Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

1. Übung am 24. September 2024
Thema: Logik, Mengenlehre

Schwerpunktaufgaben: 2, 3, 4, 5, 8, 9

Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie kennen die Begriffe „Aussage“ und „Wahrheitswert einer Aussage“ und sind dazu in der Lage, für vorgegebene Aussagen p und q die Aussageverbindungen $p \wedge q$, $p \vee q$ und $\overline{p}$ zu formulieren und ihren Wahrheitswert zu bestimmen.
- Sie kennen die Bedeutung des Allquantors $\forall$ und des Existenzquantors $\exists$.
- Sie verstehen den Unterschied zwischen einer notwendigen Bedingung und einer hinreichenden Bedingung für eine Aussage.
- Sie beherrschen den Umgang mit den Mengenoperationen „$\cap$“ (Durchschnitt), „$\cup$“ (Vereinigung) und „$\setminus$“ (Mengendifferenz), insbesondere im Zusammenhang mit Intervallen.
- Sie wissen, was unter dem kartesischen Produkt zweier Mengen zu verstehen ist.

Passende Online-Zusatzangebote:

Im Online-Vorbereitungskurs Mathematik der TU Dresden[1] bietet sich das Kapitel zu Aussagenlogik und Mengenlehre, insbesondere die in den Abschnitten „Aussagenlogik“ und „Mengenlehre“ bereitgestellten Selbsttests und Lernvideos, zum Wiederholen, Vertiefen und weiteren Üben dieses Themas an.

Passende Literatur:

- Abschnitt 1.1 zum Thema Logische Grundlagen und Aussagen und Abschnitt 1.3 zum Thema Mengen im Lehrbuch
  Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Kapitel 2 zum Thema Mengenlehre im Lehrbuch
  Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 1.2.1 sowie 1.2.2 zum Thema Logik und Abschnitt 1.1 zum Thema Mengenlehre im Lehrbuch
  Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

[1] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826`

Übungsaufgaben Teil 1: Logik

Aufgabe 1 (Aussagen im Sinne der Aussagenlogik, Wahrheitswert von Aussagen)
Was versteht man unter einer Aussage? Bei welchen der folgenden sprachlichen Gebilde handelt es sich um Aussagen? Bestimmen Sie ggf. den Wahrheitswert.

(a) „$\frac{\pi}{2}$ ist größer als 1."

(b) „4 ist eine ungerade Zahl."

(c) „x ist größer als 3."

(d) „$x = 1$ ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + 2x - 3 = 0$."

Aufgabe 2 (Wichtige Aussageverbindungen)
Es werden die folgenden Aussagen betrachtet:

p : „5 ist eine ungerade Zahl."

q : „5 ist eine Primzahl."

r : „5 ist eine durch 3 teilbare Zahl."

(a) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagen p, q und r.

(b) Formulieren Sie die folgenden Aussageverbindungen mit Worten und bestimmen Sie ihren Wahrheitswert.

$$\overline{p}, \quad \overline{r}, \quad p \wedge q, \quad p \wedge r, \quad p \vee q,$$
$$p \vee r, \quad \overline{p \wedge r}, \quad \overline{p} \wedge \overline{r}, \quad \overline{p} \vee \overline{r}$$

Aufgabe 3 (Aussagen mit dem Existenz- bzw. dem Allquantor)
Formulieren Sie die folgenden Aussagen, die unter Verwendung der Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor) gegeben sind, mit Worten und bestimmen Sie ihren Wahrheitswert. Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ wird dabei die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet (beginnend bei 1), mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ (b) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 2$
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ (d) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
(e) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 2n$ (f) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 2n$
(g) $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} : y \leq x$ (h) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : y < x$

Aufgabe 4 (Notwendige und hinreichende Bedingungen für Aussagen)
Angenommen, p ist eine Aussage. Falls eine Aussage q von p impliziert wird (das heißt, falls q aus p folgt), dann heißt q *notwendige Bedingung* für p. Falls eine Aussage q die Aussage p impliziert (das heißt, falls p aus q folgt), dann heißt q *hinreichende Bedingung* für p.

(a) Gegeben sei eine reelle Zahl x. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass $x^2 \geq 4$ gilt?

(a1) Es gilt $x \geq 2$.
(a2) Es gilt $|x| \geq 2$.
(a3) Es gilt $2x^2 > 5$.

(b) Gegeben sei ein Viereck $ABCD$. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass das Viereck ein Rechteck ist?

  (b1) Die jeweils gegenüber liegenden Seiten des Vierecks sind zueinander parallel.

  (b2) Alle Seiten des Vierecks sind gleich lang.

  (b3) Alle Seiten des Vierecks sind gleich lang und alle Innenwinkel sind rechte Winkel.

(c) Gegeben seien eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $x^* \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass x^* eine lokale Extremstelle von f ist?

  (c1) Es gilt $f'(x^*) = 0$.

  (c2) Es gilt $f''(x^*) \neq 0$.

  (c3) Es gilt $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \neq 0$.

Übungsaufgaben Teil 2: Mengenlehre

Aufgabe 5 (Wichtige Mengenoperationen und weitere Grundbegriffe der Mengenlehre)
In den folgenden Teilaufgaben sind jeweils zwei Mengen A und B gegeben. Bestimmen Sie jeweils $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ und $B \setminus A$. In welchen Teilaufgaben sind die Mengen A und B disjunkt? In welchen Teilaufgaben ist eine Menge eine Teilmenge der anderen?

(a) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

(c) $A = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

Aufgabe 6 (Unterschiedliche Möglichkeiten der Charakterisierung einer Menge)
Geben Sie die folgenden Mengen an, indem Sie jeweils ihre Elemente explizit aufführen. Dabei bezeichnet $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ jeweils wieder die Menge der natürlichen Zahlen (beginnend bei 1).

(a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist sowohl Teiler von 45 als auch Teiler von 60}\}$

(b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist sowohl ein Vielfaches von 6 als auch von 10}\}$

(c) $C = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\right\}$

(d) $D = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 5\right\}$

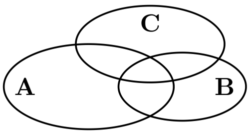
(e) $E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 5\right\}$

Aufgabe 7 (Teilmengen von Mengen)
Geben Sie alle Teilmengen der Menge $A = \{1, 2, 3\}$ an.

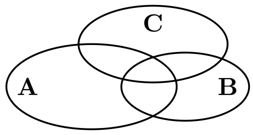
Aufgabe 8 (Veranschaulichung von Mengenverknüpfungen im Mengendiagramm)

(a) Gegeben seien drei nichtleere Mengen A, B und C. Schraffieren Sie die folgenden Mengen im Mengendiagramm.

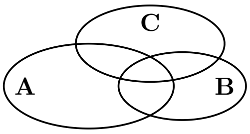
(a1) $A \cup B \cup C$



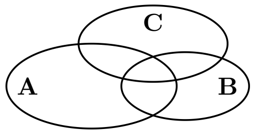
(a2) $A \cap B \cap C$



(a3) $(A \cap B) \cup C$

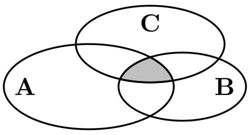


(a4) $(A \cup B) \setminus C$

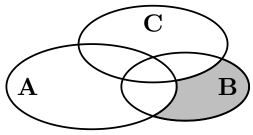


(b) Gegeben seien drei nichtleere Mengen A, B und C. Beschreiben Sie in den folgenden Teilaufgaben die grau unterlegten Mengen mit Hilfe der Mengen A, B, C und der bekannten Mengenoperationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$.

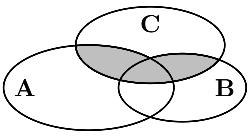
(b1)



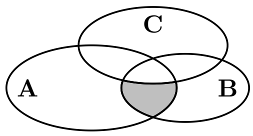
(b2)



(b3)



(b4)



Aufgabe 9 (Intervalle und Verknüpfungen zwischen Intervallen)
Zeichnen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils die Intervalle A und B auf einem Zahlenstrahl. Kennzeichnen Sie auf dem Zahlenstrahl jeweils $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ sowie $B \setminus A$ und geben Sie diese Mengen in der Intervallschreibweise an.

(a) $A = (0, 3]$, $B = (2, 4)$

(b) $A = [0, 2]$, $B = (2, 4)$

(c) $A = [0, 2]$, $B = [2, 4)$

Aufgabe 10 (Eine weitere Aufgabe zu Intervallen und Verknüpfungen zwischen Intervallen)
Schreiben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe der Intervallschreibweise auf, ggf. auch als Vereinigung mehrerer Intervalle.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x < 2\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x > 2\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 1 \wedge x \leq 2) \vee x \leq -1 \vee x > 7\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2)^2 < 1\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < 1 \vee x \geq 5) \wedge x^2 \leq 36\}$

Aufgabe 11 (Kartesisches Produkt zweier Mengen)
Bestimmen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils das kartesische Produkt $A \times B$ der beiden gegebenen Mengen A und B und skizzieren Sie dieses im xy-Koordinatensystem.

(a) $A = [1, 2]$, $B = [1, 3]$

(b) $A = (1, 2]$, $B = [0, 2)$

(c) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = [-1, 2]$

Aufgabe 12 (Unterschied zwischen Elementen und Teilmengen einer Menge)
In dieser Aufgabe geht es um den Unterschied zwischen den beiden Eigenschaften „ist Element von“ und „ist Teilmenge von“.
Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$, $D = \{3\}$, $E = \{1, B, D\}$ und $F = \{1, 3, B\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig, welche falsch?

(a) $3 \in B$	(b) $3 \in E$	(c) $1 \in E$	(d) $\{1\} \subseteq E$
(e) $\{3\} \in E$	(f) $\{1\} \in E$	(g) $B \subseteq A$	(h) $D \subseteq E$
(i) $D \in E$	(j) $D \subseteq B$	(k) $D \in B$	(l) $B \in F$
(m) $B \subseteq F$	(n) $\emptyset \subseteq D$	(o) $E \subseteq F$	(p) $F \subseteq E$
(q) $A \cap B = B$	(r) $B \cap E = \{1\}$	(s) $A \cup D = A$	(t) $D \cap E = D$
(u) $D \cap E = \emptyset$			