Der mathematische Raumbegriff – eine Brücke zwischen Theorie und Praxis

Thomas Riedrich, 2002

Meinen verehrten Lehrern, den Professoren

MAX LANDSBERG – KARL MARUHN – PAUL HEINZ MUELLER,

in Dankbarkeit gewidmet.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Skizze wird versucht, die historisch entstandene Raumauffassung in der Mathematik anhand der im 20. Jahrhundert stattgefundenen Entwicklung der Theorie topologischer Räume und unendlichdimensionaler (topologischer) Vektorräume zu beschreiben. Wir gehen auf einzelne Raum-Typen und ihre Anwendungen näher ein, im Vordergrund stehen Banachräume und Hilberträume. Denn mittels dieser Räume (in ihren zahlreichen Erscheinungsformen, z. B. als Sobolev-Räume) war eine durchgreifende „Geometrisierung der Analysis" erst möglich, die seit D. HILBERT (1862 – 1943) und seiner Integralgleichungstheorie, verstanden als Geometrie in einem Raum mit unendlich vielen Koordinaten, so beachtliche Erfolge erbrachte. Mit S. BANACH (1892 – 1945) wurde diese Auffassung durchgängig in Gestalt der nach im benannten Banachräume.

Abstract

We give a free scetch of the historically founded mathematical space concept along the line of development during the 20. century of the theory of topological, especially metric spaces and infinite-dimensional (topological) vector spaces. We describe some classes of spaces and their applications, most important are Banach spaces and Hilbert spaces. Just theses spaces (with their numerous realisations as e.g. Sobolev spaces) gave the possibility to "geometrize parts of analysis", which method since the days of D. HILBERT (1862-1943) and his theory of integral equations interpreted as geometry in a space of infinite many coordinates, was so very effective. Thouroughly realized by S. BANACH (1862-1945) in form of theory and applications of linear operators in called after him Banach spaces is this standpoint fruitful up to our time.

Einleitung

,,Im Raume zwei Geraden streiten, ob sie sich kriegen oder meiden.
Ein Ingenieur ist da zur Stelle und unterscheidet klar vier Fälle:
Wenn ihre Richtungen verschieden, so sind zwei Fälle anzubieten:
Der Abstand etwa mal verschwindet, man sich in einem Punkte findet;
doch wenn der Abstand nicht null misst, man windschief auseinander ist.
Ist gleiche Richtung nun vorhanden, sind's auch zwei Fälle, die bekannten:
Der Abstand null, da sind sie eins; sonst parallel die beiden seins.''
(Wolfgang Pietzsch: *Das Geradenduo*)

Bereits der griechische Mathematiker und Geograph ERATOSTHENES von Kyrene (≈ 276 – 194 v. Chr.) wusste sich den ,,Streit der Geraden'' im Raum zunutze zu machen und führte die erste (historisch dokumentierte) näherungsweise Bestimmung des Erdumfangs durch. (Er maß den Winkel zwischen der Vertikalen und der Geraden in Richtung Sonne in Alexandria in Ägypten mittags zur Sommersonnenwende. Ihm war bekannt, dass zur gleichen Zeit die Sonne genau senkrecht über dem auf etwa dem gleichen Meridian liegenden Syene = Assuan steht. Mittels des Wertes der Entfernung Alexandria-Syene wurde die Schätzung des Erdumfangs möglich.)
Wir sehen also, dass von dem, was im realen (dreidimensionalen) Raum geschieht, ein klares Bild erforderlich ist. Extreme Fälle solcher ,,Bilder'' sind möglich: ist diese Pflanze nicht eine gerade aufgeblühte Lilie? – Nein, sie ist nur aus Glas (s. [1]). Ist jene Graphik nicht ein Kandinsky oder vielleicht ein Klee? – Nein, es ist nur eine Rasierklinge – unter dem Elektronenmikroskop (s. [2]).

Es ist eine Tatsache, dass die mathematische Abstraktion mit ihrem Raumbegriff selbst solche Feinstrukturen der Technik bzw. der Realität weit hinter sich lässt und zur nicht mehr weiter auflösbaren unendlichen Verfeinerung vordringt. Daher sind allein die Hilfsmittel der Logik als ,,Werkzeuge'' zur Arbeit im mathematischen Räumen zugelassen. Der Vorteil: beliebige Anwendungs-Situationen können mathematisch klar erfasst und sauber quantifiziert werden mit dem erheblichen Nutzen der genauen Einsicht anstelle des blinden Empirismus. Der Nachteil: Jede mathematische Modellierung bleibt eine approximierende Näherung; sie gilt stets unter Vorbehalt, bis eine bessere Approximation erzielt wird (das wichtigste

Beispiel dazu: die Aufhebung der klassischen NEWTON'schen Mechanik durch die EINSTEIN'sche Relativitätstheorie).
In unserem Beitrag gehen wir auf Aspekte des mathematischen Raumbegriffs ein, die sich vor allem im Laufe des 20. Jahrhunderts entwickelt haben: die Nützlichkeit unendlichdimensionaler Räume und die Klärung des Dimensionsbegriffs.
Die zentrale Stellung, die die Geometrie der Ebene und des (3-dimensionalen) Raumes einnehmen, finden wir von dazu berufeneren Autoren in einem herausragenden Werk ([3]) beschrieben, in dem über ,,5000 Jahre Geometrie'' Rechenschaft abgelegt wird.

1 Räume

Ein Raum bezeichnet innerhalb einer mathematischen Beschreibung eine geeignet gewählte Menge von Elementen mit einer gemeinsamen Eigenschaft (z. B. eine stetige Funktion zu sein), zwischen denen ganz bestimmte algebraische bzw. topologische Beziehungen bestehen. Die Natur dieser Elemente des betrachteten Raumes kann jeweils vollkommen unterschiedlich sein. So gibt es Räume von Zahlen, Vektoren, Funktionen, Maßen, Matrizen, Operatoren, von Systemen von Vektoren, Funktionen, Maßen, Matrizen, Operatoren usw.

Für die Anwendungen habe sich im 20. Jahrhundert vor allem lineare Räume oder Vektorräume als nützlich erwiesen. Auf diese wollen wir daher vorrangig eingehen. *Es zeigte sich stets, dass ein gestelltes Problem, die Methode zu seiner Lösung und die Wahl des zu benutzenden Raumes in außerordentlich engem Zusammenhang stehen.*
Wir möchten im Folgenden zunächst einige wesentliche Raumtypen vorstellen. Untrennbar verbunden mit den jeweiligen Raumklassen sind stets die Abbildungen, die zwischen Räumen ein und derselben Klasse existieren, insbesondere die jeweiligen strukturerhaltenden Isomorphismen (umkehrbar eindeutige Abbildungen, die in beiden Richtungen strukturverträglich sind).

1.1 Topologische Räume

Grundlage für die Topologie ist der Umgebungsbegriff. (s. [4], [5]). Für jeden Punkt einer gegebenen nicht leeren Menge X sind gewisse nichtleere Teilmengen von X, die *Umgebungen* des betrachteten Punktes, ausgezeichnet. Sie müssen die folgenden Forderungen erfüllen:

- der betrachtete Punkt liegt in jeder seiner Umgebungen,
- der Durchschnitt zweier Umgebungen ist wieder eine Umgebung (des betrachteten Punktes),
- jede Obermenge einer Umgebung ist ebenfalls eine Umgebung (des betrachteten Punktes),
- jede Umgebung eines Punktes enthält eine Umgebung dieses Punktes für die sie Umgebung aller derer Punkte ist.

Eine Teilmenge von X heißt offen, wenn sie mit jedem ihrer Punkte auch eine volle Umgebung dieses Punktes enthält. Das System aller offenen Mengen bildet dann eine auf X erklärte Topologie τ. Das Paar (X, τ) heißt ein topologischer Raum (F. HAUSDORFF 1914). Als Beispiel nennen wir die im nächsten Punkt auftretenden metrischen Räume. Für die topologischen Räume sind die strukturerhaltenden Isomorphismen die sog. Homöomorphismen. Das sind umkehrbar eindeutige Abbildungen eines topologischen Raumes auf einen anderen, bei denen die Systeme der offenen Mengen ineinander überführt werden. Zum Beispiel sind (Voll-) Kreis und Quadat zueinander homöomorph, eine Kreislinie und eine Strecke jedoch nicht. Auf einer beliebigen Teilmenge eines topologischen Raumes führt man eine Topologie einfach mittels Durchschnittsbildung der Teilmenge mit den bereits vorhandenen Umgebungen bzw. offenen Mengen ein und erhält so den Begriff des *Teilraumes.* Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt abgeschlossen, wenn ihre Komplementärmenge zu diesem Raum eine offene Menge ist. Eine (abgeschlossene) Menge heißt kompakt, wenn für jedes System offener Mengen, das sie überdeckt, bereits ein endliches überdeckendes Teil-System existiert.

1.2 Metrische Räume

Unter einem metrischen Raum (M. FRÈCHET 1906) versteht man eine Menge X, in der je zwei Elementen x,y (aus X) eine nichtnegative Zahl d(x,y), ihr *Abstand,* zugeordnet ist, wobei die folgenden Forderungen (Axiome) erhoben werden:

- es gilt d(x,y)=0 genau für x=y
- für alle x,y,z (aus X) gilt die Ungleichung (Dreiecks-Ungleichung)

  d(x,y)Pd(x,z)+d(z,y)
- d(x,y) = d(x,y) (Symmetrie)

Diese Forderungen sind einerseits allgemein genug, um die unterschiedlichsten Anwendungssituationen erfassen zu können, aber andererseits speziell genug, um das Wesentliche eines Abstandsbegriffs widerzuspiegeln. Stellen wir uns etwa d(x,y) als die übliche Entfernung zweier Punkte x,y in der Ebene vor, so sind die genannten Eigenschaften unmittelbar ersichtlich. Die strukturerhaltenden Abbildungen sind hier die Isometrien. Eine Abbildung eines metrischen Raumes auf einen anderen heißt eine *Isometrie*, wenn dabei alle Abstände erhalten bleiben: der Abstand zwischen zwei Originalpunkten ist stets genau so groß wie der Abstand der zugehörigen Bildpunkte. Zwei isometrische metrische Räume gleichen einander wie eine Xerox-Kopie der anderen vom gleichen Original. Die Topologie eines metrischen Raumes bekommt man mittels der (speziellen) „Kugelumgebungen“: alle Punkte, die von einem festen Punkt einen Abstand haben, der kleiner ist als eine gegebene Zahl $\delta>0$, bilden eine (offene) δ-Kugelumgebung dieses Punktes. Als Umgebung generell erklärt man jede Menge, die eine δ-Kugelumgebung dieses Punktes enthält. Damit wird jeder metrische Raum ein topologischer Raum. Die umgekehrte Fragestellung: "Wann lässt sich eine gegebene Topologie aus einer Metrik erzeugen?" ist das sogenannte Metrisationsproblem (s.[6]). Es wurde endgültig 1950/51 von J. NAGATA, R. H. BING und Y. M. SMIRNOV geklärt. Die Verbindung der Theorie metrischer Räume zur Geometrie wird durch die sog. „Innere Geometrie der metrischen Räume“ hergestellt (s. [7]). Ein enorm wichtiger Zweig der Theorie metrischer Räume sind die RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten (und allgemeiner die differenzierbaren Mannigfaltigkeiten).

Die Metrik wird hierbei über eine lokale Längenmessung eingeführt. Damit sind die Riemannschen Mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen ideale Modellierungsräume für physikalische und technische Anwendungen (spezielle und vor allem die allgemeine Relativitätstheorie; Elastizitätstheorie; allgemeiner: Mechanik der Kontinua, also speziell auch Hydromechanik sowie allgemeine Feldtheorie). Zur (inneren) Metrik gelangt man auf einer R. M. durch die größte untere Schranke der Bogenlängen (mittels des lokalen Längendifferentials berechenbar!) aller möglichen glatten Kurven, die zwei gegebene feste Punkte verbinden. Die einschlägigen Isomorphismen in der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten sind die sog. *Diffeomorphismen* ([8]), es sind Homöomorphismen (einer d. M. auf eine andere), die gleichzeitig die Differenzierbarkeitsstruktur erhalten und gewissermaßen nur „verpflanzen“. J. MILNOR entdeckte 1956, dass es d. M. gibt, die homöomorph (also topologisch gleichwertig), aber *nicht* diffeomorph sind und eröffnete damit das Gebiet der *Differentialtopologie.* Wie man Mannigfaltigkeiten (Kartensysteme!) für ganz praktische Aufgaben einsetzt, wird in sehr anschaulicher Weise in einem Grundsatz-Artikel von H. NEUNZERT ([9]) beschrieben.

1.3 Lineare Räume (Vektorräume)

Unter einem linearen Raum oder *Vektorraum* versteht man eine Menge E von Elementen f,g,h,..., für die die Rechenoperationen der Addition f+g und der Multiplikation cf der Elemente f mit Zahlen c (reell bzw. komplex) erklärt sind, welche die üblichen Rechenregeln der Addition von Vektoren bzw. der Multiplikation von Vektoren mit Zahlen erfüllen. Eine Teilmenge eines Vektorraumes heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Elementen (Vektoren) auch ihre gesamte Verbindungsstrecke enthält. (Beispiel: Kreisscheibe, Gegenbeispiel: Kreislinie)

1.4 Topologische Vektorräume

Hier werden nun die topologischen Strukturen mit den Vektorraumstrukturen gemischt und zwar so, dass beide miteinander verträglich sind (in einem näher zu definierenden Sinne). Der Begriff des topologischen Vektorraumes geht auf J.v. NEUMANN und A.N. KOLMOGOROV 1934/35 zurück. Wir nennen einige Spezialfälle.

1.4.1 Normierte Räume. Banachräume

Der entscheidende Fortschritt bei der „Geometrisierung der Analysis", wie sie durch D. HILBERT zu Anfang des 20. Jahrhunderts für die Theorie der linearen Integralgleichungen im Rahmen einer „Analysis der unendlich vielen Variablen" durchgeführt wurde, war die Einführung so einfacher geometrischer Begriffe wie Länge (eines Vektors), Winkel (zwischen zwei Vektoren, die beide nicht Null sind): insbesondere die Beziehung der Orthogonalität in unendlich-dimensionalen Vektorräumen. S. BANACH führte in seiner Dissertation 1922, die heute nach ihm benannten Räume ein und vereinfachte gleichzeitig die Mechanismen, die seine Vorläufer erfolgreich benutzt hatten. Zunächst einige Begriffe.

Ein *normierter Raum* ist einfach ein Vektorraum mit einem Längenbegriff, der *Norm*: $||x||$. Dabei wird gefordert: $||x||>0$ genau für $x\neq 0$, ferner $||\lambda x||=|\lambda|\ ||x||$ für alle x und alle Zahlenfaktoren λ, und schließlich $||x+y||\leq||x||+||y||$ für alle x,y, die sog. Dreiecksungleichung. Mittels $d(x,y)=||x-y||$ wird in jedem normierten Raum eine Metrik eingeführt. Eine Teilmenge M eines normierten bzw. metrischen Raumes heißt *beschränkt*, wenn die Abstände d(x,y) mit x aus M und y aus M eine feste positive Zahl nicht übertreffen, die kleinste dieser Zahlen nennen wir den *Durchmesser* von M: diam M.

Ein normierter Raum heißt *vollständig* oder: ein *Banachraum,* wenn jede Folge (x_n), für die die Längen $||x_n-x_m||$ kleiner sind als eine (jede) Genauigkeitsschranke $\varepsilon>0$, wenn nur n und m hinreichend groß sind, auch ein Grenzelement besitzt.
Jeder normierte Raum lässt sich ohne Änderung der Norm so in einen ihn enthaltenden Banachraum einlagern, dass alle Elemente des (größeren) Banachraumes dann Grenzelemente von Folgen des gegebenen normierten Raumes sind (Konstruktion der sog. *Vervollständigung*, vergleichbar dem Übergang von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen). Jeder metrische Raum lässt sich als Teilmenge eines normierten Raumes auffassen. Das einfachste Beispiel eines Banachraumes ist der dreidimensionale Vektorraum R^3 mit der euklidischen Norm (bzw. Metrik):
Ist $\underline{x}=[x_1,x_2,x_3]^T$ (x_k reell), so sei die Norm gegeben durch

$$|| \underline{x} || =[x_1^2+x_2^2+x_3^2]^{1/2}$$

(entsprechend definiert man den *n*-dimensionalen euklidischen Raum R^n).

1.4.2 Hilberträume

Die Hilberträume sind spezielle Banachräume, sie beruhen auf der Einführung eines *Skalarprodukts* und dieses ermöglicht außer der Messung von Längen zusätzlich noch die Festlegung von Winkeln zwischen Vektoren (Einführung des allgemeinen Hilbertraumbegriffs 1929 durch J. von NEUMANN). Das Skalarprodukt zweier Vektoren: (x,y), ist linear bezüglich x bei festem y und umgekehrt (wir betrachten hier nur den reellen Fall), es ist vertauschbar und positiv definit, d. h., (x,x)>0 genau für $x\cong0$.
Die Norm wird dann durch die allgemeine Beziehung

$$|| x || =(x,x)^{1/2}$$

definiert. Zwei Vektoren x,y, die beide nicht Null sind, heißen *orthogonal,* wenn (x,y)=0 gilt, also ihr Skalarprodukt verschwindet. In den Anwendungen betrachtet man (fast ausschließlich) solche Hilberträume, in denen es sogenannte vollständige Systeme $e_1,e_2, ..., e_n, ...,$ von paarweise zueinander orthogonalen Vektoren e_k gibt, die alle die Norm 1 haben (sog. vollständige Orthonormalsysteme).

Gibt es ein solches System, kann man jeden Vektor x des Raumes in eine *Orthogonalreihe*

$$x = \Sigma_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

entwickeln; die Entwicklungskoeffizienten $c_k=(x,e_k)$ heißen auch die (verallgemeinerten) Fourierkoeffizienten. Es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\| x \|^2 = \Sigma_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Man kann die c_k also auch als die *Koordinaten von x* (bezüglich der Achsen e_k) auffassen. Ist x ein normiertes Element, so gilt $\| x \|^2 =1$ und daher

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 =1.$$

Die Größen $|c_k|^2$ können in diesem Fall auch als Wahrscheinlichkeiten für gewisse Ereignisse interpretiert werden. Genau das ist die Situation in der klassischen Quantenmechanik: der (normierte) Vektor x beschreibt den *Zustand*, die gewisse Energieniveaus E_k besitzen, die ihrerseits Eigenwerte der zugehörigen Schrödinger-Gleichung sind. Bei einer Energie-Messung findet man dann mit der Wahrscheinlichkeit $|c_k|^2$ die Energie E_k ([10]). Der zugehörige Hilbertraum ist in diesem Fall häufig ein Raum vom Typ L^2 (LEBESGUE-Raum), der im einfachsten Fall aus allen quadratisch LEBESGUE-integrierbaren Funktionen besteht, die auf der gesamten reellen Achse erklärt sind (bezüglich des LEBESGUE-Integrals verweisen wir auf [10, S.28]).

Eine ganz andere Art des Einsatzes von Hilberträumen finden wir in der Numerischen Mathematik, z. B. bei der sog. Finite-Elemente-Methode (FEM). Das gestellte Problem, z.B. eine Randwertaufgabe für eine elliptische Differentialgleichung, wird als ein sog. *Variationsproblem* (Extremwertaufgabe) formuliert und durch ein endlichdimensionales Ersatzproblem angenähert. Wesentlich sind nun Abschätzungen der Norm der Differenz zwischen exakter Lösung und Näherungslösung (vergl. [11]). Hier werden insbesondere Hilberträume benutzt, die gleichzeitig sog. Sobolevräume sind (S.L. SOBOLEV 1908-1989), z.B. für ein beschränktes Gebiet Ω des R^n der Raum $H^1(\Omega)$, der aus allen (Lebesgue-)quadratisch integrierbaren Funktionen besteht, die eine (Lebesgue-)quadratisch integrierbare verallgemeinerte Ableitung (oder sog. Distributionsableitung) besitzen (s. [10, S.90]). Frühzeitige Ansätze von E.I. TREFFTZ (1888-1937) in dieser Richtung (s. [12]) konnten zufolge der Vermeidung des Lebesgue-Integrals noch keinen durchgreifenden Erfolg bringen.

Die Abhängigkeit der verschiedenen Raumtypen (mit Beispielen) zeigt der folgende Raum-Graph (Bild 1), den wir aus [10, S.6] entlehnen.

3 Dimension

Eine der wichtigsten „Kennzahlen“ eines Raumes ist seine Dimension. Sie dient zum Vergleichen verschiedener Räume und – in der Theorie und Praxis dynamischer Systeme – zur näheren Charakterisierung von invarianten Mengen, speziell von Attraktoren. Sie klärt die Frage, mit wie viel Parametern (Variablen, Größen) eine interessierende Menge beschrieben werden kann.

Hier interessieren uns die topologische Dimension (s. 3.1) und die HAUSDORFF-Dimension (s. 3.2), also die Feststellung der Dimension auch sehr „zerzauster“ (fraktaler) Mengen (mit einer im allg. nicht ganzzahligen Dimension).

3.1 Die topologische Dimension

Wie üblich beschränken wir uns hierbei auf kompakte metrische Räume. Einfache geometrische Überlegungen, wie z.B. die genaue Betrachtung eines Parkett-fußbodens (als zweidimensionales Gebilde aufgefasst) mit gegeneinander versetzten Zeilen von Parkettziegeln führen auf die folgenden Definitionen.

Gegeben sei eine *Überdeckung* von X durch ein System offener Mengen: X ist enthalten in der Vereinigungsmenge aller Mengen eines Mengensystems. Die sog. *Ordnung* dieser Überdeckung ist eine ganze Zahl m größer gleich 1 (bzw. ∞), wenn es keinen Punkt von X gibt, der zu mehr als m Elementen (Mengen) der Überdeckung gehört, aber es mindestens einen Punkt von X gibt, der zu genau m Elementen (Mengen) der Überdeckung gehört (bzw. es ein solches m nicht gibt). Die *Dimension von X* ist nun die kleinste nicht negative *ganze* Zahl n mit der Eigenschaft, dass es zu *jedem* $\varepsilon>0$ (Kleinheitsmaß) eine Überdeckung von X mit offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen mit einem Durchmesser kleiner oder gleich ε gibt, deren Ordnung gleich (n+1) ist, bzw. sie (die Dimension) ist gleich ∞. Bei dieser Definition behalten die bekannten geometrischen Gebilde ihre bisherigen Dimensionswerte: ein Würfel hat die Dimension 3. K. MENGER UND G. NÖBELING zeigten 1926, dass ein kompakter metrischer Raum, der die Dimension n hat, stets als eine Teilmenge des euklidischen Raumes R^k mit k = 2n+1 aufgefasst werden kann. (Diese Zahl 2n+1 kann allgemein durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.) Es ist bemerkenswert, dass es ein analoges Resultat (H. WHITNEY 1944) auch für n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die sich also lokal wie der R^n verhalten, gibt: sie lassen sich stets (diffeomorph) in einen R^{2n} einbetten.

3.2 Die HAUSDORFF-Dimension

Im Jahre 1919 erschien die Veröffentlichung [13] von Felix HAUSDORFF und ihre Ergebnisse waren für Jahrzehnte nur für wenige weltweit agierende Spezialisten von Interesse. Das änderte sich schlagartig mit dem Einsetzen der Dimensionsbetrachtungen für (seltsame) Attraktoren sowie weitere invariante Mengen dynamischer Systeme (s. [14]) etwa seit 1960. Besondere Bedeutung hat die Hausdorff-Dimension (und haben verwandte, ähnliche Dimensionsbegriffe, die wir sämtlich hier nicht eingehender darlegen können) für die Beurteilung von Attraktoren und allgemeiner: invarianten Mannigfaltigkeiten *dynamischer Systeme* (vgl. hierzu die Arbeiten [15], [16], [17], [18], [19], [20]). In einer interessanten Veröffentlichung über Schwingungen fraktaler Membranenen werden (erstmalig) auch komplexwertige Dimensionen genannt ([21]).

Die topologische Dimension ist nie größer als die Hausdorff-Dimension, sie ist sogar die größte untere Schranke aller Hausdorff-Dimensionszahlen für alle zur gegebenen Menge homöomorphen Mengen (s. Punkt 1.1).

4 Anwendungen des Raumbegriffs

Im Sinne einer anregenden Bemerkung, weder klassifizierend und total extrem unvollständig, sollen hier noch einige (aktuelle) Anwendungen des Raumbegriffs referiert werden.

4.1 Fixpunktsätze

Räume benötigt man in der Mathematik für die Untersuchung von Gleichungen (bzw. Ungleichungen – dies führt auf das von uns völlig ausgesparte Thema der *geordneten Vektorräume*).

Als ein zentraler Gleichungstyp hat sich die *Fixpunktaufgabe* erwiesen (s. [22]). Sie besteht darin, für eine gegebene Abbildung $F:M\to M$ eines Raumes (in sich) bzw. einer Teilmenge eines Raumes, ein Element x^* zu finden, für das $F(x^*)=x^*$ gilt. Als wichtige Anwendungen nennen wir

- den Nachweis von Gleichgewichtszuständen in der Ökonomie,

- die Erschließung von Lösungen nichtlinearer Differential- und Integralgleichungen (Existenznachweis & Berechnung), insbesondere der Nachweis periodischer Lösungen mit zahlreichen Anwendungen in der Theorie nichtlinearer Schwingungen,
- die Konstruktion fraktaler Mengen mittels des sog. HUTCHINSON-Operators und die zugehörigen Anwendungen.

Jede stetige Abbildung F: M→M einer konvexen, abgeschlossenen Teilmenge M eines normierten Raumes mit einer Bildmenge F[M], deren Abschließung (Hinzunahme aller Grenzelemente) kompakt ist, hat einen solchen Fixpunkt (J. SCHAUDER 1927). Ob diese Aussage auch in allen allgemeinen topologischen Vektorräumen gilt, blieb offen und ungeklärt bis 1999. Ergebnis: sie gilt! (s. [23]). Dabei muss man bedenken, dass es unter diesen allgemeinen topologischen Vektorräumen Exemplare gibt (darunter die sog. Nadelpunkträume), in denen die Umgebungen eines (beliebigen) Punktes keine konvexen Umgebungen (wie die Metrik-Kugel im Banachraum) dieses Punktes enthalten. Sie sehen etwa aus wie Radiolarien. Der gewöhnliche (auch unendlich-dimensionale) Koordinatenbegriff greift dort nicht mehr und muss durch andere Konstruktionen ersetzt werden (s. z.B. [24], [25]). Am Institut für Analysis der TU Dresden wurde eine Zeit lang (etwa 1950–1980) unter Federführung und Initiative von M. LANDSBERG auf dem Gebiet gearbeitet (s. [26], [27]). Auch zur Fixpunkttheorie gab es mehrere Arbeiten. Die Ergebnisse bis dahin wurden in [28] zusammenfassend dargestellt.

4.2 Partielle Differentialgleichungen

Die große Leistung des 20. Jahrhunderts war auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen die Einführung der *Distributionstheorie* (historisch verknüpft u.a. mit den Namen O. HEAVISIDE; S.L. SOBOLEV; L. SCHWARTZ) und gipfelt z.B. im Begriff der *Grundlösung* (bzw. der *Parametrix*) eines linearen (partiellen) Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten: Die Faltung der Störfunktion mit der Grundlösung (das *Potential*) löst die inhomogene Differentialgleichung. Grundlagen der Signal- und Systemtheorie konnten mittels der Distributionsräume *D'* und *S'* wesentlich aufgehellt werden (s. [29], [30]).

Neue Aspekte zeigen sich u.a. in Arbeiten von R. PICARD (s. [31]), der die Möglichkeiten von Systemen von Räumen wie folgt beschreibt:
Um einerseits die Vorteile der Hilberträume zu nutzen, aber Einschränkungen an die zulässigen Vorgaben bei zu lösenden Gleichungen gering zu halten und etwa auch punktuelle Wirkgrößen zuzulassen, wie sie bei den Anwendungen etwa als Anfangsdaten, Punktmassen, Elementarladungen, Lichtpunkte, Impulse u.ä. auftreten, kann man als Erweiterungsidee ein Geflecht von aneinandergeketteten, angeordneten Hilberträumen konstruieren (abstrakte) Sobolev-Verbände). In dem hierdurch gebildeten Netz von Räumen lassen sich dann Prozessmodelle näher untersuchen, die etwa die Reaktion auf solche genannten punktuellen Auslöser beschreiben sollen ([32]).

4.3 Stochastische Prozesse

Seit Mitte des 20. Jahrhunderts spielt die Hilbert- und Banachraumtheorie eine wichtige Rolle bei der Behandlung zufälliger Vorgänge. So werden z.B. bei der Untersuchung von Markoff-Prozessen spezielle Funktionenräume sowie Räume von Maßen genutzt. Jedem Markoff-Prozess sind Operatorscharen zugeordnet. Ergebnisse und Methoden der Operatorentheorie (= der Theorie linearer Abbildungen zwischen normierten Räumen), z.B. der Spektraltheorie, der Halbgruppentheorie und der Theorie positiver Operatoren liefern Ergebnisse für die Theorie und Anwendung stochastischer Prozesse bzw. verallgemeinerter stochastischer Prozesse, die das Zeitverhalten distributionswertiger Zufallsgrößen beschreiben (s. [33]).

4.4 Ausblick

Seit Beginn der 90er Jahre ist, vor allem durch die Arbeiten von A. CONNES ([34]) eine neue, sog. nichtkommutative Geometrie im Entstehen. Durch diese wird der Raumbegriff stark algebraisiert. Mittels der sog. Connes-Metrik, die sich mittels einer Operatorenalgebra konstruieren lässt, wird die Behandlung gemischt diskret-kontinuierlicher Strukturen – analog zu Mannigfaltigkeiten mit innerer Metrik (s. 1.2) – möglich. Damit eröffnen sich völlig neue Chancen für die Anwendungen in der Theorie poröser Materialien und Strukturen und in der Elementarteilchenphysik.

5 Danksagung

Für zweckdienliche Hinweise, – zum Abschnitt 4 – Formulierungen danke ich sehr herzlich meinen Kollegen am Institut für Analysis, insbesondere Herrn Doz.Dr. N. Koksch; Herrn Prof.Dr. R. Picard; Herrn Prof.Dr. A. Rhodius; Herrn Prof.Dr. W. Timmermann sowie Herrn Dr. T. Okon (Fak. Elektrotechnik) und Herrn Prof.Dr. V. Reitmann (MPI Physik komplexer Systeme).

Literatur

[1] *Schultes, R. E., Davis, W. A.*: The glass flowers at Harvard (Photographs by Burger, H.). New York: E. P. Dutton, 1982. Copyright 1992 by President and Fellows of Harvard College.

[2] *Schulze, D.*: Sehen, Verstehen. Gestalten (Mikrostrukturen im Elektronenmikroskop). Frankfurt a.M.; Werkstoff-Informationsgesellschaft, 1998.

[3] *Scriba, C. J.; Schreiber, P.*: 5000 Jahre Geometrie. Berlin/Heidelberg/New York/Tokio: Springer, 2001.

[4] *Seifert, H.; Threlfall, W.*: Lehrbuch der Topologie. Leipzig/Berlin: B. G. Teubner, 1934.

[5] *Alexandroff, P.; Hopf, H.*: Topologie I. (Grundlehren der Math. Wiss., Band XLV). Berlin: Springer, 1935.

[6] *Franz, W.*: Topologie. I Allgemeine Topologie. (Sammlung Göschen Bd. 1181). Berlin: W. de Gruyter, 1960.

[7] *Rinow, W.*: Die innere Geometrie der metrischen Räume. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer, 1961.

[8] *Lang, S.*: Differential and Riemannian Manifolds. 3. ed. New York: Springer, 1995.

[9] *Neunzert, H.* : Vom Nutzen der Mathematik. In: Jahresbericht d. Dt. Math.-Vereinigung **97** (1995), S. 157-169.

[10] *Göpfert, A., Riedrich, T.*: Funktionalanalysis. 4., überarbeitete Aufl. Stuttgart/Leipzig: B. G. Teubner, 1994.

[11] *Roos, H.-G., Schwetlick, H*.: Numerische Mathematik.
Stuttgart/Leipzig: B. G. Teubner, 1999.

[12] *Trefftz, E*.: Schwingungsprobleme und Integralgleichungen
Iin: Math, Annalen **87** (1922) S.307-314.

[13] *Hausdorff, F*.: Dimension und äusseres Mass.
In: Mathematische Annalen **79** (1919), S. 157-179.

[14] *Reitmann, V.:* Reguläre und chaotische Dynamik. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Stuttgart/Leipzig: B. G. Teubner, 1996.

[15] *Franz, A.:* Upper and lower Hausdorff dimension estimates for invariant sets of k-1 endomorphisms. In: Mathematische Nachrichten **223** (2001) S. 23-32.

[16] *Gelfert, K.:* Estimates of the capacitive dimension and of the topological entropy for partially volume – expanding and volume – contracting dynamical systems on manifolds. Dissertation. TU Dresden, 2001.

[17] *Noack, A.* : Dimensions- und Entropieabschätzungen sowie Stabilitäts-untersuchungen für nichtlineare Systeme auf Mannigfaltigkeiten.
Dissertation. TU Dresden, 1998.

[18] *Okon, T.:* Dimension estimate preserving embeddings for compacta in metric spaces. In: Archiv der Mathematik 78 (2002) S. 36-42.

[19] *Koksch, N. :* A comparison principle approach to improved existence results for smooth integral manifolds. Habilitation. TU Dresden, 1999.

[20] *Boichenko, V., Leonov, G., Reitmann, V*.: Dimension theory for Ordinary Differential Equations (in Vorbereitung).

[21] *Lapidus, M.L., Harper, L.H., Rumbos, A.J. (ed.):*
Harmonic Analysis and Nonlinear Differential Equations.
Contemporary Mathematics Vol. 208. American Math. Soc.: Providence 1997.

[22] *Dugundji, J., Granas, A.:* Fixed point theory, vol. 1.,
Warszawa: PWN, 1982 (2. Aufl. in Vorbereitung).

[23] *Cauty, R.* : Solution du problème de point fixe de Schauder.
In : Fundamenta Mathematica **170** (2001), S. 231-246.

[24] *Pallaschke, D*.: Topologische Eigenschaften einer Klasse nicht notwendig lokal konvexer metrischer Funktionenräume.
Habilitation. Universität Bonn, 1970.

[25] *Riedrich, T*.: Die Räume Lp (0,1) (0<p<1) sind zulässig.
In: Wiss. Z. TU Dresden **12** (1963) 5, S. 1149-1152.

[26] *Landsberg, M.:* Lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind. In: Mathematische Zeitschrift **65** (1956) S. 104-112.

[27] *Albinus, G.:* Einige Beiträge zur Approximationstheorie in metrischen Vektorräumen. In: Wiss. Z. TU Dresden **15** (1966), S.1-4.

[28] *Riedrich,T.:* Vorlesungen über nichtlineare Operatorgleichungen. Teubner-Texte zur Mathematik, Band 4. Leipzig: B. G. Teubner 1976.

[29] *Krabs, W*.: Mathematical Foundations of Signal Theory. Berlin: Heldermann Verlag, 1995.

[30] *Boche, H.:* Neuere Beiträge zur Theorie der Funktionaltransformationen und ihre Anwendungen. Dissertation. TU Dresden, 1994.

[31] *Picard, R*.: Evolution Equations as Operator Equations in Lattices of Hilbert Spaces, Glasnik Mat. 35 (55) (2000) 111-136.

[32] *Picard, R.:* Persönliche Mitteilung. TU Dresden, 2002.

[33] *Gelfand, I.M., Wilenkin, N.J.:* Verallgemeinerte Funktionen, Band IV (Einige Anwendungen der harmonischen Analyse, Gelfandsche Raumtripel) Berlin: DVW, 1964.

[34] *Casacuberta, C., Castellet, M.:* Mathematical Research Today and Tomorrow. Viewpoints of Seven Fields Medalists. Berlin/Heidelberg/New York/Budapest: Springer, 1992.