Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

12. Februar 2014

Prüfungsklausur Mathematik I

für Studierende des Verkehrsingenieuerwesens

1. a) Bestimmen Sie den Realteil der komplexen Zahl $w_1 := \mathrm{e}^{3+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. $\boxed{1}$

b) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{M} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| \le 1,\ |z| \le 1\}$ in einem geeigneten Koordinatensystem. $\boxed{1}$

c) Ermitteln Sie reelle Zahlen α, β, γ derart, dass das Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $p(z) := z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ zumindest die Nullstellen $z_1 := \mathrm{i}$ und $z_2 := 1$ besitzt. $\boxed{1}$

2. Gegeben seien die Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \ln(x) \qquad \text{und} \qquad g(x) := \frac{x+2}{x-1},$$

wobei $D_f \subset \mathbb{R}$ bzw. $D_g \subset \mathbb{R}$ jeweils den natürlichen (d.h. größtmöglichen) Definitionsbereich bezeichnet.

a) Ermitteln Sie D_f und D_g. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie den natürlichen Definitionsbereich D_h der Funktion $h : D_h \to \mathbb{R}$ mit $h(x) := f(g(x))$. $\boxed{2}$

c) Zeigen Sie, dass die obige Funktion g im Intervall $(1, \infty)$ monoton fallend ist. $\boxed{1}$

3. Gegeben sei die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x \ln(1 + x) + 1$.

a) Ermitteln Sie das quadratische Taylorpolynom zur Funktion f für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$. $\boxed{2}$

b) Stellen Sie f durch Taylorentwicklung zur Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ dar, wobei das Restglied die zweite Ableitung von f enthalten soll. $\boxed{1}$

c) Ermitteln Sie eine möglichst große Zahl $b > 0$, so dass $|f(x) - f(0)| \le \frac{3}{2}$ für alle $x \in [0, b]$ gilt. $\boxed{2}$

4. a) Ermitteln Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(3x^2-1)}{\ln(2x+4)}$. $\boxed{2}$

b) Die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Berechnen Sie $f'(1)$. $\boxed{1}$

c) Für Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \sinh(ax), & \text{falls } x \le 0 \\ ax + b, & \text{falls } x > 0 \end{cases} \quad \text{gegeben.}$$

Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für die die Funktion an der Stelle $x = 0$ stetig und differenzierbar ist. $\boxed{2}$

5. Für reelle Parameter α, β seien die Matrix $\mathbf{A}$ und der Vektor $\mathbf{b}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} \beta \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Ermitteln Sie jeweils alle Paare $(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so dass das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
a1) eine eindeutige Lösung, a2) unendlich viele Lösungen, a3) keine Lösung
besitzt. $\boxed{3}$

b) Berechnen Sie $\mathbf{b}^\top \mathbf{Ab}$ für den Fall $\alpha = \beta = 0$. $\boxed{1}$

c) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ die Determinante der Matrix $\mathbf{C} := \mathbf{A}^\top \mathbf{A}$. $\boxed{1}$

6. a) Ermitteln Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a1) $\displaystyle\int x\, \mathrm{e}^{2x+1}\, \mathrm{d}x$, a2) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\, \mathrm{d}x$. $\boxed{2}$

b) Untersuchen Sie, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \mathrm{e}^x}\, \mathrm{d}x$ existiert. $\boxed{2}$

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade stetige Funktion. Zeigen Sie, dass dann die Gleichung $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, \mathrm{d}x = 0$ gilt. $\boxed{2}$

Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer 12. Februar 2014

Prüfungsklausur Mathematik I

für Studierende des VIW
Lösungshinweise - ohne Gewähr

1. a) $\mathrm{Re}(w_1) = \frac{\mathrm{e}^3}{2}\sqrt{3}$,

b) $\mathcal{M} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \mathrm{i}| \le 1,\ |z| \le 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$

c) $p(z) := (z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i})(z - 1) = (z^2 + 1)(z - 1) = z^3 - z^2 + z - 1$

2. a) $D_f = \{\ x \in \mathbb{R}\,|x > 0\ \}$; $D_g = \{\ x \in \mathbb{R}\,|x \neq 1\ \}$

b) $D_h = \{\ x \in \mathbb{R}\,|x > 1$ oder $x < -2\ \}$.

c) $g'(x) = \ldots < 0$, also g auf $(1, \infty)$ monoton fallend.

3. a) $p(x) = 1 + x^2$

b) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\xi + 2}{(\xi + 1)^2}x^2$ mit ξ zwischen 0 und x

c) $|f(x) - f(0)| = \frac{1}{2}\frac{|\xi + 2|}{(\xi + 1)^2}|x|^2 = \frac{1}{2}\frac{\xi + 2}{(\xi + 1)^2}x^2 \le \frac{1}{2}(x + 2)x^2 \overset{!}{<} \frac{3}{2} \Rightarrow b = 1.$

4. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{\ln(3x^2 - 1)}{\ln(2x + 4)}\right\} = 2.$ b) $f'(x) = \frac{1}{1 + x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}.$ c) $b = 0$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig.

5. a) a1) eine eindeutige Lösung für $\alpha \neq 4$,
a2) unendlich viele Lösungen für $\alpha = 4$ und $\beta = -3$
a3) keine Lösung für $\alpha = 4$ und $\beta \neq -3$

b) $\mathbf{b}^\top\mathbf{A}\mathbf{b} = 18$, c) $\det(\mathbf{A}) = -4 \Rightarrow \det(\mathbf{C}) := \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}) = 16$.

6. a) a1) $\int x\mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x+1} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x+1} + C$;

a2) Subst.: $u = \ln x,\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ $\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\,\mathrm{d}x = \sin(\ln(x)) + C.$

b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x < \int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_1^\infty = \mathrm{e}^{-1}$ oder

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x < \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -x^{-1}\Big|_1^\infty = 1$ existiert.

c) Es gilt: $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0$ und damit:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$