Brückenkurs Mathematik

TU Dresden

Lineare Gleichungssysteme

Schwerpunkte: Interpretation und Verständnis der Gleichungen
Lösungsmethoden

Prof. Dr. F. Schuricht
TU Dresden, Fakultät Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung 3

2 Modellbildung 6

3 Geometrische Interpretation 7

4 Alternative geometrische Interpretation 15

5 Determinante und Regelfall 17

6 Lösungsmethoden 20

7 Lösung unterbestimmter und überbestimmter Systeme 28

8 Lösung in Abhängigkeit von Parametern 31

9 Numerische Lösung 33

1 Problemstellung

Betrachte **Gleichungssysteme** mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$

Falls Unbekannte x_k nur in erster Potenz auftreten und nicht miteinander multipliziert werden hat man ein **lineares Gleichungssystem**: allgemeine Form für m **Gleichungen** und n **Unbekannte**:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Die **Koeffizienten** a_{kl} und die **rechten Seiten** b_k sind gegebene (reelle) Zahlen ($k = 1, 2, \ldots, m$, $l = 1, 2, \ldots, n$)

Das Gleichungssystem **lösen** heißt:

finde n (reelle) Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, die eingesetzt jede der m Gleichungen erfüllen

dabei seien alle Größen a_{kl}, b_k, x_k reelle Zahlen (d.h. Elemente aus $\mathbb{R}$)

die Größen i, j, k, l, m, n natürliche Zahlen (d.h. Elemente aus $\mathbb{N}$)

Die (gegebenen) Koeffizienten a_{kl} schreibt man häufig separat in ein Zahlenschema

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und nennt dies auch **Matrix** (konkret $m \times n$-Matrix: m Zeilen, n Spalten).

mit der **Vektorschreibweise**:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

bekommt man die **Kurzform** für das **lineare Gleichungssystem**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \text{statt} \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

im folgenden: nur lineare Gleichungssysteme für $n, m = 1, 2$ bzw. 3

Unbekannte seien x, y, z statt x_1, x_2, x_3

bei Koeffizienten keine doppelten Indizes

z.B. für $m = 2,\ n = 3$:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Resultate können auf allgemeinere Fälle übertragen werden !

2 Modellbildung

viele Probleme in **Naturwissenschaft, Technik, Wirtschaft** führen auf lineare Gleichungssysteme

z.B.:
- lineare Optimierungsprobleme
- Berechnungen für lineare Modelle
- Linearisierung bei nichtlinearen Modellen (Differentiation)
- Näherungsrechnungen mittels Computer

Herleitung der Gleichungen: Aufgabe von Experten des jeweiligen Gebietes
(erfordert spezifische Fachkenntnisse)

Herausforderung: Gleichungssysteme mit sehr vielen Gleichungen

$\longrightarrow$ Lösung (meist mit Computer) benötigt erheblichen Rechenaufwand

(kleinere Gleichungssysteme bereits auf leistungsfähigen Taschenrechnern lösbar)

$\longrightarrow$ effiziente Lösungsmethoden erforderlich

in jedem Fall: theoretisches Verständnis von linearen Gleichungssystemen erforderlich !

3 Geometrische Interpretation

Betrachte geometrische Bedeutung von verschiedenen linearen Gleichungssystemen

Da es sich stets um lineare Gleichungssysteme handelt, wird Begriff „linear“ im folgenden weggelassen !

3.1 Gleichungen mit einer Unbekannten

- **1 Unbekannte, 1 Gleichung:** $ax = b$ $(a \neq 0)$

  gegeben: (reelle) Zahlen a, b

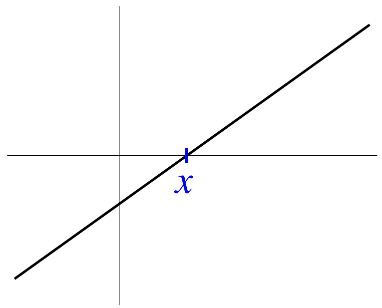
  gesucht: alle (reellen) Zahlen x, die eingesetzt die Gleichung erfüllen

  Betrachte (lineare) Funktion $f(x) = ax - b$

  Lösen der Gleichung entspricht Bestimmung der **Nullstellen** der Funktion f: $f(x) = 0$

  falls $a \neq 0$ (Regelfall) gibt es genau eine Nullstelle, d.h.

  Gleichung hat **genau eine Lösung** $x = \dfrac{b}{a}$



- **1 Unbekannte, 2 Gleichungen:**

$$\boxed{\begin{aligned} a_1 x &= b_1 \\ a_2 x &= b_2 \end{aligned}} \qquad (a_1, a_2 \neq 0)$$

gegeben: $a_1, a_2.b_1, b_2$

gesucht: alle x, die *beide Gleichungen gleichzeitig* erfüllen

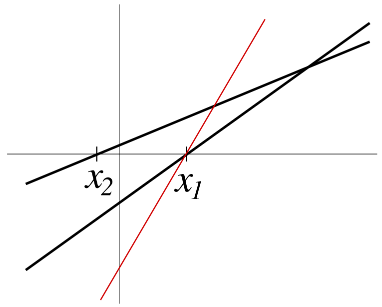
falls $a_1, a_2 \neq 0$ (Regelfall) besitzt *jede Gleichung* eine *eindeutige Lösung* x_1 bzw. x_2

aber in der Regel ist $x_1 \neq x_2$, d.h. es gibt **keine Lösung** des Gleichungssystems

(nur im *Ausnahmefall*, dass eine Gleichung ein Vielfaches der anderen ist hat das System eine Lösung)

man sagt auch: **das Gleichungssystem ist überbestimmt**

(mehr Gleichungen als Unbekannte)



- **1 Unbekannte, mehr als 2 Gleichungen:** analoges Verhalten (d.h. keine Lösung, überbestimmt)

3.2 Gleichungen mit zwei Unbekannten

- **2 Unbekannte, 1 Gleichung**: $ax + by = c$ $\qquad (a^2 + b^2 \neq 0)$

  gegeben: a, b, c

  gesucht: alle (reellen) Zahlen x und y, so dass Gleichung erfüllt ist

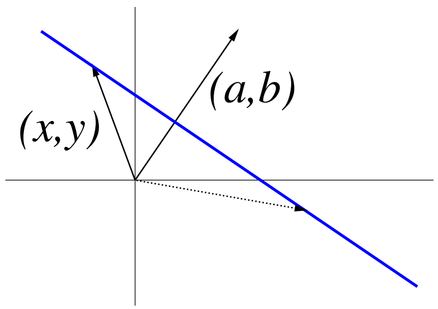
  Beobachtung:

  linke Seite der Gleichung ist das *Skalarprodukt* zweier Vektoren in der xy-Ebene: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

  somit beschreibt die Menge aller Lösungen (x, y) der Gleichung eine **Gerade** in der xy-Ebene

  Gleichung heißt deshalb auch **Geradengleichung**

  folglich hat die Gleichung **unendlich viele Lösungen**

  man sagt auch: **die Gleichung ist unterbestimmt**

  (weniger Gleichungen als Unbekannte)

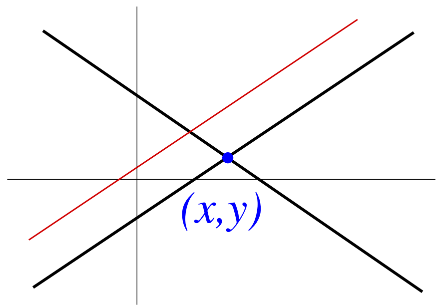
- **2 Unbekannte, 2 Gleichungen:**

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}} \qquad\qquad (a_k^2 + b_k^2 \neq 0, \;\; k = 1, 2)$$

gegeben: a_k, b_k, c_k $(k = 1, 2)$

gesucht: alle (reellen) Zahlen x und y, die beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen

Beobachtung:
Gleichungssystem besteht aus **2 Geradengleichungen**, deren Lösungsmenge jeweils eine Gerade ist



falls sich beide Geraden in einem Punkt (x, y) schneiden (Regelfall), dann:

das Gleichungssystem hat **eindeutige Lösung** (x, y)

im *Ausnahmefall*, dass beide Geraden parallel sind, gibt es 2 Fälle:

- beide Geraden sind verschieden $\longrightarrow$ keine Lösung
- beide Geraden fallen zusammen $\longrightarrow$ jeder Punkt (x, y) dieser Geraden ist Lösung

- **2 Unbekannte, 3 Gleichungen:**

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned}} \qquad\qquad (a_k^2 + b_k^2 \neq 0, \;\; k = 1,2,3)$$

gegeben: a_k, b_k, c_k $(k = 1,2,3)$

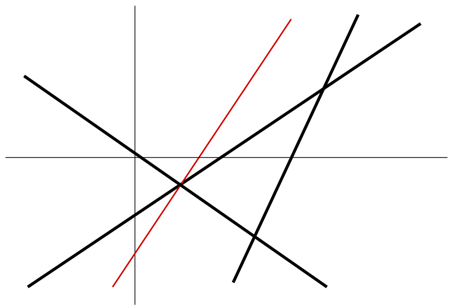
gesucht: alle (reellen) Zahlen x und y, die alle 3 Gleichungen gleichzeitig erfüllen

Beobachtung:

Gleichungssystem besteht aus **3 Geradengleichungen**, deren Lösungsmenge jeweils eine Gerade ist

nur falls sich alle 3 Geraden in einem Punkt schneiden *(Ausnahmefall)* gibt es eine Lösung

in allen anderen Fällen *(Regelfall)* gibt es **keine Lösung**



man sagt wieder: **das Gleichungssystem ist überbestimmt**
(mehr Gleichungen als Unbekannte)

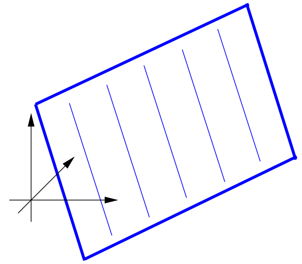
3.3 Gleichungen mit drei Unbekannten

- **3 Unbekante, 1 Gleichung:** $ax + by + cz = d$ $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

Mit Argumenten wie bisher erkennt man:

Menge aller Lösungen (x, y, z) beschreibt eine **Ebene** im 3-dimensionalen xyz-Raum

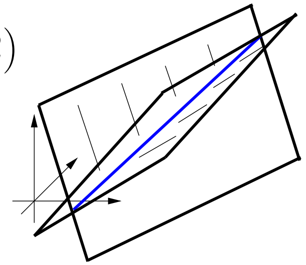
Gleichung heißt deshalb auch **Ebenengleichung**



somit gibt es **unendlich viele Lösungen** und die Gleichung ist **unterbestimmt**.

- **3 Unbekannte, 2 Gleichungen:**

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \end{aligned} \qquad (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 \neq 0, \quad k = 1, 2)$$



man hat **2 Ebenengleichungen**

falls Ebenen nicht parallel sind *(Regelfall)* ist die Schnittmenge eine Gerade im xyz-Raum

somit gibt es wieder **unendlich viele Lösungen** und das System ist **unterbestimmt**

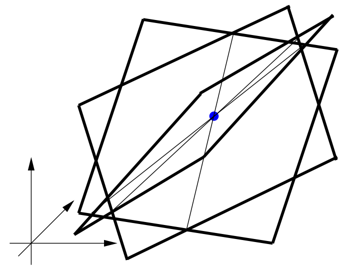
- **3 Unbekannte, 3 Gleichungen:**

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 \neq 0, \;\; k = 1, 2, 3)$$

man hat **3 Ebenengleichungen**

falls die Ebenen paarweise nicht parallel sind *(Regelfall)* gibt es einen **eindeutigen Schnittpunkt**

(beachte: Schnitt zweier Ebenen ist Gerade, Schnitt der Geraden mit dritter Ebene ist Punkt)



dies liefert eine **eindeutige Lösung** des Gleichungssystems

- **3 Unbekannte, 4 und mehr Gleichungen:**

4 oder mehr **Ebenengleichungen** $\longrightarrow$ Schnitt von 4 oder mehr Ebenen

es gibt *(im Regelfall)* **keine Lösung** und das System ist **überbestimmt**

FAZIT:

Abgesehen von Ausnahmefällen zeigen lineare Gleichungssysteme folgendes Lösungsverhalten:

- Anzahl Gleichungen $<$ Anzahl Unbekannte $\xrightarrow{\textbf{unterbestimmt}}$ unendlich viele Lösungen
- Anzahl Gleichungen $=$ Anzahl Unbekannte $\longrightarrow$ genau eine Lösung
- Anzahl Gleichungen $>$ Anzahl Unbekannte $\xrightarrow{\textbf{überbestimmt}}$ keine Lösung

4 Alternative geometrische Interpretation

betrachte **2 Gleichungen** mit **1, 2 bzw. 3 Unbekannten**

interpretiere Gleichungssystem als **eine Gleichung für Vektoren** in der Ebene $(a_1^2+a_2^2 \neq 0,\ b_1^2+b_2^2 \neq 0,\ c_1^2+c_2^2 \neq 0)$

(a)
$$\begin{aligned} a_1 x &= d_1 \\ a_2 x &= d_2 \end{aligned}$$
$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y &= d_2 \end{aligned}$$
$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

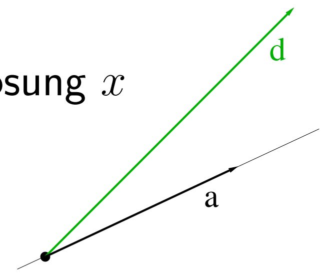
(c)
$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \end{aligned}$$
$$x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Interpretation:

suche geeignete Vielfache der Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, so dass deren Summe gleich $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ ist

Fall (a): nur falls $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ auf einer Geraden liegen *(Ausnahmefall)* gibt es eine Lösung x

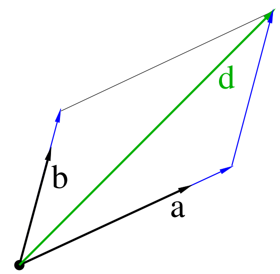
sonst gibt es **keine Lösung** und das System ist **überbestimmt**



Fall (b): falls $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ **linear unabhängig** (d.h. sie liegen nicht auf einer Geraden),

dann gibt es **genau eine Lösung** (x, y)

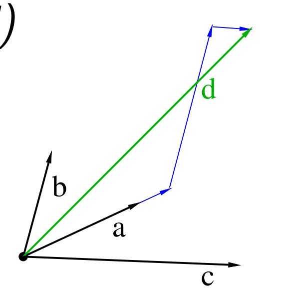
(andere Fälle sind *Ausnahmefälle* und können selbst diskutiert werden)



Fall (c): falls nicht alle drei Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ auf einer Geraden liegen *(Regelfall)*

gibt es **unendlich viele Lösungen** und das System ist **unterbestimmt**

(andere Fälle sind *Ausnahmefälle* und können selbst diskutiert werden)



analog kann man für **drei und mehr Gleichungen** argumentieren

$\longrightarrow$ alternative Interpretation **bestätigt Fazit** aus vorigem Abschnitt

5 Determinante und Regelfall

Gleichungssysteme mit **eindeutiger Lösung** sind für Anwendungen besonders **wichtig**

$\longrightarrow$ betrachte deshalb (vorwiegend) Systeme mit: Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte

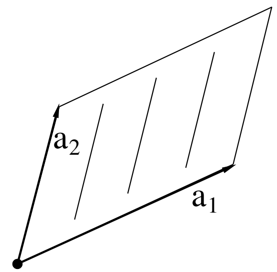
also z.B.

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

Frage: Test ob ein **reguläres Gleichungssystem** vorliegt (d.h. kein Ausnahmefall)

(a) durch einzelne Gleichungen bestimmte Geraden dürfen **nicht parallel** sein

(b) Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ müssen **linear unabhängig** sein



Idee: Fläche des von $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms darf nicht Null sein

Die sogenannte **Determinante** $\det A$ der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

ist ein **vorzeichenbehafteter Flächeninhalt** des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms

für **allgemeine** $n \times n$-Matrix A ist die Determinante $\det A$

ein vorzeichenbehaftetes Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Parallelkörpers, also

$|\det A| =$ Volumen des zugehörigen Parallelkörpers

$\longrightarrow$ falls $\mathbf{det\ A \neq 0}$, dann ist Gleichungssystem $Ax = b$ **regulär** und hat **eindeutige** Lösung

Berechnung der Determinante:

$n = 2$: $$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

z.B. $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-1) = 5 \quad \longrightarrow$ Matrix regulär

$n = 3$: $$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}}$$

z.B. $$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{matrix}\right]$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2$$

$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0 \quad \longrightarrow$ Matrix nicht regulär

6 Lösungsmethoden

betrachte folgende **wichtige Lösungsmethoden:**

- Gleichsetzungsverfahren
- Einsetzungsverfahren
- Additionsverfahren
- Gaußscher Algorithmus
- Cramersche Regel

für wenige Gleichungen von Hand ausführbar, für viele Gleichungen mittels Computer

Demonstration der Techniken:
betrachte stets **2 Gleichungen mit 2 Unbekannten**
und jeweils **allgemeinen Fall** (links) und ein **konkretes Beispiel** (rechts)

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

System sei **stets regulär**, d.h. $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ (konkret $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 5$ vgl. Bsp.)

6.1 Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

Auflösen beider Gleichungen nach der gleichen Unbekannten, z.B. nach x (dafür seien $a_{11}, a_{21} \neq 0$):

$$x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y \qquad\qquad x = -y + 3$$

$$x = \frac{b_2}{a_{21}} - \frac{a_{22}}{a_{21}}y \qquad\qquad x = 4y - 2$$

Gleichsetzen ($x = x$) beider Gleichungen:

$$\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y = \frac{b_2}{a_{21}} - \frac{a_{22}}{a_{21}}y \qquad\qquad -y + 3 = 4y - 2$$

Auflösen nach y:

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad\qquad y = 1$$

Lösung in eine der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen (z.B. in die erste) und man erhält x:

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad\qquad x = 2$$

(beachte: im Nenner der Lösungen steht jeweils die Determinante $\det A$)

6.2 Einsetzungsverfahren

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 2 \end{aligned}}$$

Auflösen einer Gleichung nach einer Unbekannten, z.B. der ersten Gleichung nach x

$$x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y \qquad x = -y + 3$$

Einsetzen des Ergebnisses in die andere Gleichung, d.h. hier in die zweite Gleichung:

$$a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right) + a_{22}y = b_2 \qquad -(-y + 3) + 4y = 2$$

Auflösen nach der verbleibenden Unbekannten, hier nach y, führt zu:

$$\boxed{y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \qquad \boxed{y = 1}$$

Die zweite Unbekannte berechnet man wie beim Gleichsetzungsverfahren:

$$\boxed{x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \qquad \boxed{x = 2}$$

6.3 Additionsverfahren

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 2 \end{aligned}}$$

Addition eines bestimmten (evtl. auch negativen) Vielfachen der ersten Gleichung zu einem bestimmten Vielfachen der zweiten Gleichung derart, dass eine Unbekannte nicht mehr auftritt.

Konkret multiplizieren wir die erste Gleichung mit $-a_{21}$, die zweite mit a_{11} und addieren die so entstandenen Gleichungen:

$$-a_{21}a_{12}y + a_{11}a_{22}y = -a_{21}b_1 + a_{11}b_2 \qquad 5y = 5$$

Auflösen nach y liefert

$$\boxed{y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \qquad \boxed{y = 1}$$

Analog multipliziert man die erste Gleichung mit $-a_{22}$, die zweite mit a_{12} und addiert die entstandenen Gleichungen:

$$-a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{21}x = -a_{22}b_1 + a_{12}b_2 \qquad -5x = -10$$

Auflösen nach x liefert

$$\boxed{x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}} \qquad \boxed{x = 2}$$

6.4 Gaußscher Algorithmus

Gaußscher Algorithmus (auch Gaußsches Eliminationsverfahren):

ist Kombination von Additions- und Einsetzungsverfahren

Prinzip:
- man multipliziert und addiert Gleichungen derart, dass eine Dreiecksstruktur entsteht
- Berechnung der Unbekannten durch Rückrechnung (Einsetzungsverfahren)

betrachte wieder

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

übernehme 1. Gleichung unverändert und

multipliziere 1. Gleichung mit $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ und addiere so entstandene Gleichung zur zweiten

$\longrightarrow$ liefert neue Gleichung ohne x: $\tilde{a}_{22}y = \tilde{b}_2$ mit $\tilde{a}_{22} = a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}$, $\tilde{b}_2 = b_2 - \dfrac{b_2 a_{21}}{a_{11}}$

verwende diese neue Gleichung anstelle der 2. Gleichung, d.h. man hat neues (gleichwertiges) System

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ \tilde{a}_{22}y &= \tilde{b}_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 5y &= 5 \end{aligned}$$

neues System hat nun **Dreiecksstruktur**

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ \tilde{a}_{22}y &= \tilde{b}_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 5y &= 5 \end{aligned}$$

Auflösen von unten beginnend: löse 2. Gleichung nach y auf

$$y = \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} \qquad\qquad y = 1$$

setze erhaltene Lösung in 1. Gleichung ein, um x zu berechnen:

$$x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} \qquad\qquad x = -1 + 3 = 2$$

Hinweis:

- bei auftretenden Multiplikationsfaktoren dürfen die Nenner nicht Null sein
  (evtl. Zeilen tauschen $\longrightarrow$ geht immer !)
- Gaußscher Algorithmus ist besonders für Lösung linearer Gleichungssysteme mittels Computer geeignet

6.5 Cramersche Regel

betrachte erneut

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ -x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

mit $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ $\qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = 5$

ersetze in Koeffizientenmatrix A die 1. Spalte bzw. die 2. Spalte durch rechte Seite der Gleichung

berechne für neue Matrizen A_1 bzw. A_2 die Determinante

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2 \qquad \det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21} \qquad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

verwendet man die Eigenschaft der Determinante als (vorzeichenbehaftete) Fläche, kann man zeigen

falls (x, y) Lösung des Systems, dann $\det A_1 = x \det A$ und $\det A_2 = y \det A$

dies ergibt für die eindeutige Lösung des Gleichungssystems die sogenannte **Cramersche Regel**

$$\boxed{x = \frac{\det A_1}{\det A}\,, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}} \qquad\qquad \boxed{x = \frac{10}{5} = 2\,, \quad y = \frac{5}{5} = 1}$$

Sonderfälle:

(a) Falls $\det A = \det A_1 = \det A_2 = 0$, dann liegen die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ auf einer Geraden

$\longrightarrow$ eine Gleichung ist Vielfaches der anderen Gleichung $\longrightarrow$ unendlich viele Lösungen

(b) Falls $\det A = 0$ und $\det A_1 \neq 0$ oder $\det A_2 \neq 0$, dann

Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ liegen auf einer Geraden und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ liegt auf anderer Geraden (sofern $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$)

$\longrightarrow$ es gibt keine Lösung

7 Lösung unterbestimmter und überbestimmter Systeme

Lösung auch z.B. mit
- Einsetzungsverfahren
- Gleichsetzungsverfahren
- Additionsverfahren

zwei Beispiele demonstrieren, welche typischen Ergebnisse auftreten

unterbestimmt: betrachte 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten (im Regelfall unendlich viele Lösungen)

$$\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ x + y - 5z &= 4 \end{aligned}$$

überbestimmt: betrachte 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten (im Regelfall keine Lösung)

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 4 \\ -x + y &= 6 \end{aligned}$$

7.1 Unterbestimmtes System

$$\boxed{\begin{aligned} x - y - z &= 2 \\ x + y - 5z &= 4 \end{aligned}}$$

Auflösen der 1. Gleichung nach x: $x = y + z + 2$

Einsetzen in die 2. Gleichung: $2y - 4z = 2$

Auflösen dieser Gleichung nach y: $\boxed{y = 2z + 1}$

Einsetzen in die Gleichung für x: $\boxed{x = 3z + 3}$

Interpretation des Ergebnisses

jeder beliebige Wert für z, eingesetzt in die Lösungsformel, liefert eine Lösung des Gleichungssystems

z.B. $z = 1 \longrightarrow$ Lösung $(x, y, z) = (6, 3, 1)$

$z = -2 \longrightarrow$ Lösung $(x, y, z) = (-3, -3, -2)$

auf diese Weise erhält man alle **unendlich vielen** Lösungen

beachte: Lösungsmenge ist eine Gerade im 3-dimensionalen xyz-Raum

7.2 Überbestimmtes System

$$\boxed{\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + y &= 4 \\ -x + y &= 6 \end{aligned}}$$

bestimme die Lösung von zwei Gleichungen, z.B. der ersten beiden:

Addition der Gleichungen liefert: $2x = 6 \longrightarrow \boxed{x = 3}$

Einsetzen in die 1. Gleichung liefert: $3 - y = 2 \longrightarrow \boxed{y = 1}$

Einsetzen dieser eindeutigen Lösung $(x, y) = (3, 1)$ in verbliebene dritte Gleichung:

$$\boxed{-3 + 1 \neq 6}$$

$\longrightarrow$ System hat **keine Lösung**

8 Lösung in Abhängigkeit von Parametern

In Anwendungen sind oft nicht sofort alle Werte für die Koeffizienten a_{kl} bzw. für die rechte Seite b_k gegeben
z.B. da sie **Parameter** sind, die sich oft ändern

$\longrightarrow$ es ist sinnvoll, die Lösung in Abhängigkeit eines (oder auch mehrerer) Parameter darzustellen

Demonstration am folgenden einfachen **Beispiel**:

$$\boxed{\begin{aligned} ax - y &= 2 \\ x + y &= 4 \end{aligned}} \qquad \det\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a + 1$$

(d.h. regulär für $a \neq -1$)

z.B. Auflösen der 1. Gleichung nach y: $y = ax - 2$

dies in die 2. Gleichung einsetzen: $x + ax - 2 = 4$

Auflösen nach x:

$$\boxed{x = \frac{6}{1+a}}$$

Einsetzen in die Gleichung für y:

$$\boxed{y = \frac{6a}{1+a} - 2}$$

Lösung in Abhängigkeit vom Parameter a:

$$\boxed{x = \frac{6}{1+a}} \qquad \boxed{y = \frac{6a}{1+a} - 2}$$

$\longrightarrow$ für **jede Wahl des Parameters** $a \neq -1$ kann man die eindeutige Lösung sofort ausrechnen

z.B. $a = 1 \longrightarrow$ Lösung $(x, y) = (3, 1)$

$a = 0 \longrightarrow$ Lösung $(x, y) = (6, -2)$

im Fall $a = -1$ ist $\quad \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 - (-1) = 0$

$\longrightarrow$ es liegt ein *Ausnahmefall* vor

(Spaltenvektoren von A sind gleich, aber verschieden von rechter Seite $\rightarrow$ es gibt keine Lösung)

9 Numerische Lösung

klassisches Verfahren: Gaußsches Eliminationsverfahren
aber: für große Matrizen zu aufwändig

heute: ausgereifte effektive Verfahren, insbesondere etliche Spezialverfahren für spezielle Matrizen (z.B. symmetrisch, positiv definit, dünn besetzt)

praktisch: benutze Programmpakete wie z.B. **Maple, Mathematica, Matlab**
enthalten u.a. Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

beachte: grundsätzlich 2 verschiedene Lösungsmöglichkeiten

- numerische Näherunglösung (Normalfall)
- exakte formelmäßige Lösung mittels Computeralgebra-System (falls möglich)
  (insbesondere hilfreich bei Abhängigkeit von Parametern)

Vorsicht: Verfahren funktionieren gut solange Matrix nicht **"schlecht konditioniert"** ist

Beispiel: betrachte (reguläres) Gleichungssystem (Determinante $\det A = 1$)

$$\begin{aligned} 941664x - 665857y &= 1 \\ 665857x - 470832y &= 0 \end{aligned}$$

exakte Lösung (z.B. mittels Cramerscher Regel)

$$x = -470832\,, \quad y = -665857$$

numerische Lösung (mit 12 Gleitkommastellen) mittels **Gleichsetzungsverfahren** liefert z.B.

- bei Auflösung jeweils nach x: $x = -750911,982606 \quad y = -1061949,90995$
- bei Auflösung jeweils nach y: $x = -150182,396521 \quad y = -\ 212389,9819907$

mittels **Gaußschen Verfahren** ("bessere" Lösung)

$$x = -500000,000000 \quad y = -\ 707106,781187$$

Ursache für sehr großen Fehler: **schlechte Kondition** (Bsp.: Gleichungen repräsentieren fast parallele Geraden)

$\longrightarrow$ Stellenauslöschung bei Differenzbildung in Verbindung mit Division

(verwende Verfahren, die derartige Stellenauslöschungen weitestgehend vermeiden
verwende Vorkonditionierung)