Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

Prüfungsklausur Spezielle Kapitel der Mathematik
für Studierende der Fakultät Maschinenwesen
vom 10. August 2015

Aufgaben und Ergebnisse

- Für Studierende mit PO ab 2012 gilt: 150 Minuten Bearbeitungszeit, 40 Punkte entsprechen 100%.
- Für Studierende mit PO vor 2012 gilt: 180 Minuten Bearbeitungszeit, 48 Punkte entsprechen 100%.

Aufgaben

1. a) Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren oder nicht.

a1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}$ a2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ $\boxed{2}$

b) Gegeben sei die Potenzreihe

$$P(x) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n(n-1)^2}(x+1)^n.$$

Ermitteln Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $P(x)$ für jedes x aus dem offenen Intervall (a, b) konvergiert und $b - a$ möglichst groß ist. $\boxed{2}$

2. Die Vektorfelder $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und das skalare Feld $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$\mathbf{v}(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 + x \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{w}(x,y) := \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ y^3 - 3yx^2 \end{pmatrix}, \qquad \Psi(x,y) := xy + y.$$

a) Untersuchen Sie, ob die Vektorfelder Potentialfelder sind und ermitteln Sie gegebenenfalls die Potentialfunktion. $\boxed{4}$

b) Geben Sie Zahlen t_a, t_b und eine Abbildung $\mathbf{x} : [t_a, t_b] \to \mathbb{R}^2$ an, so dass $\mathbf{x}$ eine Kurve definiert, deren Spur

$$\{\mathbf{x}(t) \mid t \in [t_a, t_b]\}$$

das Bogenstück ist, das von $\mathbf{x}(t_a) = (0,1)^\top$ bis $\mathbf{x}(t_b) = (1,2)^\top$ entlang des Randes des Kreises um $(0,2)^\top$ mit Radius 1 verläuft. $\boxed{1}$

c) Berechnen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\displaystyle\int_{\mathbf{x}} \nabla\Psi \cdot \mathbf{ds}$ für die Kurve $\mathbf{x}$ aus Teil b). $\boxed{1}$

3. Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} xy^2z + y \\ 2x^2yz + x \\ x^2y \end{pmatrix}$$

sowie Konstanten $R, h > 0$ und der Körper

$$\mathcal{K} := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2,\ 0 \leq z \leq h\}.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ und $\operatorname{div} \mathbf{v}$. $\boxed{2}$

b) Geben Sie eine Beschreibung des Körpers $\mathcal{K}$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten an. $\boxed{1}$

c) Es bezeichne $\partial\mathcal{K}$ die Oberfläche des Körpers $\mathcal{K}$. Der Normalenvektor von $\partial\mathcal{K}$ sei nach außen gerichtet. Berechnen Sie den Wert des Oberflächenintegrals

$$\int\limits_{\partial\mathcal{K}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}.$$ $\boxed{4}$

4. Gegeben seien der (unendliche) Zylinder

$$\mathcal{Z} := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und der (unendliche) Kegel

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}.$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Oberfläche des in $\mathcal{Z}$ befindlichen Teils des Kegels $\mathcal{C}$ mit Hilfe von

a1) kartesischen Koordinaten (x, y) und $z = z(x, y)$ sowie $\boxed{2}$

a2) Polarkoordinaten (r, φ) und $z = z(r, \varphi)$ $\boxed{2}$

an. Dazu gehören jeweils die Definition der Funktion z und die Angabe der Grenzen für die Parameter.

b) Die Oberfläche des in $\mathcal{Z}$ befindlichen Teils des Kegels $\mathcal{C}$ besitze die Massendichte $\rho(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2}$. Berechnen Sie die Masse dieser Oberfläche. $\boxed{2}$

5. a) Untersuchen Sie, ob die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$u_{xx} + 2\cos(xy)\, u_{xy} - \sin^2(xy)\, u_{yy} + x^2 u_x = 0$$

elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist. $\boxed{1}$

b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_{xx} + y\, u_x = 0$. $\boxed{2}$

c) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_x + xy\, u_y = 1.$$

Ermitteln Sie die zugehörige Charakteristik in der Form $C = f(x, y)$, falls $y > 0$. $\boxed{2}$

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $u_x + xy\, u_y = 0$. $\boxed{1}$

6. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx} + 6u_x + 9u = u_t.$$

Der Separationsansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ führt auf je eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktionen $X : [0, 1] \to \mathbb{R}$ und $T : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Die gewöhnliche Differentialgleichung für die Funktionen X habe die Gestalt

$$X''(x) + 6X'(x) + (9 + \mu)X(x) = 0. \tag{1}$$

a) Leiten Sie die zu (1) gehörige gewöhnliche Differentialgleichungen für die Funktion T her und bestimmen Sie die allgemeine Lösung von T. $\boxed{3}$

b) Die Lösung der Differentialgleichung (1) besitzt die Gestalt

$$X(x) = \mathrm{e}^{-3x}\{a\sin(\sqrt{\mu}\,x) + b\cos(\sqrt{\mu}\,x)\}$$

mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mu > 0$. Ermitteln Sie alle a, b, μ, so dass der Separationsansatz den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \text{für alle } t \geq 0$$

genügt und X nicht die Nullfunktion ist. $\boxed{3}$

c) Bestimmen Sie die Lösung der partiellen Differentialgleichung, die neben den Randbedingungen in Teil b) auch der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 14\mathrm{e}^{-3x}\sin(5\pi x) \qquad \text{für alle } x \in [0,1]$$

genügt. $\boxed{2}$

7. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a, \\ \dfrac{b}{t^4} & \text{für } t \geq a, \end{cases}$$

wobei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ so gewählt seien, dass f Dichtefunktion der Zufallsgröße T ist.

a) Bestimmen Sie b in Abhängigkeit von a. $\boxed{2}$

b) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion F der Zufallsgröße T in Abhängigkeit von a, b. $\boxed{1}$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(T)$ der Zufallsgröße T in Abhängigkeit von a, b. $\boxed{2}$

d) Die Zufallsgröße T beschreibe die Lebensdauer eines Transistors (gemessen in Tagen). Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer zwischen a und $2a$ Tagen liegt. $\boxed{1}$

8. Eine Sicherungsanlage bestehe aus zwei unabhängig voneinander arbeitenden gleichartigen Bauelementen B_1 und B_2. Die Anlage ist voll wirksam, solange wenigstens eines der beiden Bauelemente funktioniert. Es soll angenommen werden, dass die Lebensdauer X eines Bauelements (in Jahren) einer Rayleigh-Verteilung genügt, deren Verteilungsfunktion F durch

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-x^2} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Im Lösungsweg auftretende Ausdrücke der Form e^z und $\ln(z)$ mit einer reellen Zahl z sind nicht weiter umzuformen.

a) Ermitteln Sie die Dichte der Zufallsgröße X. $\boxed{1}$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauelement mindestens zwei Jahre funktioniert. $\boxed{1}$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bauelement eine Lebensdauer von insgesamt mindestens drei Jahren besitzt, wenn es schon zwei Jahre funktioniert hat. $\boxed{1}$

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anlage mindestens zwei Jahre funktioniert. $\boxed{2}$

Ergebnisse (ohne Gewähr)

1. a) a1) $\dfrac{|\sin(n^2)|}{n^2} \le \dfrac{1}{n^2}$ konvergente Majorante, a2) QK: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{1}{3} < 1$ konvergent.

b) $r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = 2 \;\Rightarrow a = -3 < x < 1 = b.$

2. a) $\mathbf{v}$ kein Potentialfeld; $\mathbf{w}$ Potentialfeld mit $\Phi(x,y) = \dfrac{1}{4}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + K$.

b) $x(r,\varphi) = \cos\varphi$; $y = 2 + \sin\varphi$ mit $\frac{3}{2}\pi \le \varphi \le 2\pi$

c) $\displaystyle\int_{\mathbf{x}} \nabla\Psi \cdot \mathbf{ds} = \Psi(2,1) - \Psi(0,1) = 3.$

3. a) $\operatorname{rot}\mathbf{v} = (x^2 - 2x^2y, xy^2 - 2xy, 2xyz)^\top$, $\quad \operatorname{div}\mathbf{v} = y^2z + 2x^2z.$

b) $x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 \le r \le R,\; 0 \le z \le h.$

c) div $\mathbf{v} = \dfrac{1}{2}r^2z(3+\cos(2\varphi)) \Rightarrow \displaystyle\int_{\partial\mathcal{K}} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dO} = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}\int_{z=0}^{h} \frac{1}{2}r^3z(3+\cos(2\varphi))\mathsf{d}z\mathsf{d}r\mathsf{d}\varphi = \frac{3}{8}h^2R^4\pi.$

4. a1) $(x,y,z(x,y))^\top = (x,y,\sqrt{x^2+y^2})^\top$ mit $-1 \le x \le 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$;

a2) $(r\cos\varphi, r\sin\varphi, r)^\top$ mit $0 \le r \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

b) $\rho = r$ und $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{2}$ oder $|\mathbf{x}_\varphi \times \mathbf{x}_r| = \sqrt{2}r$: $\Rightarrow M = \displaystyle\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \sqrt{2}r^2\mathsf{d}r\mathsf{d}\varphi = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$

5. a) hyperbolisch.

b) Mit $z(x,y) = u_x(x,y) \Rightarrow: u(x,y) = C_2(y)\mathsf{e}^{-xy} + C_3(y)$ mit $C_2(y) = -\dfrac{1}{y}C_1(y).$

c) $C = \ln y - \frac{1}{2}x^2$ bzw. $C = 2\ln y - x^2$ bzw. $C = y^2\mathsf{e}^{-x^2}$ bzw. $C = y\mathsf{e}^{-x^2/2}$

d) $u(x,y) = \Phi(C)$ mit C aus c).

6. a) Der Separationsansatz $\dfrac{X'' + 6X'}{X} + 9 = \dfrac{T'}{T} = -\mu \Rightarrow T = C_k\mathsf{e}^{-\mu t}.$

b) $X(0) = b \Rightarrow b = 0$ und aus $X(1) = 0 \Rightarrow \sqrt{\mu} = n\pi, \;\; n = 1, 2, \ldots$ und $a \in \mathbb{R}$

c) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\mathsf{e}^{-n^2\pi^2t-3x}\sin(n\pi x) \qquad \Rightarrow \qquad u(x,t) = 14\mathsf{e}^{-25\pi^2t-3x}\sin(5\pi x)$

7. a) Aus $f(t) \ge 0 \Rightarrow b > 0$ und $b = 3a^3$.

b) $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < a, \\ 1 - \dfrac{a^3}{t^3} & \text{für } t \ge a, \end{cases}$ c) $E(T) = \dfrac{3a}{2}$, d) $P(a < T \le 2a) = \dfrac{7}{8}$

8. a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; x < 0, \\ 2x\mathsf{e}^{-x^2} & \text{für } \; x \ge 0 \end{cases},$

b) $P(X \ge 2) = \mathsf{e}^{-4}$

c) $P(X \ge 3 | X \ge 2) = \dfrac{P(X \ge 3)}{P(X > 2)} = \mathsf{e}^{-5}$

d) $P(X_1 \ge 2 \cup X_2 \ge 2) = P(X_1 \ge 2) + P(X_2 \ge 2) - P(X_1 \ge 2)P(X_2 \ge 2) = 2\mathsf{e}^{-4} - \mathsf{e}^{-8}$
oder $P(X_1 \ge 2 \cup X_2 \ge 2) = 1 - P(X_1 \le 2)P(X_2 \le 2) = 1 - (1 - \mathsf{e}^{-4})^2$