Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

16. Februar 2012

Aufgaben der Klausur Mathematik III

für Studierende des Studiengangs Verkehrsingenieurwesen, Dauer 120 Minuten

1. a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0, \pi), \\ t - \pi & \text{für } t \in [\pi, \infty). \end{cases}$$ $\boxed{2}$

b) Lösen sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Anfangswertaufgabe:

$$y''(x) + 4y(x) = 4, \qquad y(0) = y'(0) = 1$$ $\boxed{3}$

2. Gegeben seien $\mathcal{B} := \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$ und der Körper

$$\mathcal{K} := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y)^\top \in \mathcal{B},\ 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

a) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{B}$ im x, y-Koordinatensystem. $\boxed{1}$

b) Zur Berechnung des Volumens von $\mathcal{K}$ kann das Dreifachintegral $\iiint\limits_{\mathcal{K}} \mathrm{d}V$ verwendet werden. Geben Sie die dazu erforderlichen Grenzen jeweils in

b1) kartesischen Koordinaten x, y,

b2) Zylinderkoordinaten r, φ und

b3) verschobenen Zylinderkoordinaten r, φ mit $x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

an. $\boxed{4}$

3. Gegeben seien das Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $\mathbf{v}(x, y, z) := (xy^2, yz^2, zx^2)^\top$. Weiter bezeichne ∂V die Oberfläche des Körpers

$$V := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

a) Ermitteln Sie, ob $\mathbf{v}$ ein Potentialfeld ist. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie den Wert des Kurvenintegrals $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dw}$ für die Kurve $\mathcal{C} := \{(t^2, 0, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, t \in [0, 1]\}$. $\boxed{3}$

c) Berechnen Sie $\displaystyle\iint\limits_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO}$ mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes. $\boxed{3}$

4. a) Es sei $\mathbf{X}$ eine diskrete Zufallsgröße, die die reellen Werte x_1, x_2 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annimmt sowie Erwartungswert 1 und Varianz 4 besitzt. Ermitteln Sie diese beiden reellen Werte. $\boxed{2}$

b) Sei (Ω, Σ, P) ein Maßraum. Für die paarweise unvereinbaren Ereignisse $A_1, A_2, A_3 \in \Sigma$ sei bekannt, dass

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = \frac{1}{3}, \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{3} A_i = \Omega.$$

Bestimmen Sie $P(A_3)$. $\boxed{1}$

c) Es sei $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ein diskreter Zufallsvektor, der nur die drei Paare $(0,1)$, $(2,0)$, $(2,2)$ mit der Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{3}$ annimmt. Zeigen Sie, dass $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ unabhängig sind. $\boxed{1}$

5. Für die Parameter $a \in [0, \infty)$ und $b \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} a + b\sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Begründen Sie, dass $f_{a,b}$ nicht Dichtefunktion einer Zufallsgröße sein kann, wenn $b < -\frac{1}{2}a$ gilt. $\boxed{1}$

b) Sei $a = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie b so, dass $f_{a,b}$ dann Dichtefunktion einer Zufallsgröße ist. $\boxed{1}$

Im Folgenden bezeichne $\mathbf{X}$ eine stetige Zufallsgröße mit $f_{a,b}$ als Dichtefunktion.

c) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion $F_{a,b} : \mathbb{R} \to [0,1]$ der Zufallsgröße $\mathbf{X}$. $\boxed{1}$

d) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(\mathbf{X})$ für den Fall $(a,b) = (0, \frac{3}{16})$. $\boxed{1}$

6. Bei der Produktion von Rohren wird angenommen, dass deren Durchmesser $\mathbf{X}$ eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert $\mu = 2$ dm und Standardabweichung $\sigma = 0.05$ dm ist.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Durchmesser eines Rohres größer als 2.05 dm ist. $\boxed{2}$

b) Ermitteln Sie das kleinste $\Delta > 0$, so dass höchstens 5% der produzierten Rohre bzgl. ihres Durchmessers außerhalb des Toleranzbereiches $[\mu - \Delta, \mu + \Delta]$ liegen. $\boxed{3}$