Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

Brückenkurs Mathematik 2024

Merkblatt zur 5. Übung am 30. September 2024
Thema: Einführung in die Differential- und Integralrechnung

Differentialrechnung

- **Ableitungen ausgewählter Funktionen**

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
1	0	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
x^p $(p \neq 0)$	$p \cdot x^{p-1}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
a^x $(a > 0,\, a \neq 1)$	$a^x \cdot \ln(a)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$

- **Ableitungsregeln**
  - **Konstante Faktoren:** Angenommen, die Funktion f ist ein Vielfaches einer anderen Funktion g, also $f(x) = c \cdot g(x)$ mit einer gewissen Zahl $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f'(x) = c \cdot g'(x)$.
  - **Summenregel:** Angenommen, die Funktion f ist die Summe zweier Funktionen g und h, also $f(x) = g(x) + h(x)$. Dann gilt $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.
  - **Produktregel:** Angenommen, die Funktion f ist das Produkt zweier Funktionen g und h, also $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Dann gilt $f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$.
  - **Quotientenregel:** Angenommen, die Funktion f ist der Quotient zweier Funktionen g und h, also $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Dann gilt $f'(x) = \dfrac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$.
  - **Kettenregel:** Angenommen, die Funktion f ist eine Verkettung mit der äußeren Funktion g und der inneren Funktion h, also $f(x) = g(h(x))$. Dann gilt $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

- **Gleichung einer Tangente**
  Gegeben seien eine Funktion f und eine Stelle x_0. Dann lautet eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

- **Charakterisierung des Monotonieverhaltens mit der 1. Ableitung**
  - Gilt $f'(x) \geq 0$ für alle x aus einem Intervall (a, b), dann ist die Ausgangsfunktion f in diesem Intervall monoton wachsend (im Falle $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist f sogar streng monoton wachsend in diesem Intervall).
  - Gilt $f'(x) \leq 0$ für alle x aus einem Intervall (a, b), dann ist die Ausgangsfunktion f in diesem Intervall monoton fallend (im Falle $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist f sogar streng monoton fallend in diesem Intervall).

- **Lokale Extremstellen**
  Angenommen, eine Stelle x_E ist eine lokale Extremstelle (Maximal- oder Minimalstelle) einer Funktion f. Dann gilt $f'(x_E) = 0$ (notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle). Indem man alle Nullstellen von f' berechnet, bestimmt man also zumindest alle Kandidaten für lokale Extremstellen.

Um herauszufinden, ob es sich bei einer Nullstelle von f' tatsächlich um eine lokale Extremstelle von f handelt, kann untersucht werden, ob f' an dieser Stelle das Vorzeichen wechselt. Wenn ja, dann ist x_E eine Extremstelle von f, ansonsten ist es ein Sattelpunkt von f.

Alternativ kann auch die zweite Ableitung helfen, um zu entscheiden, ob eine Nullstelle von f' wirklich eine lokale Extremstelle von f ist. Angenommen, an einer Stelle x_E ist $f'(x_E) = 0$. Falls dann $f''(x_E) > 0$ gilt, ist x_E eine lokale Minimalstelle von f. Falls $f''(x_E) < 0$ ist, ist x_E eine lokale Maximalstelle von f.

Integralrechnung

- **Stammfunktion**

  Gegeben sei eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : D_f \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von f, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $F'(x) = f(x)$.

  Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist auch jede Funktion F_c mit $F_c(x) = F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von f. Umgekehrt hat dann jede Stammfunktion von f die Gestalt $F_c(x) = F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

- **Stammfunktionen zu ausgewählten Funktionen**

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
1	x	$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
x^p ($p \neq -1$)	$\frac{1}{p+1}x^{p+1}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
a^x ($a > 0,\ a \neq 1$)	$a^x \cdot \frac{1}{\ln(a)}$	$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$

- **Regeln zur Bestimmung einer Stammfunktion**

  In den folgenden Aussagen sei G jeweils eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von h.

  - **Konstante Faktoren:** Angenommen, f ist ein Vielfaches einer anderen Funktion g, also $f(x) = c \cdot g(x)$ mit einer gewissen Zahl $c \in \mathbb{R}$. Dann ist F mit $F(x) = c \cdot G(x)$ eine Stammfunktion von f.
  - **Summenregel:** Angenommen, f ist die Summe zweier Funktionen g und h, also $f(x) = g(x) + h(x)$. Dann ist F mit $F(x) = G(x) + H(x)$ eine Stammfunktion von f.
  - **Substitutionsregel:** Angenommen, f hat die Gestalt $f(x) = g(h(x)) \cdot h'(x)$, das heißt, f ist das Produkt der Verkettung zweier Funktionen g und h mit der Ableitung der inneren Funktion h. Dann ist F mit $F(x) = G(h(x))$ eine Stammfunktion von f.

    Spezialfall: Angenommen, f hat die Gestalt $f(x) = g(ax+b)$ mit gewissen Zahlen $a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$, das heißt, f ist eine Verkettung mit einer linearen (!) inneren Funktion und der äußeren Funktion g. Dann ist F mit $F(x) = \frac{1}{a}G(ax + b)$ eine Stammfunktion von f.

- **Bestimmtes Integral**

  Ist F eine Stammfunktion von f, dann gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Das besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

- **Berechnung von Flächeninhalten**

  Angenommen, es ist der Inhalt A der Fläche zu berechnen, die der Graph einer Funktion f im Bereich $a \leq x \leq b$ mit der x-Achse einschließt, die also durch den Graphen von f, die x-Achse sowie die senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

- Falls der Graph von f innerhalb des gesamten Bereichs $a \leq x \leq b$ oberhalb der x-Achse liegt, dann gilt $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Falls der Graph von f innerhalb des gesamten Bereichs $a \leq x \leq b$ unterhalb der x-Achse liegt, dann gilt $A = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Falls der Graph von f innerhalb des Bereichs $a \leq x \leq b$ die x-Achse schneidet, dann sind zunächst die Nullstellen von f in diesem Bereich zu bestimmen und anschließend die Flächeninhalte zwischen je zwei Nullstellen einzeln zu berechnen und anschließend zu addieren.