<u>Lösung:</u>

a) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{1-x} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$

b) $P\left(|Y-1| \leq 1 \;\middle|\; |Y| \leq 1\right) = \dfrac{3}{4}.$

c) $f_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(x+1) & \text{falls } x \in (-1,2], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$

d) $E(U) = 3.$

e) Da $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty \neq 1$

8. Ein Gerät wird aus den zwei Baugruppen B_1 und B_2 zusammengesetzt. Die Massen M_1 und M_2 der Baugruppen seien normalverteilte Zufallsgrößen mit den Varianzen $\sigma_1^2 = 0.32$ und $\sigma_2^2 = 0.16$ (in kg^2).

a) Bestimmen Sie die Varianz VAR(M) der Gesamtmasse $M := M_1 + M_2$, falls

a1) cov$(M_1, M_2) = 0$ bzw. $\boxed{1}$

a2) cov$(M_1, M_2) = 0.01$ $\boxed{1}$

gilt.

b) Aus einer Lieferung mit Baugruppen B_2 soll eine Stichprobe vom Umfang n entnommen werden, um eine Konfidenzschätzung für die Masse M_2 vorzunehmen. Ermitteln Sie, wie groß n mindestens gewählt werden muss, damit bei einem Konfidenzniveau von $1 - \alpha = 0.95$ die Länge des Konfidenzintervalls höchstens 0.4 kg beträgt? Dabei ist von der bekannten Varianz $\sigma_2^2 = 0.16$ für M_2 auszugehen. $\boxed{2}$

<u>Lösung:</u>

a1) VAR$(M) = 0.48$, a2) VAR$(M) = 0.5$ b) $n = 16.$