Klausur ohne Lösungswege, nur mit Angabe der Ergebnisse

Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

30. Juli 2007

Klausur Mathematik II und Klausur Mathematik III

für Fakultät Maschinenwesen — für Studiengangs Mechatronik

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________ Geburtsdatum: ______________________

Immatrikulationsjahrgang: ______________________ Studiengang: ______________________

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte Soll	**2**	**4**	**7**	**5**	**5**	**4**	**6**	**3**	**36**
Punkte Ist									

Ein Lösungsweg kann nur bewertet werden, wenn er
– deutlich erkennbar ist und
– sich auf der/den für die Aufgabe vorgesehenen Seite/Seiten befindet.

1. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, für die die folgende Reihe konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!(2+\sin x)}.$$
$\boxed{2}$

Ergebnis: Reihe konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Die Kurve K sei im (x, y)-Koordinatensystem gegeben durch

$$K := \{\, (x(t), y(t))^\top \in \mathbb{R}^2 \,|\, x(t) = t\cos t,\ y(t) = t\sin t,\ t \in [0, \pi/2]\,\}.$$

(a) Durch $\rho(t) := \sqrt{1+t^2}$ sei die Massendichte der Kurve K in $(x(t), y(t))^\top$ gegeben. Bestimmen Sie die Masse der Kurve K. $\boxed{2}$

(b) Die Kurve K schließt mit der durch $x = 0$ gegebenen Geraden eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche. $\boxed{2}$

Ergebnisse:

(a) $M = \int_{t=0}^{\pi/2} \rho(t)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{24}$

(b) $A = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{\pi/2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{48}$

3. Gegeben sei eine Stahlkugel mit dem Radius $R > 0$. Bohrt man durch diese Kugel ein Loch mit dem Querschnittsradius $a \in (0, R)$, wobei die Mittelachse des Bohrers durch den Mittelpunkt der Kugel geht, dann verbleibt ein Restkörper.

(a) Berechnen Sie das Volumen $V(a)$ des Restkörpers in Abhängigkeit von a. $\boxed{3}$

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Oberflächenstücks der Stahlkugel, durch das der Bohrer in die Stahlkugel eindringt. $\boxed{4}$

Ergebnisse:

(a) Zylinderkoordinaten
$V(a) = 2\int_{r=a}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{\sqrt{R^2-r^2}} 1\cdot r\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi(R^2-a^2)^{3/2}$

(b) Zylinderkoordinaten, Parameter sind r und ϕ
$O(a) = \int_{r=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi} |\mathbf{x}_r \times \mathbf{x}_\phi|\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = 2\pi R(R-\sqrt{R^2-a^2})$

4. Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\mathbf{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie **rot** $\mathbf{v}$ und div $\mathbf{v}$. $\boxed{1}$

(b) Berechnen Sie den Betrag des Flusses von $\mathbf{v}$ durch die Fläche

$$F := \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2=4,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq x^2y\}.$$

Ergebnisse: $\boxed{4}$

(a) **rot** $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2y \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}$, div $\mathbf{v} = 2+2z$

(b) $\left|\int\int_B \mathbf{v}(\phi,z)(\mathbf{x}_\phi\times\mathbf{x}_z)\mathrm{d}B\right| = \left|\int_{\phi=0}^{\pi}\int_{z=0}^{8\cos^2\phi\sin\phi}(4\cos^2\phi+4\sin^2\phi+0)\mathrm{d}z\mathrm{d}\phi\right| = \frac{64}{3}$

5. Betrachtet werde die partielle Differentialgleichung

$$u_{xx}+\pi^2 u = u_{tt}$$

unter den Anfangsbedingungen	$u(x,0)=3\sin(\pi x)$,	$u_t(x,0)=0$	für alle $x\in[0,1]$
und den Randbedingungen	$u(0,t)=0$,	$u(1,t)=0$	für alle $t\geq 0$.

Durch den Produktansatz $u = XT$ mit Funktionen $X : [0,1]\to\mathbb{R}$ und $T : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ erhält man die Gleichungen

$$\frac{X''}{X}+\pi^2 = -\mu^2 = \frac{T''}{T} \quad \text{mit } \mu\geq 0.$$

Die Funktion X hat dabei die Gestalt

$$X(x) = a\cos(\omega x)+b\sin(\omega x) \quad \text{mit} \quad \omega := \sqrt{\pi^2+\mu^2},$$

wobei a, b reelle Paramter sind.

(a) Ermitteln Sie alle Werte von μ, so dass X den Randbedingungen genügt und nicht die Nullfunktion ist. $\boxed{2}$

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $T''+\mu^2T=0$ für alle $\mu\geq 0$. $\boxed{1}$

(c) Ermitteln Sie eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, die den Anfangs- und Randbedingungen genügt. $\boxed{2}$

Ergebnisse:

(a) $\mu_k^2 = \omega_k^2-\pi^2 = (k^2-1)\pi^2$, $k=1,2,\ldots$ bzw. $\mu_1^2=0$, $\mu_2^2=3\pi^2$, $\mu_3^2=8\pi^2$, $\ldots$

(b) $T(t) = a\cos(\mu t)+b\sin(\mu t)$, $\quad a,b\in\mathbb{R}$

(c) $u(x,t) = 3\sin(\pi x)$.

6. Die partielle Differentialgleichung

$$u_x - 2u_y = 2xy(y-2x) \tag{1}$$

wird durch die Transformation

$$u(x,y) = z(r(x,y), s(x,y)) \quad \text{mit } r(x,y) := xy,\ s(x,y) := 2x + y$$

in die partielle Differentialgleichung

$$z_r = 2r$$

für z als Funktion von (r,s) überführt.

(a) Weisen Sie dies nach. $\boxed{2}$

(b) Ermitteln Sie eine Lösung u von (1), die der Bedingung $u(x,-x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genügt. $\boxed{2}$

Ergebnisse:

(a) $u_x = z_r \cdot r_x + z_s \cdot s_x = z_r \cdot y + z_s \cdot 2$, $u_y = z_r \cdot r_y + z_s \cdot s_y = z_r \cdot x + z_s \cdot 1$
$\Rightarrow \quad u_x - 2u_y = z_r \cdot (y-2x) = 2xy(y-2x) \quad \Rightarrow \quad z_r = 2r$

(b) $z(r,s) = r^2 + f(s)$ mit bel. Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad u(x,y) = (xy)^2 - (2x+y)^4$.

7. **(a)** Ermitteln Sie, für welche reellen Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} b + a\cos x & \text{für } 0 \le x \le 2\pi, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Dichtefunktion ist. $\boxed{2}$

(b) Eine Menge enthalte N Elemente, von denen eine bestimmte Anzahl markiert ist. Dieser Menge werden n Elemente zufällig entnommen. Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der markierten Elemente unter den n entnommenen Elementen.

(b.1) Die Menge bestehe aus 50 Elementen, von denen 10 markiert sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 3 zufällig entnommenen Elementen genau ein Element markiert ist? $\boxed{1}$

(b.2) Es sei N sehr groß und die Hälfte aller N Elemente der Menge seien markiert. Es sei $n = 5$. Bestimmen Sie Näherungswerte für die Wahrscheinlichkeiten $P(X \le 1)$ und $P(X \ge 2 | X > 0)$. $\boxed{3}$

Ergbebnisse:

(a) $b = \frac{1}{2\pi}$, $a \in [-b, b]$ bzw. $-\frac{1}{2\pi} \le a \le \frac{1}{2\pi}$.

(b.1) hypergeometrische Verteilung mit $N = 50$, $M = 10$, $n = 3$, $P(X = 1) = \frac{39}{98}$

(b.2) Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = 0.5$, $P(X \le 1) = \frac{3}{16}$ $P(X \ge 2 | X > 0) = \frac{26}{31}$

8. Das Gewicht S von Schrauben einer bestimmten Sorte ist eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu_S = 9$g und Streuung $\sigma_S^2 = 0.16\text{g}^2$. Das Gewicht M der zugehörigen Muttern ist ebenfalls normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_M = 4$g und der Streuung $\sigma_M^2 = 0.09\text{g}^2$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) eine Schraube mehr als 9.2g wiegt, $\boxed{1}$

(b) 100 Schrauben nicht mehr als 908g wiegen, $\boxed{1}$

(c) eine Schraube mit einer Mutter zusammen höchstens 12.75g wiegt. $\boxed{1}$

Ergebnisse:

(a) S ... Gewicht einer Schraube, $S \in N(9, 0.16) : P(S > 9.2) = 0.30854$

(b) Y ... Gewicht von 100 Schrauben, $Y = \sum_{i=1}^{100} S_i \in N(900, 16) : P(Y \leq 908) = 0.97725$

(c) M ... Gewicht einer Mutter, $M \in N(4, 0.0.9)$, Z ... Gewicht einer Schraube mit Mutter, $Z = S + M \in N(13, 0.25) : P(Z \leq 12.75) = 0.30854$