PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, EIN SCHWERPUNKTTHEMA AM INSTITUT FÜR ANALYSIS.

Das Institut für Analysis hat sicher nicht nur in den letzten Jahrzehnten ein Leistungsspektrum in Forschung und Lehre vertreten, dass schwerlich in der gebotenen Kompaktheit angemessen dargestellt werden kann. Selbst wenn wir uns auf das Thema "Partielle Differentialgleichungen" beschränken, ist das Forschungsgeschehen am Institut hier nicht ausreichend zu würdigen. Ich möchte stattdessen lediglich ein Fenster in diese Thematik öffnen, welches natürlich einen stark durch meine eigene Forschungsneigung gefärbten Blick freigeben wird, und in keiner Weise als besonders repräsentativ angesehen werden soll und kann. Die folgende Darstellung ist dem eher zufälligen Umstand geschuldet, dass die Aufgabe ein Teilgebiet der Analysis darzustellen auf mich gefallen ist.

1. Die einfachste partielle Differentialgleichung

Beginnen wir bei dem grundlegenden Begriff der partiellen Ableitung einer Funktion f, die – sagen wir – von zwei Variablen abhängen soll. Der Grenzwert des Quotienten

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y)}{x-x_0},$$

wenn wir uns mit x dem x_0 nähern, ist, so dieser existiert, die partielle Ableitung von f nach der ersten Unbekannten an der Stelle x_0, also $\partial_1 f(x_0,y)$ oder auch $(\partial_x f)(x_0,y)$. Stellen wir uns vor, dass f bezüglich der zweiten Variablen konstant ist, also in diesen Sinne unabhängig von y ist, so wäre $\partial_1 f$ nichts anderes als die übliche Ableitung einer Funktion einer Variablen. Vertauschen wir hier die Rollen von x und y, so erhalten wir analog die partielle Ableitung nach der zweiten Variablen an einer Stelle y_0, also $\partial_2 f(x,y_0) = (\partial_y f)(x,y_0)$.

Das vermutlich einfachste Beispiel einer echten partiellen Differentialgleichung ist

$$(\partial_x u)(x,y) = f(x,y),$$

deren Lösung, wie man leicht mit dem klassischen eindimensionalen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung vermutet, durch

$$u(x,y) = g(y) + \int_{-\infty}^{x} f(s,y)\, ds$$

gegeben ist, wobei g zunächst eine beliebige Funktion ist, die wir durch eine Zusatzbedingung wie etwa, dass $u(x,y)$ für $x \to -\infty$ gegen 0 konvergieren soll, noch festlegen können. Dann müsste ja $g(y) = 0$ sein.

2. Auf dem Wege zu einer allgemeinen Lösungsstrategie

Das obige Beispiel gibt uns kaum einen Hinweis auf eine allgemeine Rezeptur, dieses Beispiel auf kompliziertere Situationen "hochzurechnen". Die im Beispiel verwendete direkte Lösungsmethode durch einfache Integration ist leider nicht gut verallgemeinerbar auf komplexere Probleme. Wenn wir aber stärkere Strukturannahmen an den Bereich, von dem wir Daten f und Lösungen u nehmen wollen, stellen, ergibt sich ein erstaunlich weitreichender Zugang zu einer vernünftigen Lösungstheorie einer großen Klasse von partiellen Differentialgleichungen (Systeme von solchen sind hier mit gemeint). Als thematischer Rahmen gehen wir davon aus, dass die Zeit explizit in der partiellen Differentialgleichung eine tragende Rolle spielen soll. Die Schlüsselidee ist die partielle Ableitungsoperation nach der Zeit, die nach dem Gesagten mit ∂_t oder ∂_0 zu bezeichnen wäre, als einen Operator, der Funktionen in andere Funktionen verwandelt, in einem passenden 'Funktionenraum' zu betrachten, wo er eine 'Positivitätseigenschaft' aufweist, die dann die Lösbarkeit im einleitenden Beispiel reproduziert, aber für eine Verallgemeinerung fruchtbarer ist.

Wir merken zunächst an, dass nach der Produktregel für Ableitungen

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} u\,(t,x)^2 \, e^{-2\varrho t} \right) = u\,(t,x)\, \partial_0 u\,(t,x)\ e^{-2\varrho t} - \varrho\, u\,(t,x)^2\, e^{-2\varrho t},\ \varrho \in \mathbb{R},$$

gilt und wir für solche u, die im Unendlichen genügend vorteilhaftes asymptotisches Verhalten zeigen, sehen können, dass bei Integration der linken Seite null herauskommt und so

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u\,(t,x)\, \partial_t u\,(t,x)\ e^{-2\varrho t}\, dt\, dx = \varrho \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u\,(t,x)^2\ e^{-2\varrho t}\, dt\, dx$$

gilt. Für positive Parameter ϱ ist die rechte Seite offenbar positiv. Führt man als Notation hier ein sogenanntes Skalarprodukt durch

$$\langle u|v\rangle_\varrho = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u\,(t,x)\, v\,(t,x)\ e^{-2\varrho t}\, dt\, dx$$

ein, schreibt sich dies nun

$$\langle u|\partial_t u\rangle_\varrho = \varrho \,\langle u|u\rangle_\varrho\,.$$

Schwächt man hier die Gleichheit durch ein $\geq$ ab, erhalten wir eine Eigenschaft, die man strikte positive Definitheit nennt. Die abgeschwächte Form

$$\langle u|\partial_t u\rangle_\varrho \geq c_0 \,\langle u|u\rangle_\varrho$$

für $c_0 > 0$, die man gerne auch durch $\partial_0 \geq c_0 > 0$ abkürzt, also die positive Definitheit für alle genügend großen positiven ϱ, ist nun die gewünschte verallgemeinerungsfähige Eigenschaft, mit der sich partielle Differentialgleichungen, wie sie zum Beispiel in der Beschreibung physikalischer, technischer und ökonomischer Modelle unumgänglich sind, auch in komplizierteren Fällen, etwa auch bei variablen Koeffizienten, behandeln lassen. Als eine einfache Klasse von Problemen betrachten wir etwa

$$(\partial_t M_0 + M_1 + A)\, u = f$$

mit A derart, dass

$$\langle u|Au\rangle_H \geq 0$$

und A in einem gewissen Sinne maximal ist, dann ist die verallgemeinerte Positivitätsbedingung von der Form

$$\langle u|\,(\varrho M_0 + M_1)\, u\rangle_H \geq c_0 \,\langle u|u\rangle_H$$

für eine positive Konstante c_0 (oder eben kurz $\varrho M_0 + M_1 \geq c_0 > 0$) und alle genügend großen positiven ϱ (M_k, $k = 0, 1$, sind beschränkte Koeffizienten). Hierin steht $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_H$ für das Skalarprodukt in einem "Raum" H in dem u, f für jeden Zeitpunkt ihre Werte haben, also $u\,(t) := u\,(t,\,\cdot\,)\,,\ f\,(t) := f\,(t,\,\cdot\,) \in H$ für im Wesentlichen alle reellen t. Das obige Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_\varrho$ wird hier "geliftet" vom reellwertigen zum H-wertigen Fall:

$$\langle u|v\rangle_\varrho = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u\,(t)\,|v\,(t)\rangle_H\ e^{-2\varrho t}\, dt.$$

Wählt man etwa die Parameter α, β gleich 0 oder 1 in den Gleichungen

$$\alpha \partial_t u_1 + (1-\alpha)\, u_1 + \partial_x u_2 = f_1,\ \beta \partial_t u_2 + (1-\beta)\, u_2 + \partial_x u_1 = f_2,$$

erhält man ein System der Form

$$(\partial_t M_0 + M_1 + A) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

mit

$$M_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\beta \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x \\ \partial_x & 0 \end{pmatrix},$$

welches stets, die verlangte positive Definitheitseigenschaft zeigt, wobei wir als H den Funktionenraum wählen, der auf dem Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_H = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, v(x)\ dx$$

fußt. Das Beispiel zeigt, wie die qualitativen Grundtypen der am häufigsten betrachteten linearen partiellen Differentialgleichungen als Gleichungen in höchstens ersten Ableitungen in einheitlicher Weise als vernünftig lösbar dargestellt werden können. Hieraus ergibt sich dann konzeptionell die *Wohlgestelltheit*, das heißt wir haben Existenz genau einer Lösung zu jeder rechten Seite (Daten), sowie die Tatsache, dass mögliche Ungenauigkeiten der Daten die Abweichungen der zugehörigen Lösungen zu kontrollieren vermögen (stetige Abhängigkeit von den Daten), vergleiche etwa [1, 3] und die dort genannte Literatur für Einzelheiten.

Die häufig betrachtete Version mit höchstens zweiten Ableitungen ergibt sich aus diesen Gleichungen nach Elimination einer der beiden unbekannten Funktionen, also etwa

$$\alpha\beta\partial_t^2 u_2 + (\alpha(1-\beta) + (1-\alpha)\beta)\,\partial_t u_2 + (1-\alpha)(1-\beta)\,u_2 - \partial_x^2 u_2 = f_2 - \partial_x f_1,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $\alpha \neq \beta$ spricht man vom "parabolischen" Fall; diese Wahl beschreibt das Phänomen der Diffusion, wie sie etwa bei der Wärmeausbreitung stattfindet und hat die typische Form

$$\partial_t u_2 - \partial_x^2 u_2 = f_2 - \partial_x f_1.$$

Im Fall $\alpha = \beta$ erhalten wir

$$\alpha^2\partial_t^2 u_2 + (1-\alpha)^2\, u_2 - \partial_x^2 u_2 = f_2 - \partial_x f_1$$

und hier zwei typische Spezialfälle:

- $\alpha = 1$; hier spricht man vom "hyperbolischen" Fall; diese Wahl beschreibt typischerweise Wellenausbreitungphänomene:
$$\partial_t^2 u_2 - \partial_x^2 u_2 = f_2 - \partial_x f_1,$$
- $\alpha = 0$; dies ist ein "elliptischer" Fall:
$$\left(1 - \partial_x^2\right) u_2 = f_2 - \partial_x f_1.$$

Der letzte Fall illustriert, dass auch Fälle umfasst sind, die gar keine Zeitableitung enthalten. Natürlich müssen die Daten weiter von der Zeit abhängen, wählen wir aber – sagen wir – $f_1 = 0$ und

$$f_2(t,x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases}$$

dann lösen wir damit eigentlich auch ein klassisches, im Wesentlichen zeitunabhängiges Differentialgleichungsproblem in diesem zeitabhängigen Rahmen.

Die genannten Fälle zeigen also die universelle Einsetzbarkeit der beschriebenen Positivitätsbedingung, wenn wir, wie ja oben getan, von einer Formulierung mit höchstens einer Zeitableitung ausgehen. Bis auf eine Umbenennung der Variablennamen löst diese Positivitätsbedingung auch unser einleitendes Beispiel (t ist dort x genannt und das dortige y ist das in unserem jetzigen Kontext auftretende x).

Der sogenannte Timoshenko-Ehrenfest-Balken (meist kurz als Timoshenko-Balken bezeichnet) liefert uns ein immer noch einfaches aber doch etwas anwendungsnäheres Beispiel. Beschrieben werden die Verbiegungs- und Verdrehungseigenschaften eines geraden Balkens, der im lastfreien Zustand durch ein endliches Intervall I vorgestellt ist.

Das diesen Balken beschreibende System partieller Differentialgleichungen ist

$$\left(\partial_0 \mathcal{M}\left(\partial_0^{-1}\right) + \begin{pmatrix} 0 & -\partial_1 & 0 & 0 \\ -\mathring{\partial}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1 \\ 0 & 0 & -\mathring{\partial}_1 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ s \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \\ g \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei das Materialgesetz von der Form

$$\mathcal{M}\left(\partial_0^{-1}\right) = M_0 + \partial_0^{-1} M_1$$

mit

$$M_0 := \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{-1} \end{pmatrix},\ M_1 := \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Hier sind ν_1, κ, ν_2, C stetig, selbstadjungiert und strikt positiv definit, siehe [2] für den Zusammenhang zur sogenannten Reissner-Mindlin Plattengleichung. Die Unbekannten η und s sind die Geschwindigkeiten der Auslenkung von der Ruheposition des Balkens und der Verdrehung um die Balkenachse, wo hingegen ζ, T die zugehörigen assoziierten elastischen Spannungen des Materials beschreiben (f, g bezeichnen externe Kraftdichten, die die Verbiegung und Verdrehung des Balkens auslösen). Zur korrekten Formulierung werden auch noch geeignete sogenannte Randbedingungen an den Intervallenden nötig, die wir hier der Einfachheit halber durch Fixierung von s und η am Rande , also $s = 0$ und $\eta = 0$ am Rande des Intervalls Ω_1 festlegen wollen. Meist findet man in der Literatur das entsprechende System mit Ableitungen zweiter Ordnung, welches durch Elimination von ζ und T aus dem obigen System erster Ordnung hervorgeht, notiert:

$$\begin{aligned} \nu_1 \partial_0^2 \widetilde{\eta} - \partial_1 \kappa^{-1}\left(\partial_1 \widetilde{\eta} + \widetilde{s}\right) + d\partial_0 \widetilde{\eta} &= f, \\ \nu_2 \partial_0^2 \widetilde{s} - \partial_1 C \partial_1 \widetilde{s} + \kappa^{-1}\left(\partial_1 \widetilde{\eta} + \widetilde{s}\right) &= g, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\widetilde{\eta} := \partial_0^{-1}\eta$ und $\widetilde{s} := \partial_0^{-1}s$. Hier beschreibt $\widetilde{\eta}$ die Auslenkung des Balkens und $\widetilde{s}$ dessen Verdrehung (Scherung).

Abschließend wenden wir uns noch einem etwas aufwändigeren höherdimensionalen Beispiel zu. Wir betrachten die Maxwell'schen Gleichungen in einem den euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ ausfüllenden isotropen, homogenen Medium, wo wir alle sonst auftretenden Konstanten zu eins reskalieren können, in komplexer Schreibweise, so dass das elektromagnetische Feld die Form $U = E + \mathrm{i}H$ erhält (i bezeichnet hier die imaginäre Einheit), also mit dem elektrischen Feld E als Realteil und dem magnetischen Feld H als Imaginärteil, so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\left(\partial_t + \mathrm{i}\,\mathrm{rot}\right) U = F$$

mit vorgegebenen Daten F. Hierin steht rot für dir sogenannte Rotation, den partiellen Differentialoperator, der auf das drei-komponentige elektromagnetische Feld $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ gemäß

$$\mathrm{rot}\, U = \begin{pmatrix} \partial_2 U_3 - \partial_3 U_2 \\ \partial_3 U_1 - \partial_1 U_3 \\ \partial_1 U_2 - \partial_2 U_1 \end{pmatrix}$$

wirkt. Als zugrundeliegenden Raum betrachten wir den (reellen!) Skalarproduktraum $L^2_\varrho\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3\right)$, der sich aus der Wahl des (reellen!) Skalarprodukts

$$\begin{aligned} &\left\langle \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \right\rangle_\varrho = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathfrak{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{U_i\left(t, x_1, x_2, x_3\right)} V_i\left(t, x_1, x_2, x_3\right)\, e^{-2\varrho t}\, dt\, dx_1\, dx_2\, dx_3\right) \end{aligned}$$

ergibt. Man findet

$$\langle U | \mathrm{i}\ \mathrm{rot}\, U\rangle_\varrho = 0$$

und so, dass sich die Eigenschaft

$$\langle U | \partial_t U\rangle_\varrho \geq c_0 > 0$$

auf den Operator $\partial_t + \mathrm{i}\,\mathrm{rot}$ für alle genügend großen ϱ überträgt

$$\left\langle U \middle| \left(\partial_t + \mathrm{i}\,\mathrm{rot}\right) U \right\rangle_\varrho \geq c_0 > 0.$$

Hieraus ergibt sich dann konzeptionell die *Wohlgestelltheit* in obigem Sinne. Im Falle eines echten Teilgebiets von $\mathbb{R}^3$ müssten eventuell noch Randbedingungen gestellt werden, eine Erschwernis, die wir aber hier nicht weiter verfolgen können. Zahlreiche weitere konkrete Anwendungen findet man aber in [1, 3].

Ich hoffe, es ist jedoch ausreichend erkennbar geworden, dass wir hier einen elementaren, universellen Schlüssel für die Lösung zahlreicher partieller Differentialgleichungen von Anwendungsgebieten wie etwa Physik (zum Beispiel in Akustik, Elektrodynamik, Quantenmechanik, Elastodynamik und Strömungsdynamik), Ingenieurwesen (Flugingenieurwesen, Bauingenieurwesen, Elektroingenieurwesen, Maschinenbau) oder auch Wirtschaftswesen (man denke etwa an die Black-Scholes-Gleichung) in Händen halten, mit dem wir in der Lage sind auch Phänomenen in hochkomplexen, auch nichtlinearen Materialien auf die Spur zu kommen. Für detailliertere Untersuchungen werden weitere qualitative Einschränkungen der Materialgesetze erforderlich sein, die dann erlauben, auf andere Hilfsmittel zur Lösungsdarstellung, wie etwa durch sogenannte Faltung mit einer Grundlösung, zurückzugreifen und sogar andere Richtungen der Verallgemeinerung zu eröffnen. Es seien hier als Beispiele ausdrücklich sogenannte Halbgruppen-Methoden, die ebenfalls am Institut intensivst untersucht wurden, sowie die klassischen aber immer noch fruchtbaren Integral-Darstellungsmethoden erwähnt.

Literatur

[1] R. Picard & D. McGhee. *Partial Differential Equations. A unified Hilbert space approach.* De Gruyter Expositions in Mathematics 55, Berlin: de Gruyter, 469 p., 2011.

[2] R. Picard. Mother Operators and their Descendants. *J. Math. Anal. Appl.*, 403(1):54–62, 2013.

[3] R. Picard, D. McGhee, S. Trostorff & M. Waurick. *A Primer for a Secret Shortcut to PDEs of Mathematical Physics* Frontiers in Mathematics. Birkhäuser, Cham, Switzerland, 2020.