Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

11. Februar 2009

Testatklausur Mathematik I/1

für Studierende der Fakultät Maschinenwesen

Für jede der 19 Teilaufgaben wird bei richtiger Antwort ein Punkt erteilt.

Aufgabe Nr.	Ihre Antwort	Punkte
1.a)	$\mathrm{Im}(w) = -\frac{1}{2}(a+b)$	
1.b)	$z_1 = 2 + 7\mathrm{i}$	
1.c)	Die folgende Aussage ist richtig: c2	
2.a)	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} < x \leq -1 \vee 1 \leq x < \sqrt{5}\}$	
2.b)	$D_* = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < \sqrt{5}\}$	
3.a)	Die folgende Aussage ist richtig: a1	
3.b)	$f'(x) = \displaystyle\int_{t=1}^{x^2} \frac{1}{x(1+t)}\,\mathrm{d}t + \frac{6x}{1+x^2}\ln x = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + \frac{6x}{1+x^2}\ln x$	
3.c)	$\alpha = 1$	
3.d)	$h''(\pi) = \dfrac{2}{\pi^2}$	
3.e)	$p_2(x) = -\frac{1}{\pi}(x-\pi) + \frac{1}{\pi^2}(x-\pi)^2$	
4.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{1-\cos(2x)}{\mathrm{e}^{3x}-1-x}\right\} = 0$	
4.b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)\right\} = 1$	
5.a)	$I = \mathrm{e} - 1 + \ln 2 - \ln(\mathrm{e}+1) = \mathrm{e} - 1 - \ln\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\right)$	
5.b)	$A = \frac{9}{8} = 1.125$	
5.c)	$J = 4$	
6.a)	Der folgende Ausdruck ist nicht definiert: $\det\mathbf{A}$,	
6.b)	$\alpha \neq 1$ | $\beta = 3$	
6.c)	$\alpha = 1$ | $\beta = 3$	
6.d)	α beliebig; | $\beta \neq 3$	
________	Summe	

1. a) Gegeben ist die komplexe Zahl $w := \dfrac{a - b\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Geben Sie den Imaginärteil von w an.

b) Seien $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ mit $a_3 \neq 0$. Weiter sei $z_0 := 2 - 7\mathrm{i}$ eine Lösung der Polynomgleichung

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0.$$

Geben Sie eine weitere Lösung z_1 dieser Gleichung an.

c) Gegeben sei die Gleichung $(z + \bar{z}) = 1$.
Geben Sie an, welche der Aussage c1), c2), c3) richtig ist:
c1) Die Gleichung hat genau eine Lösung in $\mathbb{C}$.
c2) Die Gleichung hat unendlich viele Lösungen in $\mathbb{C}$.
c3) Die Gleichung hat keine Lösung in $\mathbb{C}$.

2. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \ln(2 - \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{für } x \in D$$

gegeben. Dabei bezeichne $D \subset \mathbb{R}$ den natürlichen (d.h. größtmöglichen) Definitionsbereich.

a) Geben Sie D an.

b) Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D_* \subset (0, \infty)$ an, in dem für $f : D_* \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion existiert.

3. a) Gegeben sei die Menge $G := \{x \in [0, \frac{\pi}{2}] \mid \cos x - x \sin x = 0\}$.
Geben Sie an, welche der Aussagen a1), a2), a3) richtig ist.
a1) G enthält genau ein Element.
a2) G ist leer.
a3) G enthält unendlich viele Elemente.

b) Sei die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \int_{t=1}^{x^2} \frac{\ln(tx)}{1+t} \,\mathrm{d}t \quad \text{für } x > 0.$$

Geben Sie $f'(x)$ für $x \in (0, \infty)$ an.

c) Gegeben sei die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x} \sin x & \text{für } x \neq 0, \\ \alpha & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Geben Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so an, dass h stetig ist.

d) Geben Sie $h''(\pi)$ für die Funktion h aus c) an.

e) Geben Sie zur Funktion h aus c) das Taylorpolynom p_2 vom Grad 2 zur Entwicklungsstelle π an.

4. Geben Sie folgende Grenzwerte an

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1 - \cos(2x)}{\mathrm{e}^{3x} - 1 - x} \right\}$, b) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left\{ x \ln\left(\frac{2x+1}{2x-1} \right) \right\}$.

Bitte wenden!

5. a) Geben Sie den Wert des bestimmten Integrals $I := \int\limits_{x=0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\,\mathrm{d}x$ an.

b) Geben Sie den Inhalt A der Fläche $\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 \le y \le x+1,\ -\frac{1}{2} \le x \le 1\}$ an.

c) Geben Sie den Wert des uneigentlichen Integrals $J := \int\limits_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ an.

6. Seien α, β reelle Parameter. Weiter seinen die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und die Vektoren $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ \beta \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie unter den Ausdrücken

$$\mathbf{AB}, \qquad \det \mathbf{A}, \qquad \mathbf{b}\mathbf{b}^\top$$

denjenigen an, der nicht definiert ist.

b) Geben Sie alle (α, β) an, für die das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ eine eindeutige Lösung hat.

c) Geben Sie alle (α, β) an, für die das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ unendlich viele Lösungen hat.

d) Geben Sie alle (α, β) an, für die das Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ keine Lösung hat.