Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

31. Juli 2014

Prüfungsklausur Mathematik II

Aufgaben und Ergebnisse

- Für Studierende des Maschinenwesens mit PO ab 2012 (Modul *Ingenieurmathematik*) gilt:
  120 Minuten Bearbeitungszeit, 27 Punkte entsprechen 100%.
- Für Studierende des Maschinenwesens mit PO vor 2012 (Modul *Mathematik I*) gilt:
  180 Minuten Bearbeitungszeit, 37 Punkte entsprechen 100%.
- Für Studierende des Verkehrsingenieurwesens (Modul *Differentialgleichungen und Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Variabler*) gilt:
  120 Minuten Bearbeitungszeit, 27 Punkte entsprechen 100%.

1. Gegeben sind die Ebene

$\mathcal{E}_1 := \{(x, yz) \in \mathbb{R}^3 | \;\; 4x + 3y - 5z = 13\}$ und $\mathcal{E}_2 := \{(x, yz) \in \mathbb{R}^3 | \;\; x + y + z = 0\}$

sowie die Punkte $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -1, 0)$, $C(3, -2, 1)$ und $D(1, 0, 3)$.

a) Ermittel Sie die parameterfreie Gleichung derjenigen Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade der Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$. $\boxed{1}$

c) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B und C. $\boxed{1}$

d) Stellen Sie fest, ob die Gerade durch die Punkte A und B und die Gerade durch die Punkte C und D zueinander windschief sind. $\boxed{2}$

2. Mit P_i werde der Vektorraum der Polynome höchstens i-ten Grades bezeichnet.

a) Geben Sie eine Basis von P_2 und P_1 an. $\boxed{1}$

b) Weisen Sie nach, dass die Abbildung $f : P_2 \to P_1$ mit $f(p) := p'$ linear ist. $\boxed{1}$

c) Ermitteln Sie die Darstellungsmatrix der in b) definierten linearen Abbildung f bezüglich der in a) definierten Basen. $\boxed{1}$

3. a) Ermitteln Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(x) + \tan(x)\, y(x) = 0, \text{ mit } y(0) = 1.$$ $\boxed{2}$

b) Die Differentialgleichung $y'(x) - 2y(x) = 0$ besitzt die Lösung y_h mit $y_h(x) := \mathrm{e}^{2x}$. Ermitteln Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y'(x) - 2y(x) = \mathrm{e}^{2x} \ln(x), \qquad \text{für } x > 0.$$ $\boxed{2}$

4. a) Es sei die Differentialgleichung:

$$y''(x) - 2y'(x) + (1 - \alpha)y(x) = r(x)$$

gegeben, wobei $\alpha \in (-\infty, 0]$ einen Parameter und $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion bezeichnen.

a1) Ermittel Sie für $\alpha = 0$ und $r(x) = 1 + 4\mathrm{e}^{3x}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. $\boxed{4}$

a2) Ermitteln Sie für $\alpha < 0$ und $r(x) := 0$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. $\boxed{2}$

b) Emitteln Sie die allgemeine Lösung des linearen Differialglleichungssytems

$$\dot{x}(t) = x(t) + y(t), \qquad \dot{y}(t) = 3x(t) - y(t)$$

$\boxed{4}$

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 -> \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := (x + 3)(y^2 - 1) + x^2 - 9x + 10$$

a) Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für die folgende Optimierungsaufgabe $f(x, y) \to \min$ auf. $\boxed{1}$

b) Ermitteln Sie alle Punkte (x, y), die den notwendigen Optimalitätsbedingungen aus Teil a) genügen. $\boxed{2}$

c) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x, y)$. $\boxed{1}$

d) Ermitteln Sie das Taylor-Polynom vom Grad 2 für die Funktion f zur Entwicklungsstelle $(x_0, y_0) := (0, 0)$. $\boxed{2}$

e) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens zur Lösung der Gleichung $\nabla f(x, y) = 0$ mit dem Startpunkt $(x_0, y_0) := (0, 0)$ durch. $\boxed{2}$

f) Weisen Sie nach, dass $(-3, 4)$ ein Sattelpunkt der Funktion f ist. $\boxed{2}$

g) Stellen Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Optimierungsaufgabe $f(x, y) \to \min$ bei $(x + 3)^2 + y^2 = 16$ auf. $\boxed{2}$

h) Zeigen Sie, dass der Punkt $(x^*, y^*) := (1, 0)$ zusammen mit einem Lagrange-Multiplikator v^* die notwendigen Optimalitätsbedingungen aus g) erfüllt und bestimmen Sie v^*. $\boxed{2}$

i) Ermitteln Sie den Wertebereich $W := \{s(x, y) | \ x, y \in \mathbb{R}\}$ der Funktion $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $s(x, y) := (x + 3)(y^2 - 1)$. $\boxed{1}$

Ergebnisse (ohne Gewähr)

1. a) $x + y - z = 0$
   b) $\mathcal{G} = \{(13, -13, 0)^\top + t(8, -9, 1)^\top \mid t \in \mathbb{R}\}$
   c) $2\sqrt{3}$
   d) Geraden sind windschief.

2. a) Für P_1 bilden die Polynome p_0 und p_1 mit $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := x$ für $x \in \mathbb{R}$ eine Basis. Für P_2 bilden die Polynome p_0, p_1 und p_2 eine Basis, wobei $p_2(x) := x^2$ für $x \in \mathbb{R}$.
   b) $f(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)' = \alpha p' + \beta q' = \alpha f(p) + \beta f(q)$ gilt für beliebige $p, q \in P_2$ und beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
   c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. a) $y(x) = \cos x$
   b) $y_p(x) = x(\ln(x) - 1)\mathrm{e}^{2x}$

4. a1) $y(x) = 1 + \mathrm{e}^{3x} + (C_1 + xC_2)\mathrm{e}^x$
   a2) $y(x) = \mathrm{e}^x \left(C_1 \cos\left(\sqrt{|\alpha|}\, x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{|\alpha|}\, x\right)\right)$
   b) $\mathbf{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$

5. a) $y^2 + 2x - 10 = 0$, $2y(x + 3) = 0$
   b) $P_1(5; 0)$, $P_2(-3, -4)$, $P_3(-3, 4)$
   c) $\begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2(x + 3) \end{pmatrix}$
   d) $p_2(x, y) = 7 - 10x + x^2 + 3y^2$
   e) $(x_1, y_1) = (5, 0)$
   f) Sattelpunkt, da det $\left(\nabla^2 f(-3, 4)\right) = -64 < 0$
   g) $y^2 - 10 + 2x + 2\lambda(x + 3) = 0$, $2y(x + 3) + 2\lambda y = 0$, $(x + 3)^2 + y^2 - 16 = 0$
   h) $L_x(1, 0, \lambda) = -8 + 8\lambda = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = 1$, $L_y(1, 0, \lambda) = 0$, $L_\lambda(1, 0, \lambda) = 0$
   i) $W = \mathbb{R}$