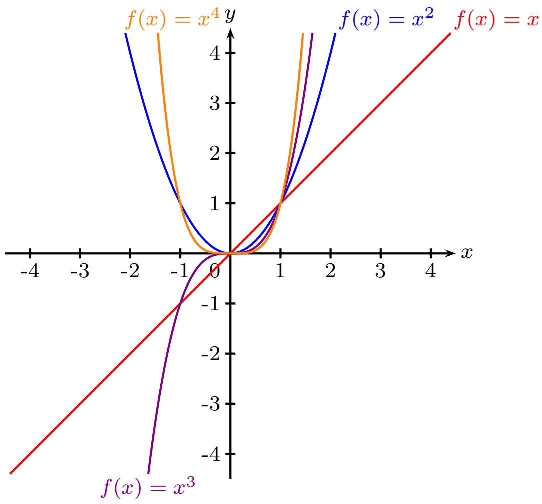
Potenzfunktionen

Spezialfall 1: Exponent positiv und ganzzahlig

Funktionsvorschrift: $f(x) = x^p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ feste Zahl

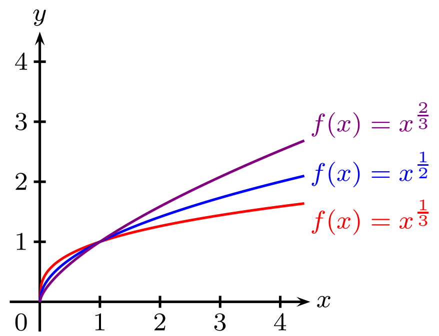


Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	falls p ungerade: $W = \mathbb{R}$ falls p gerade: $W = [0, \infty)$
Nullstellen	$x_0 = 0$
(weitere) wichtige Funktionswerte	$f(1) = 1, \quad f(-1) = \begin{cases} -1, & \text{falls } p \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } p \text{ gerade} \end{cases}$
Symmetrie	falls p ungerade: Graph punktsymmetrisch zum Ursprung falls p gerade: Graph achsensymmetrisch zur y-Achse
Periodizität	–
Monotonie	falls p ungerade: streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$ falls p gerade: streng monoton fallend für $x \leq 0$, streng monoton wachsend für $x \geq 0$
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } p \text{ ungerade,} \\ +\infty, & \text{falls } p \text{ gerade} \end{cases}$
Polstellen	–
kommt wo vor? (Beispiele)	$p = 1$: Abhängigkeiten zueinander proportionaler Größen, etwa Abh. der Kosten von der Warenmenge, Abh. des Kreisumfangs vom Radius $p = 2$: Weg-Zeit-Abh. bei gleichm. beschleunigter Bewegung, Abh. des Kreisflächeninhaltes vom Radius $p = 3$: Abh. des Kugelvolumens vom Radius

Potenzfunktionen
Spezialfall 2: Exponent im Intervall $(0, 1)$

Funktionsvorschrift: $f(x) = x^p$, wobei $p \in (0, 1)$ feste Zahl



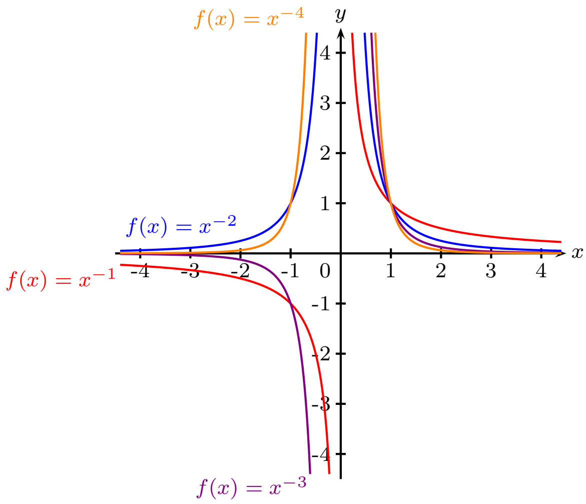
Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich	$D = [0, \infty)$
Wertebereich	$W = [0, \infty)$
Nullstellen	$x_0 = 0$
(weitere) wichtige Funktionswerte	$f(1) = 1$
Symmetrie	–
Periodizität	–
Monotonie	streng monoton wachsend auf ganz $[0, \infty)$
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$
Polstellen	–
kommt wo vor? (Beispiele)	$p = \frac{1}{2}$: Abh. der Schwingungsdauer eines Fadenpendels von dessen Länge, Zeit-Weg-Abh. bei gleichm. beschleunigter Bewegung $p = \frac{2}{3}$: Abh. des Oberflächeninhalts einer Kugel vom Volumen

Potenzfunktionen

Spezialfall 3: Exponent negativ und ganzzahlig

Funktionsvorschrift: $f(x) = x^p$, wobei $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$ feste Zahl

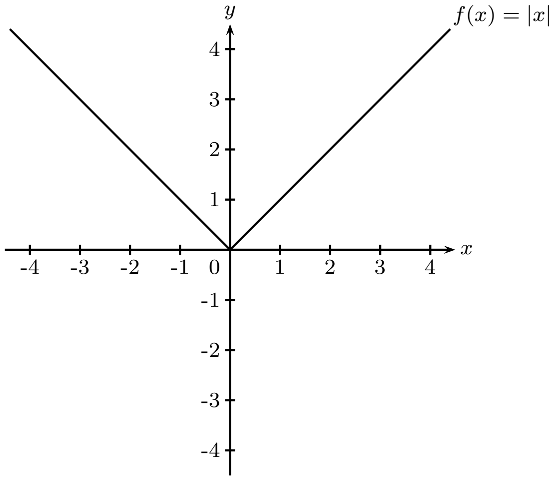


Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Wertebereich	falls p ungerade: $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ falls p gerade: $W = (0, \infty)$
Nullstellen	–
(weitere) wichtige Funktionswerte	$f(1) = 1, \quad f(-1) = \begin{cases} -1, & \text{falls } p \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } p \text{ gerade} \end{cases}$
Symmetrie	falls p ungerade: Graph punktsymmetrisch zum Ursprung falls p gerade: Graph achsensymmetrisch zur y-Achse
Periodizität	–
Monotonie	falls p ungerade: streng monoton fallend für $x < 0$ und für $x > 0$ falls p gerade: streng monoton wachsend für $x < 0$, streng monoton fallend für $x > 0$
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Polstellen	$x_P = 0$
kommt wo vor? (Beispiele)	$p = -1$: Abhängigkeiten indirekt proportionaler Größen, etwa Abh. der benötigten Kraft von der Hebellänge, Abh. der Wellenlänge von der Frequenz $p = -2$: Abh. der Gravitationskraft vom Abstand zweier Körper

Betragsfunktion

Funktionsvorschrift: $f(x) = |x|$

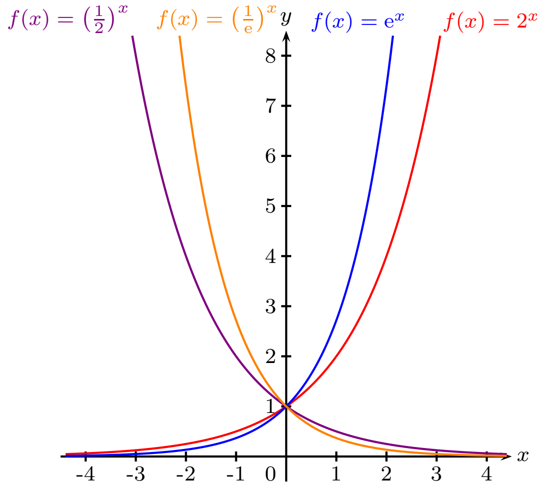


Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	$W = [0, \infty)$
Nullstellen	$x_0 = 0$
(weitere) wichtige Funktionswerte	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$
Symmetrie	achsensymmetrisch zur y-Achse
Periodizität	–
Monotonie	streng monoton fallend für $x \leq 0$, streng monoton wachsend für $x \geq 0$
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
Polstellen	–

Exponentialfunktionen

Funktionsvorschrift: $f(x) = a^x$, $a > 0$ mit $a \neq 1$ feste Zahl

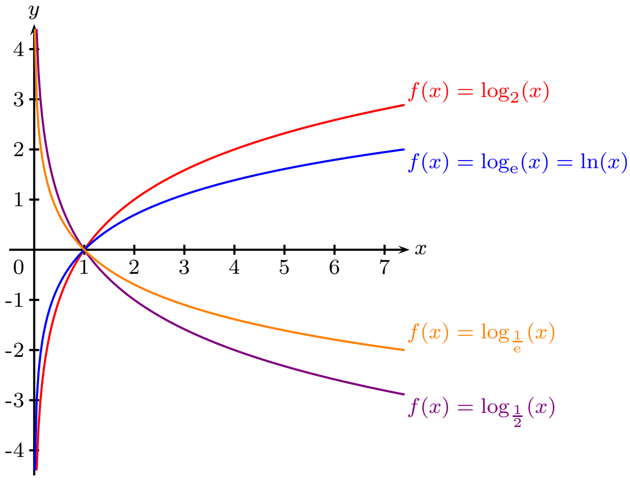


Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	$W = (0, \infty)$
Nullstellen	–
(weitere) wichtige Funktionswerte	$f(0) = 1, \quad f(1) = a, \quad f(-1) = \frac{1}{a}$
Symmetrie	–
Periodizität	–
Monotonie	falls $a > 1$: streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$ falls $a < 1$: streng monoton fallend auf ganz $\mathbb{R}$
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a > 1, \\ 0, & \text{falls } a < 1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a > 1, \\ +\infty, & \text{falls } a < 1 \end{cases}$
Polstellen	–
kommt wo vor? (Beispiele)	$a > 1$: Kapitalwachstum (mit Zinseszins), Vermehrung von Bakterien $a < 1$: radioaktiver Zerfall

Logarithmusfunktionen

Funktionsvorschrift: $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$ mit $a \neq 1$ feste Zahl

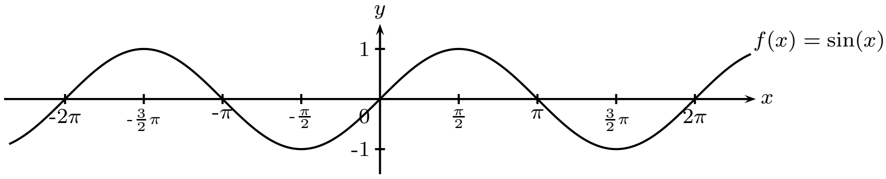


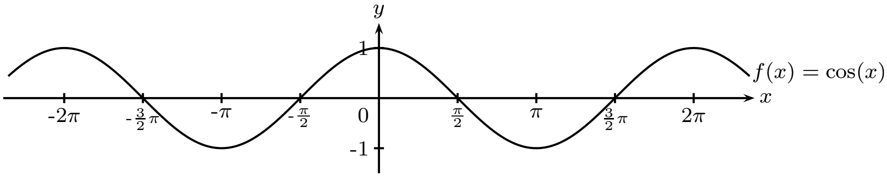
Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich	$D = (0, \infty)$
Wertebereich	$W = \mathbb{R}$
Nullstellen	$x_0 = 1$
(weitere) wichtige Funktionswerte	$f(a) = 1, \quad f(\frac{1}{a}) = -1$
Symmetrie	–
Periodizität	–
Monotonie	falls $a > 1$: streng monoton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$ falls $a < 1$: streng monoton fallend auf ganz $\mathbb{R}$
Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a > 1, \\ -\infty, & \text{falls } a < 1 \end{cases}$
Polstellen	$x_P = 0$
kommt wo vor? (Beispiele)	Abh. des pH-Wertes von der Konzentration der Hydroniumionen, Abh. des Wertes der Richterskala vom maximalen Ausschlag des Seismographen

Sinus- und Kosinusfunktion

Funktionsvorschrift: $f(x) = \sin(x)$ bzw. $f(x) = \cos(x)$





Eigenschaften:

größtmöglicher Definitionsbereich	$D = \mathbb{R}$
Wertebereich	$W = [-1, 1]$
Nullstellen	Sinus: $x_{0k} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ Kosinus: $x_{0k} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
(weitere) wichtige Funktionswerte	siehe Wertetabelle in der Formelsammlung
Symmetrie	Sinus: punktsymmetrisch zum Ursprung Kosinus: achsensymmetrisch zur y-Achse
Periodizität	periodisch mit Periode 2π
Monotonie	Sinus: streng monoton wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], [\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi], \ldots,$ streng monoton fallend auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi], [\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi], \ldots$ Kosinus: streng monoton wachsend auf $[-\pi, 0], [\pi, 2\pi], \ldots,$ streng monoton fallend auf $[0, \pi], [2\pi, 3\pi], \ldots$
Verhalten im Unendlichen	unbestimmt divergent
Polstellen	–
kommt wo vor? (Beispiele)	Abh. der Auslenkung eines Federschwingers oder Fadenpendels von der Zeit, Abh. der Stromstärke und Spannung von der Zeit bei Verwendung von Wechselstrom, Abhängigkeiten von Seitenlängen und Winkeln im Dreieck