Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

Brückenkurs Mathematik 2021

Merkblatt zur 5. Übung am 1. Oktober 2021
Thema: Differentialrechnung und Anwendungen

Definitionen

Eine Funktion $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar an einer Stelle* $x \in D_f$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann *Ableitung* der Funktion f an der Stelle x und wird mit $f'(x)$ bezeichnet.

Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie an jeder Stelle $x \in D_f$ differenzierbar ist.

Ableitungen ausgewählter Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
1	0	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
x^p $(p \neq 0)$	$p \cdot x^{p-1}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
a^x $(a > 0,\, a \neq 1)$	$a^x \cdot \ln(a)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

Ableitungsregeln

- **Konstante Faktoren:** Angenommen, die Funktion f ist ein Vielfaches einer anderen Funktion g, also $f(x) = c \cdot g(x)$ mit einer gewissen Zahl $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f'(x) = c \cdot g'(x)$.
- **Summenregel:** Angenommen, die Funktion f ist die Summe zweier Funktionen g und h, also $f(x) = g(x) + h(x)$. Dann gilt $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.
- **Produktregel:** Angenommen, die Funktion f ist das Produkt zweier Funktionen g und h, also $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Dann gilt $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.
- **Quotientenregel:** Angenommen, die Funktion f ist der Quotient zweier Funktionen g und h, also $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Dann gilt $f'(x) = \dfrac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$.
- **Kettenregel:** Angenommen, die Funktion f ist eine Verkettung mit der äußeren Funktion g und der inneren Funktion h, also $f(x) = g(h(x))$. Dann gilt $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Gleichung einer Tangente

Gegeben seien eine Funktion f und eine Stelle x_0. Dann lautet eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Lokale Extrema

Angenommen, eine Funktion f besitzt an einer Stelle x_E einen lokalen Extrempunkt (Minimum oder

Maximum). Dann gilt $f'(x_E) = 0$ (notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Extrempunktes bei x_E). Indem man alle Nullstellen von f' berechnet, bestimmt man also zumindest alle Kandidaten für lokale Extremstellen.

Um herauszufinden, ob es sich bei einer Nullstelle von f' tatsächlich um eine lokale Extremstelle von f handelt, kann die zweite Ableitung helfen. Angenommen, an einer Stelle x_E ist $f'(x_E) = 0$. Falls dann $f''(x_E) > 0$ gilt, hat f an der Stelle x_E ein lokales Minimum. Falls $f''(x_E) < 0$ ist, hat f an der Stelle x_E ein lokales Maximum.