Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

2. August 2004

Klausur Mathematik II

für Studierende der Fakultät Maschinenwesen und des Studiengangs Mechatronik

mit Lösungsvorschlag

1. Es sei
$$\int_C (\frac{x}{z}\mathsf{dx} + \frac{z}{x^2-2}\mathsf{dy} + x^2\mathsf{dz}).$$

   (a) Untersuchen Sie dieses Kurvenintegral auf Wegunabhängigkeit. **2**

   Lösung: Mit $P = \frac{x}{z}$ und $Q = \frac{z}{x^2-2}$ gilt $P_y = 0$ und $Q_x = -\frac{2xz}{(x^2-2)^2}$,
   also $P_y \neq Q_x$, d.h. das Kurvenintegral ist wegabhängig.

   (b) Berechnen Sie den Wert dieses Kurvenintegrals für den Fall, dass die Kurve C vom Punkt $P_1(0,1,2)$ zum Punkt $P_2(1,\mathsf{e},1)$ führt und durch die Parameterdarstellung **3**
$$x(t) = \sqrt{t}, \quad y(t) = \mathsf{e}^t, \quad z(t) = 2-t$$
   gegeben ist.

   Lösung:
$$\int_C (\frac{x}{z}\mathsf{dx} + \frac{z}{x^2-2}\mathsf{dy} + x^2\mathsf{dz}) = \int_{t=0}^{1} (\frac{\sqrt{t}}{2-t}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{2-t}{t-2}\cdot \mathsf{e}^t + t\cdot(-1))\mathsf{dt}$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(2-t) - \mathsf{e}^t - \frac{1}{2}t^2\Big|_{t=0}^{1} = \frac{1}{2}(1+\ln 2) - \mathsf{e}$$

2. Die Kurve $\mathcal{E}$ in der x,y-Ebene sei als Lösungsmenge der Gleichung
$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16 = 0$$
definiert. Unter allen Punkten der Kurve $\mathcal{E}$ gibt es mindestens einen Punkt, dessen Abstand vom Koordinatenursprung $(0,0)$ minimal ist.

   (a) Ermitteln Sie alle Punkte auf $\mathcal{E}$, deren Abstand zum Koordinatenursprung minimal ist. **4**

   Lösung:
$$L(x,y,\lambda) = \sqrt{x^2+y^2} + \lambda(5x^2+6xy+5y^2-16)$$
$$L_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lambda(10x+6y) \stackrel{!}{=} 0$$
$$L_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lambda(6x+10y) \stackrel{!}{=} 0$$
$$L_\lambda = 5x^2+6xy+5y^2-16 \stackrel{!}{=} 0$$
   Falls $10x+6y=0$, dann folgt $x=0$, $y=0 \Rightarrow$ Widerspruch in $L_\lambda = 0$.
   Falls $6x+10y=0$, dann folgt $y=0$, $x=0 \Rightarrow$ Widerspruch in $L_\lambda = 0$.
   $\Rightarrow \lambda = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}(10x+6y)} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(6x+10y)}$
   $\Rightarrow 6x^2+10xy = 10xy+6y^2$, also $x^2=y^2$
   Fall 1: $x=y \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 = y_{1,2} \Rightarrow P_1(1,1)$, $P_2(-1,-1)$

Fall 2: $x = -y \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2 = -y_{3,4} \Rightarrow P_3(2,-2),\ P_4(-2,2)$

Da laut Aufgabenstellung ein Minimalpunkt existiert, muss dies einer von $P_1, \ldots, P_4$ sein. Da Abstand von P_1 und P_2 zum Koordinatenursprung gleich $\sqrt{2}$ und Abstand von P_3 und P_4 zum Koordinatenursprung gleich $2\sqrt{2}$, sind P_1 und P_2 die gesuchten Minimalpunkte.

Bemerkung: Die Untersuchung der hinreichenden Optimalitätsbedingungen ist nicht notwendig.

(b) Bestimmen Sie x_0 so, dass der Punkt $P(x_0, 1)$ auf $\mathcal{E}$ liegt und $x_0 > 0$ gilt. **3**
Geben Sie eine Gleichung derjenigen Tangente an $\mathcal{E}$ an, die diesen Punkt P enthält.

Lösung: Aus $5x_0^2 + 6x_0 + 5 - 16 = 0$ $(y_0 = 1)$ und $x_0 > 0$ folgt $x_0 = 1$, also $P(1,1)$.

Mit $y'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$, $F_x(x,y) = 10x + 6y$, $F_y(x,y) = 6x + 10y$ folgt $y'(x_0) = -1$.

$\Rightarrow$ Tangente: $y(x) = 1 - 1 \cdot (x-1) = 2 - x$

3. Sei

$$K := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{9}(x-2)^2 + \frac{1}{4}y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 2\}$$

ein Körper. Die Massendichte $\varrho : K \to (0,\infty)$ von K sei durch $\varrho(x,y,z) := 1 + z$ definiert.
Weiter sei $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit

$$\underline{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 - 4x \\ y^2 \\ -2yz \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Masse von K unter Verwendung der Koordinatentransformation **3**

$$x = 2 + 3r\cos\varphi, \quad y = 2r\sin\varphi, \quad z = z\,.$$

Lösung: Mit der Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_z \\ y_r & y_\varphi & y_z \\ z_r & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\cos\varphi & -3r\sin\varphi & 0 \\ 2\sin\varphi & 2r\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6r$$

erhält man:

$$M = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{2} (1+z)6r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} (2+2)6r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 48\pi\int_{r=0}^{1} r\,\mathrm{d}r = 24\pi$$

(b) Berechnen Sie den Fluss von $\underline{F}$ durch die Oberfläche ∂K des Körpers K, d.h. **3**

$$\int_{\partial K} \underline{F}^\top \underline{\mathrm{dO}}\,.$$

(Hinweis: Die Anwendung des Integralsatzes von Gauß ist zweckmäßig.)

Lösung: Wegen $\operatorname{div}\underline{F} = 2x - 4$ erhält man durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß:

$$\int_{\partial K} \underline{F}^\top \underline{\mathrm{dO}} = \int_K \operatorname{div}(\underline{F})\mathrm{dK} = \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{2} 6r\cdot\cos\varphi\cdot 6r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \cdots = 0$$

(c) Berechnen Sie rot $\underline{F}(x,y,z)$ und div rot $\underline{F}(x,y,z)$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$\operatorname{rot}\underline{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}_x & \mathrm{e}_y & \mathrm{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-4x & y^2 & -2yz \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Weiterhin gilt stets div rot $\underline{F}(x,y,z) = 0$ für beliebiges, hinreichend glattes $\underline{F}$.

4. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_\lambda(x) := \begin{cases} 1 - \lambda \mathrm{e}^{-x} - (1-\lambda)\mathrm{e}^{-2x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $\lambda \in [0,2]$, so ist F_λ die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße X_λ.

Hinweis: Für $a \neq 0$ gilt $\int x\mathrm{e}^{ax}\mathrm{dx} = \frac{1}{a}(x - \frac{1}{a})\mathrm{e}^{ax}$.

(a) Zeigen Sie, dass F_λ für $\lambda = -1$ nicht Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße sein kann. $\boxed{1}$

Lösung: Damit F_λ Verteilungsfunktion sein kann, muss F_λ monoton wachsend (nicht fallend) sein, d.h. $F'_\lambda(x) \geq 0$ muss gelten.
$\lambda = -1$: $F'_{-1}(x) = -\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x}(4\mathrm{e}^{-x} - 1) < 0$ für hinreichend große x,
also ist F_λ für $\lambda = -1$ keine Verteilungsfunktion.

(b) Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_λ zur Zufallsgröße X_λ. $\boxed{1}$

Lösung:

$$f_\lambda(x) = F'_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-x} + 2(1-\lambda)\mathrm{e}^{-2x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X_\lambda)$. $\boxed{2}$

Lösung:

$$E(X_\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\lambda(x)\mathrm{dx} = \int_0^{\infty} x(\lambda\mathrm{e}^{-x} + 2(1-\lambda)\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{dx} = \cdots = \frac{\lambda+1}{2}$$

(d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(-1 \leq X_\lambda \leq 1)$. $\boxed{1}$

Lösung:

$$P(-1 \leq X_\lambda \leq 1) = F_\lambda(1) - F_\lambda(-1) = 1 - \lambda\mathrm{e}^{-1} - (1-\lambda)\mathrm{e}^{-2} - 0$$

5. Gegeben sei die partielle Differentialgleichung (PDGL)

$$\frac{1}{2}u_t = u_{xx}$$

mit den Randbedingungen

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad \text{für } t \geq 0$$

und der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 2 + \cos(2\pi x) \quad \text{für } x \in [0,1].$$

Aus dem Produktansatz (Separationsansatz)

$$U(x,t) = X(x)T(t)$$

erhält man durch Einsetzen in die PDGL die folgende Gestalt der Funktionen X und T:

$$X(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x), \qquad T(t) = C\mathrm{e}^{-2\lambda t}.$$

Dabei sind $\lambda \geq 0$ und $A, B, C \in \mathbb{R}$ Parameter.

(a) Bestimmen Sie alle nichtnegativen Werte des Parameters λ, so dass U auch den Randbedingungen genügt. $\boxed{3}$

Lösung: Wegen $U_x(x,t) = X'(x)T(t)$ ergeben sich die Randbedingungen $X'(0) = 0$ und $X'(1) = 0$.

$\Rightarrow X'(x) = A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - B\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) \overset{!}{=} 0$ für $x = 0$ und $x = 1$

$x = 0$: $A\sqrt{\lambda} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$ oder $\lambda = 0$.

$x = 1$: $A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}) - B\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) \overset{!}{=} 0$

Falls $\lambda = 0$, dann $X(x) = B$.

Falls $\lambda > 0$, dann $A = 0$ und $B\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) \overset{!}{=} 0$.
Für $B = 0$ folgt $X(x) = 0$ für alle x, also $B \neq 0$, und damit $\sin(\sqrt{\lambda}) \overset{!}{=} 0$.
Für $\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ ist dies erfüllt.

Insgesamt: Für $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$ erfüllt U auch die Randbedingungen.

(b) Ermitteln Sie eine Funktion u, die der PDGL, den Randbedingungen und der Anfangsbedingung genügt. $\boxed{4}$

Lösung: Entsprechend (a) gehört zu jedem $n = 0, 1, 2, \ldots$ eine Funktion $U_n := X_n T_n$ mit

$$X_n(x) := B_n \cos(n\pi x), \qquad T_n(t) := C_n e^{-2n^2\pi^2 t}.$$

Durch Linearkombination der U_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ erhält man einen Ansatz für u:

$$u(x,t) := \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos(n\pi x)\mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t} = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\pi x)\mathrm{e}^{-2n^2\pi^2 t}$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich

$$u(x,0) = D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\pi x) \overset{!}{=} 2 + \cos(2\pi x)$$

Koeffizientenvergleich liefert $D_0 = 2$, $D_2 = 1$ und $D_n = 0$ sonst, also

$$u(x,t) = 2 + \cos(2\pi x)\mathrm{e}^{-8\pi^2 t}$$