

Merkblatt zur 3. Übung am 26. September 2024

Thema: Lineare Gleichungssysteme, weitere Aufgaben zu Rechenoperationen, zu Termumformungen und zum Lösen und Umstellen von Gleichungen

Summenzeichen Σ

Es seien a_0, a_1, \dots, a_n reelle Zahlen. Dann bedeutet $\sum_{k=0}^n a_k$ nichts weiter als die Summe $a_0 + a_1 + \dots + a_n$. Statt k kann auch eine andere Bezeichnung für den Summationsindex verwendet werden. Dieser muss außerdem nicht bei 0, er kann auch bei einer anderen natürlichen Zahl beginnen.

Beispiele:

$$\sum_{k=0}^4 k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30, \quad \sum_{i=1}^3 (3i - 4) = (3 \cdot 1 - 4) + (3 \cdot 2 - 4) + (3 \cdot 3 - 4) = 6$$

Potenzgesetze

Für alle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ sowie $p, q \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Gleichheiten (vorausgesetzt, die Potenzen sind jeweils definiert).

$$x^p \cdot x^q = x^{p+q}, \quad \frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}, \quad x^p \cdot y^p = (xy)^p, \quad \frac{x^p}{y^p} = \left(\frac{x}{y}\right)^p, \quad (x^p)^q = x^{p \cdot q}$$

Wurzeln und Logarithmen

- Sei $x \geq 0$ eine vorgegebene nichtnegative Zahl. Die (**Quadrat-**) **Wurzel** aus x , geschrieben als \sqrt{x} , ist diejenige nichtnegative Zahl, deren Quadrat gleich x ist.

Beispiele:

- $\sqrt{81} = 9$, denn $9^2 = 81$
- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, denn $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

Allgemeiner ist die **m -te Wurzel** aus x , geschrieben als $\sqrt[m]{x}$, diejenige nichtnegative Zahl, deren m -te Potenz gleich x ist.

Beispiele:

- $\sqrt[3]{125} = 5$, denn $5^3 = 125$
- $\sqrt[10]{1024} = 2$, denn $2^{10} = 1024$

- Seien $a > 0$ und $x > 0$ vorgegebene positive Zahlen. Der **Logarithmus von x zur Basis a** , geschrieben als $\log_a(x)$, ist diejenige Zahl b , für die gilt: $a^b = x$. Um einen solchen Logarithmus zu berechnen, ist also die Frage zu beantworten, womit a potenziert werden muss, um x zu erhalten.

Beispiele:

- $\log_3(81) = 4$, denn $3^4 = 81$
- $\log_5(\frac{1}{25}) = -2$, denn $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

Der Logarithmus einer Zahl x zur Basis e (Eulersche Zahl) wird anstelle von $\log_e(x)$ meist mit $\ln(x)$ bezeichnet. Der Logarithmus einer Zahl x zur Basis 10 wird anstelle von $\log_{10}(x)$ häufig mit $\lg(x)$ bezeichnet.

Umschreiben von Wurzeln und Quotienten als Potenz:

- Wurzeln lassen sich als Potenzen mit gebrochenem Exponenten umschreiben: $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$.
Speziell: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
- Quotienten lassen sich als Potenzen umschreiben: $\frac{1}{x^p} = x^{-p}$.