Technische Universität Dresden
Institut für Numerische Mathematik
Prof. Dr. A. Fischer

11. Februar 2004

Testat Mathematik II/1

für Studierende der Fakultät Maschinenwesen und des Studiengangs Mechatronik

Lösungsvorschlag

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2y^2 - x^2}{2x^2 + y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a) Berechnen Sie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, wenn sich (x,y) entlang der x-Achse ($x \neq 0$) bewegt. ①

$y = 0$: $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, wenn sich (x,y) entlang der y-Achse ($y \neq 0$) bewegt. ①

$x = 0$: $\quad \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{2y^2}{y^2} = 2$

c) Ist die Funktion f stetig? ◯ ja ⊗ nein ①

Begründung: $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$

2. Gegeben seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x,y,z) := \sqrt{y^2 + \sin^2 z + 5} \qquad \text{und} \qquad F(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 \\ -2xy \\ y^2 z^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\nabla f(x,y,z)$. ①

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{y}{\sqrt{y^2+\sin^2 z+5}} \\ \frac{\sin z \cos z}{\sqrt{y^2+\sin^2 z+5}} \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie rot $F(x,y,z)$. ①

$$\text{rot}\, F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -2xy & y^2 z^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2yz^2 \\ 0 \\ -2y \end{pmatrix}$$

c) Berechnen Sie div $F(x,y,z)$. ①

$$\text{div}\, F(x,y,z) = 2x - 2x + 2y^2 z = 2y^2 z$$

3. Welche der nachfolgenden zusammengesetzten Ausdrücke sind definiert, wenn die Funktionen $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beliebig oft stetig differenzierbar sind? ①

	definiert	nicht definiert
$\nabla(\mathrm{rot}(\mathrm{div}\, W))$	◯	⊗
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\nabla u))$	⊗	◯
$\nabla(\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, W))$	⊗	◯

Die richtige Antwort ist jeweils anzukreuzen. Begründungen sind dabei nicht erforderlich.

4. Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y) := \mathrm{e}^x \cdot \sin y + y^2$$

und die Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ durch die Gleichung $z = f(x, y)$, d.h., $\mathcal{F} = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x, y)\}$. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangentialebene an $\mathcal{F}$, die die Fläche $\mathcal{F}$ in $(0, \frac{\pi}{2}, z_0)^\top$ berührt. ②

$$z_0 = f(0, \frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi^2}{4}$$

$$f_x(x, y) = \mathrm{e}^x \cdot \sin y \Longrightarrow f_x(0, \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$f_y(x, y) := \mathrm{e}^x \cdot \cos y + 2y \Longrightarrow f_y(0, \frac{\pi}{2}) = \pi$$

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 1 + \frac{\pi^2}{4} + x + \pi(y - \frac{\pi}{2})$$

oder $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \\ 1 + \pi^2/4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$

5. Gegeben sei die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x, y) := x^3 - x^2 y + y^4 - 15.$$

Durch $F(x, y) = 0$ ist eine Funktion $y(x)$ in der Umgebung von $(x_0, y_0) := (1, 2)$ implizit gegeben.

a) Ermitteln Sie $y'(x_0)$. ①

$$F_x(x, y) = 3x^2 - 2xy, \quad F_x(x_0, y_0) = -1$$

$$F_y(x, y) = -x^2 + 4y^3, \quad F_y(x_0, y_0) = 31$$

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = \frac{1}{31}$$

b) Ermitteln Sie die Tangente $y_T(x)$ an den Graphen von $y(x)$ im Punkt (x_0, y_0). ①

$$y_T(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = 2 + \frac{1}{31}(x - 1)$$

6. Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar mit den partiellen Ableitungen g_a und g_b. Die Funktion $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$z(x, y) := g(x^2 + y, 3x - y)$$

gegeben. Ermitteln Sie die partielle Ableitung z_x. ①

$z_x(x,y) = g_a(x^2+y, 3x-y)\cdot 2x + g_b(x^2+y, 3x-y)\cdot 3 = 2xg_a + 3g_b$

7. Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$f(x,y) := x^4 - 8x^2 + y^2 - 6y \to \min\,.$$

Bestimmen Sie alle Punkte (x,y), die die notwendige Optimalitätsbedingung 1. Ordnung erfüllen. 2

$f_x = 4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ oder $x = \pm 2$

$f_y = 2y - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = 3$

$\Rightarrow$ gesuchte Punkte: $(0,3),\ (2,3),\ (-2,3)$

8. Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$x^2 y \to \min \quad \text{bei} \quad x^2 + 4y^2 - 1 = 0.$$

Geben Sie die zugehörige Lagrange-Funktion an und ermitteln Sie damit alle Punkte (x,y), die die notwendige Optimalitätsbedingung 1. Ordnung erfüllen. 4

$L(x,y,u) = x^2 y + u(x^2 + 4y^2 - 1)$

$L_x = 2x(y+u) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ oder $u = -y$

$L_y = x^2 + 8uy = 0$

$L_u = x^2 + 4y^2 - 1 = 0$

$x = 0: \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{4},\ u = 0$, d.h. 2 Punkte

$u = -y$: $\quad \Rightarrow \quad x^2 = 8y^2 = 1 - 4y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{12}$, d.h. weitere 4 Punkte 0

gesuchte 6 Punkte: $(0, \pm\frac{1}{2}),\ (\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{12}}),\ (-\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{12}}),$

9. Integrieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := xy$ über dem Gebiet 2

$$G := \{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \le x,\ y \ge 0,\ y \le 2 - x\}.$$

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=y}^{2-y} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{oder} \qquad \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{x=1}^{2} \int_{y=0}^{2-x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_{y=0}^{1} (y^3 - 4y^2 + 4y - y^3)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(-\frac{4}{3}y^3 + 2y^2)|_{y=0}^{1} = \frac{1}{3}$$

10. Gegeben seien die Halbkugel H und der (unendliche) Zylinder Z durch

$$H := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}, \qquad Z := \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Körpers $H \cap Z$, also das Volumen des Durchschnitts von H und Z. ②

Zylinderkoordinaten:
$H \cap Z$: $\quad 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}$

$$V = \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r \,\mathsf{d}z \,\mathsf{d}\varphi \,\mathsf{d}r$$

$$= 2\pi \int\limits_{r=0}^{1} r\sqrt{4 - r^2} \mathsf{d}r = -2\pi \frac{1}{3} (\sqrt{4 - r^2})^3 \Big|_{r=0}^{1} = -\frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3} - 8) = \frac{2}{3}\pi(8 - 3\sqrt{3})$$