Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

Merkblatt zur 7. Übung am 2. Oktober 2024
Thema: Gleichungen und Ungleichungen mit zwei Variablen, Kombinatorik, Vollständige Induktion

Gleichungen mit zwei Variablen

Durch eine Gleichung mit zwei Variablen x, y wird (von Sonderfällen abgesehen) eine Kurve in der xy-Ebene beschrieben.

- **Geradengleichungen.**
  - allgemeine Form:
  $$ax + by = c$$
  (falls $a \neq 0$, dann ist $S_x = (\frac{c}{a}, 0)$ der Schnittpunkt mit der x-Achse; falls $b \neq 0$, dann ist $S_y = (0, \frac{c}{b})$ der Schnittpunkt mit der y-Achse)
  - Im Falle $b \neq 0$ lässt sich die Gleichung auch überführen in die Gestalt
  $$y = mx + n.$$
  (m: Anstieg der Geraden; n: y-Wert des Schnittpunktes mit der y-Achse)
- **Parabelgleichungen.** (wir betrachten hier nur den Fall, dass die Symmetrieachse parallel zu einer der Koordinatenachsen verläuft)
  - nach oben oder nach unten geöffnete Parabeln:
  $$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$
  (x_0, y_0: Koordinaten des Scheitelpunkts; nach oben geöffnet im Fall $a > 0$, nach unten geöffnet im Fall $a < 0$)
  - nach rechts oder nach links geöffnete Parabeln:
  $$x = a(y - y_0)^2 + x_0$$
  (x_0, y_0: Koordinaten des Scheitelpunkts; nach rechts geöffnet im Fall $a > 0$, nach links geöffnet im Fall $a < 0$)
- **Kreisgleichungen.**
  $$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$
  (x_M, y_M: Koordinaten des Mittelpunkts; $r > 0$ Radius des Kreises)
- **Ellipsengleichungen.** (wir betrachten hier nur den Fall, dass die Symmetrieachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen)
  $$\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$$
  (x_M, y_M: Koordinaten des Symmetriepunkts; $a > 0$ Länge der zur x-Achse parallelen Halbachse; $b > 0$ Länge der zur y-Achse parallelen Halbachse)

Liegen Gleichungen für Parabeln, Kreise oder Ellipsen (noch) nicht in der oben angegebenen Gestalt vor, hilft unter Umständen eine quadratische Ergänzung, um sie in diese Form zu bringen.

Ungleichungen mit zwei Variablen

Durch eine Ungleichung mit zwei Variablen x, y wird (von Sonderfällen abgesehen) ein Bereich in der xy-Ebene beschrieben. Zur Bestimmung des durch eine Ungleichung beschriebenen Bereichs sollte man sich zunächst überlegen, wie die Begrenzungskurve aussieht (dazu einfach das Relationszeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzen). Anhand des Relationszeichens lässt sich dann entscheiden, ob der Bereich oberhalb oder unterhalb bzw. rechts oder links bzw. innerhalb oder außerhalb der Begrenzungskurve liegt und ob die Begrenzungskurve selbst auch zum Bereich gehört.

Kombinatorik

- **Fakultät.** Für eine natürliche Zahl n wird definiert:

  $$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

  (gesprochen: n Fakultät). Für $n = 0$ wird festgelegt: $0! = 1$.
  Anwendung: Gegeben seien n Objekte. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es?

  - Fall 1: Alle Objekte sind voneinander verschieden. Dann gibt es $n!$ Möglichkeiten.
  - Fall 2: Von den Objekten sind einige untereinander gleich. Genauer: Unter den Objekten gibt es k Sorten, wobei n_1 Objekte zur 1. Sorte gehören, n_2 Objekte zur 2. Sorte usw. Dann gibt es $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ Möglichkeiten, die Objekte anzuordnen.

- **Binomialkoeffizient.** Für natürliche Zahlen n und k mit $0 \leq k \leq n$ wird definiert:

  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{(gesprochen: } n \text{ über } k\text{).}$$

  Anwendung: Gegeben seien n unterschiedliche Objekte. Dann gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, diesen Objekten genau k Objekte ohne Zurücklegen zu entnehmen (vorausgesetzt, die Reihenfolge, in der die Objekte entnommen werden, ist unerheblich).

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Gegeben sei eine Aussageform $A(n)$, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Angenommen, es soll bewiesen werden, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n ab einer gewissen Zahl n_0 wahr ist. Dann kann dafür das Beweisverfahren der **vollständigen Induktion** hilfreich sein.

- **Schritt 1:** Man weist die Gültigkeit der Aussage für die Zahl n_0 nach (**Induktionsanfang**).
- **Schritt 2:** Man nimmt an, die Gültigkeit der Aussage wurde bereits für alle natürlichen Zahlen $n = n_0, n_0 + 1, \ldots, N$ nachgewiesen (**Induktionsvoraussetzung**) und zeigt mit Hilfe dieser Voraussetzung, dass die Aussage auch für $n = N + 1$ wahr ist (**Induktionsschritt**).