

Merkblatt zur 4. Übung am 27. September 2024 Thema: Reelle Funktionen

Definition

Eine (**reelle**) **Funktion** $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Abbildung, die jeder Zahl x aus einer Menge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ genau eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ zuordnet. Der zugeordnete Wert wird üblicherweise mit $f(x)$ bezeichnet und heißt **Funktionswert** von f an der Stelle x .

- Die Menge D_f heißt **Definitionsbereich** von f .
- Die Menge $B_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{es existiert ein } x \in D_f, \text{ sodass } y = f(x)\}$ (manchmal auch mit $f(D_f)$ bezeichnet) heißt **Bildbereich** von f .
- Die Gleichung $y = f(x)$ nennt man **Funktionsgleichung** oder **Funktionsvorschrift** der Funktion f .

Bemerkung: D_f muss nicht unbedingt dem sich aus der Funktionsgleichung ergebenden größtmöglichen Definitionsbereich entsprechen. Zu einer vollständigen Charakterisierung einer Funktion gehört somit neben der Funktionsgleichung auch die Angabe des Definitionsbereichs.

Verschiebung einer Funktion

Es seien g eine reelle Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten. Dann geht der Graph der Funktion f mit

- $y = f(x) = g(x) + a$ aus dem Graphen von g durch Verschiebung in y -Richtung um den Wert a hervor (Verschiebung nach oben, falls $a > 0$; Verschiebung nach unten, falls $a < 0$),
- $y = f(x) = g(x + b)$ aus dem Graphen von g durch Verschiebung in x -Richtung um den Wert b hervor (Verschiebung nach links, falls $b > 0$; Verschiebung nach rechts, falls $b < 0$).

Streckung/Stauchung einer Funktion

Es seien g eine reelle Funktion und $a, b > 0$ Konstanten. Dann geht der Graph der Funktion f mit

- $y = f(x) = a \cdot g(x)$ aus dem Graphen von g durch Streckung in y -Richtung um den Faktor a hervor,
- $y = f(x) = g(bx)$ aus dem Graphen von g durch Streckung in x -Richtung um den Wert $\frac{1}{b}$ hervor.

Graphen von linearen Funktionen

Der Graph einer linearen Funktion, das heißt einer Funktion mit einer Vorschrift der Gestalt $f(x) = mx + n$, ist eine Gerade, die den Anstieg m besitzt und die y -Achse im Punkt $(0, n)$ schneidet.

Zur Bedeutung des Anstiegs m : er gibt für jeden beliebigen Punkt auf der Gerade an, um wie viele Einheiten sich der y -Wert ändert, wenn sich der x -Wert um eine Einheit erhöht. Allgemeiner hat m auch folgende Bedeutung: wenn sich, ausgehend von einem beliebigen Punkt der Gerade, der x -Wert um Δx Einheiten erhöht, dann ändert sich der y -Wert um $\Delta y = m \cdot \Delta x$ Einheiten. Mit anderen Worten ist der Anstieg m gerade das Verhältnis aus Δy und Δx .

Graphen von quadratischen Funktionen

Der Graph einer quadratischen Funktion, das heißt einer Funktion mit einer Vorschrift der Gestalt $f(x) = a(x - b)^2 + c$, ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt (b, c) .

Im Falle $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet, im Falle $a < 0$ ist sie nach unten geöffnet. Je größer a vom Betrage her ist, desto schmaler ist die Öffnung der Parabel.

Ausgewählte Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

- **Nullstellen.** Eine Stelle $x_0 \in D_f$ heißt *Nullstelle* von f , wenn $f(x_0) = 0$ gilt.
- **Symmetrie.** Angenommen, für jedes $x \in D_f$ ist auch $-x \in D_f$.
 - Falls außerdem $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt, dann wird f als *gerade Funktion* bezeichnet. Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch bzgl. der y -Achse.
 - Falls außerdem $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt, dann wird f als *ungerade Funktion* bezeichnet. Der Graph einer ungeraden Funktion ist symmetrisch bzgl. dem Koordinatenursprung.
- **Monotonie.**
 - Die Funktion f heißt *monoton wachsend* auf einem Intervall $I \subseteq D_f$, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$. Gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$, dann heißt die Funktion *streng monoton wachsend*.
 - Die Funktion f heißt *monoton fallend* auf einem Intervall $I \subseteq D_f$, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$. Gilt sogar $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$, dann heißt die Funktion *streng monoton fallend*.
- **Eineindeutigkeit, Umkehrfunktion.**
 - Die Funktion f heißt *eineindeutig* oder *umkehrbar*, wenn aus $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 \neq x_2$ stets auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt (wenn also kein Element aus dem Bildbereich B_f Funktionswert zweier unterschiedlicher Elemente aus D_f ist).
 - Ist f eineindeutig, besitzt sie eine *Umkehrfunktion*. Die Umkehrfunktion von f wird üblicherweise mit f^{-1} bezeichnet. Aber Achtung: Es handelt sich nur um eine Bezeichnung, f^{-1} ist nicht etwa als Potenz zu verstehen!
 - Falls f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, dann gilt für deren Definitions- und Bildbereich: $D_{f^{-1}} = B_f$ und $B_{f^{-1}} = D_f$.
- **Grenzwert an einer Stelle x^* , Stetigkeit.** Gegeben sei eine Stelle $x^* \in D_f$.
 - Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert* von f an der Stelle x^* , wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in D_f \setminus \{x^*\}$ mit $|x - x^*| \leq \delta$ gilt: $|f(x) - a| \leq \varepsilon$. Falls a Grenzwert von f an der Stelle x^* ist, schreibt man $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) = a$.
 - Um zu untersuchen, ob der Grenzwert von f an der Stelle x^* existiert, ist es oft hilfreich, zunächst zu prüfen, ob linksseitiger Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x^* -} f(x)$ und rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x^* +} f(x)$ existieren, und diese ggf. zu berechnen (vor allem, wenn f abschnittsweise definiert ist, ist dieses Vorgehen empfehlenswert). Der Grenzwert von f an der Stelle x^* existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen.

- Die Funktion f heißt *stetig an der Stelle x^** , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x)$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x^*)$ übereinstimmt.

Die Funktion f heißt *stetig* (auf ihrem gesamten Definitionsbereich), wenn sie stetig an jeder Stelle $x \in D_f$ ist.

- **Arten von Unstetigkeit.** Angenommen, f ist an einer Stelle $x^* \in D_f$ nicht stetig.
 - Falls zumindest der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x^*} f(x)$ existiert, aber nicht mit dem Funktionswert $f(x^*)$ übereinstimmt, dann liegt an der Stelle x^* eine *hebbare Unstetigkeit* vor.
 - Falls der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x^{*-}} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x^{*+}} f(x)$ beide existieren, aber nicht übereinstimmen, dann ist x^* eine *Sprungstelle* von f .
 - Falls mindestens einer der beiden einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow x^{*-}} f(x)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow x^{*+}} f(x)$ gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist, dann heißt x^* *Polstelle* von f .