Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

Aufgaben und Ergebnisse der Klausur am 12. 2. 2019

für Studierende des Verkehrsingenieuerwesens zum Modul
Lineare Algebra und Analysis für Funktionen einer Variablen

Alle Angaben ohne Gewähr!

1. a) Gegeben seien eine reelle Zahl α und die komplexe Zahl $w_1(\alpha) := 1 + \alpha \mathrm{i}$. Bestimmen Sie den Betrag $r(\alpha)$ dieser komplexen Zahl sowie den Realteil von $w_2(\alpha) := \dfrac{1}{w_1(\alpha)}$. $\boxed{2}$

b) Gegeben sei das Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $p(z) := z^4 + 8\mathrm{i}\, z$. $\boxed{3}$
Bestimmen Sie alle Nullstellen dieses Polynoms in $\mathbb{C}$.

2. Gegeben sei die injektive Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{x+1}{x-1},$$

wobei $D_f \subset \mathbb{R}$ den größtmöglichen Definitionsbereich von f und $W_f := f(D_f)$ den Wertebereich von f bezeichnet.

a) Geben Sie D_f an. $\boxed{1}$

b) Zeigen Sie, dass $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ injektiv ist. $\boxed{1}$

c) Bestimmen Sie W_f. $\boxed{2}$

d) Für die Funktion $g : W_f \to \mathbb{R}$ gelte $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$. Ermitteln Sie eine explizite Vorschrift für $g(y)$. $\boxed{2}$

3. a) Ermitteln Sie den Grenzwert $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\mathrm{e}^x - 1}$. $\boxed{1}$

b) Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\boxed{1}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 - \cos(x - \pi), & \text{für } x < \pi, \\ a + 2(x-\pi)^2, & \text{für } x \geq \pi. \end{cases}$$

Ermitteln Sie, für welche Werte a die Funktion f stetig ist.

c) Ermitteln Sie ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweiten Grades, das den Bedingungen $\boxed{3}$

$$p(-1) = 1, \quad p(0) = 2, \quad p(1) = 5$$

genügt. Bestimmen Sie außerdem ein Polynom q dritten Grades, das diese Bedingungen und die Forderung $q(2) = 4$ erfüllt.

d) Für eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei bekannt, dass es eine Umgebung von $x = 0$ gibt, so dass h in dieser Umgebung differenzierbar ist und die Gleichung $\boxed{3}$

$$(h(x))^3 + 3\,h(x) + x^3 + 7\,x = 0$$

erfüllt. Ermitteln Sie $h(0)$ und $h'(0)$.

4. Gegeben sei die Funktion $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \ln(x-2)$. Weiter bezeichne $T_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das quadratische Taylorpolynom zur Funktion f für die Entwicklungsstelle $x_0 := 3$.

a) Ermitteln Sie T_2. $\boxed{2}$

b) Geben Sie das Restglied $R_2 : (2, \infty) \to \mathbb{R}$ (etwa in der Lagrange-Form) an, so dass also $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$ für alle $x \in (2, \infty)$ gilt. $\boxed{1}$

c) Ermitteln Sie mit Hilfe des Restgliedes aus b) eine möglichst große Zahl $\delta > 0$, so dass $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{3}10^{-6}$ für alle $x \in [3, 3+\delta]$ gilt. $\boxed{2}$

5. a) Ermitteln Sie das unbestimmten Integral $\int x^3 \cos(x^2)\, \mathrm{d}x$. $\boxed{3}$

b) Die gebrochen rationale Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $\boxed{3}$

$$f(x) := \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)}.$$

Geben Sie einen Ansatz für die Partialbruchzerlegung von f an.

c) Gegeben sei die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := \int\limits_0^x t^2\, \mathrm{e}^{-t^2}\, \mathrm{d}t$. $\boxed{2}$
Zeigen Sie, dass g streng monoton wachsend ist.

d) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := \cos(3x)\cos(x)$. $\boxed{2}$
Bestimmen Sie durch partielle Integration eine Stammfunktion von f.

6. Für reelle Parameter α, β seien die Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{b}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3 & \alpha & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie jeweils alle Paare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so dass das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ $\boxed{4}$
a1) eine eindeutige Lösung, a2) unendlich viele Lösungen, a3) keine Lösung
besitzt.

b) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ und $\beta = -1$ die Ausdrücke $\mathbf{A} + \mathbf{b}^\top\mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}^\top$, sofern das möglich ist. $\boxed{1}$

7. a) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\boxed{3}$

$$\mathbf{v_1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v_2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v_3} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Verändern Sie genau eine Koordinate des Vektors $\mathbf{v}_1$ so, dass die drei Vektoren linear abhängig werden.

b) Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Weiter seien $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren, die beide den Betrag 1 besitzen und zueinander senkrecht sind. Ermitteln Sie den Betrag des Vektors $4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. $\boxed{2}$

Ergebnisse

1. a) $r(\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2}$, Re $\big(w_2(\alpha)\big) = \dfrac{1}{1+\alpha^2}$

b) $z_1 = 0$, $z_2 = 2\mathrm{i}$, $z_3 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-5\pi/6)}$, $z_4 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi/6)}$

2. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$

b) injektiv auf $(-\infty, 0) \Leftrightarrow u, v \in (-\infty, 0)$ mit $u \neq v \Rightarrow \dfrac{u+1}{u-1} \neq \dfrac{v+1}{v-1}$

c) $W_f = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$ d) $g(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$

3. a) 2 b) $a = 0$

c) $p(x) = 1 + (x+1) + (x+1)x$, $q(x) = p(x) - (x+1)x(x-1)$

d) $h(0) = 0$, $h'(0) = -\dfrac{7}{3}$

4. a) $T_2(x) = (x-3) - \dfrac{1}{2}(x-3)^2)$ b) $R_2(x) = \dfrac{1}{3(\xi-2)^2}(x-3)^3$ mit ξ zwischen 2 und x

c) $\delta = 10^{-2}$

5. a) $\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(x^2\right) + x^2 \sin\left(x^2\right)\right] + C$ b) $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$

c) $g'(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2} > 0$ für $x > 0$ d) $\dfrac{1}{8}\left[3\cos\left(x\right)\sin\left(3x\right) - \sin\left(x\right)\cos\left(3x\right)\right]$

6. a) a1) $\alpha \neq 15$, a2) $\alpha = 15$, $\beta = -3$ a3) $\alpha = 15$, $\beta \neq -3$

b) $\mathbf{A} + \mathbf{b}^\top\mathbf{b}$ existiert nicht, $\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{b}^\top = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7. a) det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow$ linear unabhängig, $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}$

b) $|4\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| = 5$