

1. Übung am 24. September 2024 für die Gruppe „Lehramt Math Spezial“
Thema: Logik, Mengenlehre

Das erste Übungsblatt beschäftigt sich mit Aussagenlogik und Mengenlehre. Lösen Sie auch gern das erste Übungsblatt des regulären Brückenkurses (d. h., für alle anderen Gruppen). Für die Theorie wird das Buch „Einführung in das mathematische Arbeiten“ von Hermann Schichl und Roland Steinbauer verwendet. In einigen Aufgaben sind geeignete Seiten daraus zur Erarbeitung der Theorie angegeben. Bitte schauen Sie sich diese nach Möglichkeit vorher schon an. Haben Sie keine Angst, wenn Sie nicht sofort alles verstehen, dafür ist der Brückenkurs schließlich da. Das Buch können Sie kostenfrei über die SLUB herunterladen¹, solange Sie mit dem Netz der TU Dresden (eduroam) verbunden sind.

Übungsaufgaben Teil 1: Logik, Aussagen, Quantoren

Aufgabe 1 S. 63-66 bis Beispiel 3.1.2, S. 73 ab Kapitel 3.2 bis S. 81 Beispiel 3.2.4

Es seien p, q und r beliebige Aussagen. Zeigen Sie mithilfe von Wahrheitstabelle die Gültigkeit folgender Gesetze:

- (a) $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ und $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (Assoziativgesetze)
- (b) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ und $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributivgesetze)
- (c) $p \vee 0 = p$ und $p \wedge 1 = p$ (Neutralitätsgesetze)
- (d) $p \vee 1 = 1$ und $p \wedge 0 = 0$ (Extremalgesetze)
- (e) $p \vee \neg p = 1$ und $p \wedge \neg p = 0$ (Komplementaritätsgesetze)

Aufgabe 2 S. 73 Beispiel 3.1.16

Es seien p und q beliebige Aussagen und r eine falsche Aussage. Zeigen Sie folgende Gleichheiten:

- (a) $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- (b) $p \Rightarrow q = \neg q \Rightarrow \neg p$ (Prinzip der Kontraposition)
- (c) $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ und $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ (Gesetze von De Morgan)
- (d) $p \Rightarrow q = (p \wedge \neg q) \Rightarrow r$
- (e) $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$

Aufgabe 3 S. 88 ab Beispiel 3.2.14 bis S. 89

Eine Tautologie ist eine Aussageverbindung, die stets wahr ist, unabhängig davon welche Wahrheitswerte einzelne Aussagen annehmen. Eine Kontradiktion ist eine Aussageverbindung, die stets falsch ist, unabhängig davon welche Wahrheitswerte einzelne Aussagen annehmen.

Es seien p, q und r Aussagen. Untersuchen Sie für jede der nachfolgenden Aussageverbindungen, ob es sich um eine Tautologie oder um eine Kontradiktion handelt. In einigen Teilaufgaben können die Regeln aus den Aufgaben 1 und 2 hilfreich sein.

¹URL: <https://katalog.slub-dresden.de/id/0-1030104662>

- (a) $(\neg p \vee q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
 (b) $((q \Rightarrow p) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$
 (c) $q \vee (q \Rightarrow p)$
 (d) $((p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Zusatzaufgabe: Lösen Sie die Aufgabe 3.2.16 von Seite 89.

Aufgabe 4 S. 90 bis Seite 96 Aufgabe 3.2.18.

Formulieren Sie die folgenden Aussagen mit Worten und bestimmen Sie ihren Wahrheitswert. Negieren Sie außerdem die Aussagen. Welches Prinzip fällt Ihnen dabei auf?

- | | |
|--|---|
| (a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$ | (b) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = 2$ |
| (c) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ | (d) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ |
| (e) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 2n$ | (f) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 \geq 2n$ |
| (g) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y \leq x$ | (h) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y < x$ |

Hinweis: Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet (beginnend bei 1), mit \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen.

Zusatzaufgabe: Lösen Sie die Aufgabe 3.2.21 S. 96-97.

Aufgabe 5

Formulieren Sie folgende Aussagen in Quantoren-Schreibweise:

- (a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt: 0 ist kleiner als oder gleich n .
 (b) Für alle natürlichen Zahlen n , die größer als 3 sind, gilt: 2^n ist größer als oder gleich n^2 .
 (c) Für jede reelle Zahl x existiert genau eine reelle Zahl y , sodass gilt: $x + y = 0$.
 (d) Für jede negative reelle Zahl x gilt: Es gibt keine reelle Zahl y , sodass gilt: $y^2 = x$.
 (e) Für alle natürlichen Zahlen n , die durch 6 teilbar sind, gilt: n ist durch 3 und 2 teilbar.

Hinweise:

- „ t teilt a “ schreibt man als „ $t|a$ “ bzw. „ $a = k \cdot t$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$ “
- Schreiben Sie den Sachverhalt als Implikation.

- (f) Für jede reelle Zahl x gilt: Der Betrag von x ist größer als oder gleich x .
 (g) Für alle reellen Zahlen x, y, a und b gilt: Wenn x kleiner als a und y kleiner als b ist, dann ist $x + y$ kleiner als $a + b$.

Aufgabe 6

Formulieren Sie gemäß der Regel der Kontraposition folgende Aussagen äquivalent um.

- (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > n \Rightarrow n > 1$
 (b) $\forall n \in \mathbb{N} : 12 | n \Rightarrow 3 | n$
 (c) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade}$

Aufgabe 7

Es sei E die Menge, die alle Ebenen, und D die Menge, die alle Dreiecke im Raum \mathbb{R}^3 enthält. Formulieren Sie folgende Aussagen in Quantorenschreibweise und verneinen Sie diese.

- (a) Wenn zwei Ebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel zueinander.
- (b) Es gibt Dreiecke, die genau zwei rechte Innenwinkel haben.

Übungsaufgaben Teil 2: Mengenlehre

Aufgabe 8

Geben Sie die folgenden Mengen an, indem Sie jeweils ihre Elemente explizit auflisten. Dabei bezeichnet $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ jeweils wieder die Menge der natürlichen Zahlen (beginnend bei 1).

- (a) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist sowohl Teiler von 45 als auch Teiler von 60}\}$
- (b) $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist sowohl ein Vielfaches von 6 als auch von 10}\}$
- (c) $C = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\}$
- (d) $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 5\}$
- (e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 5\}$

Aufgabe 9

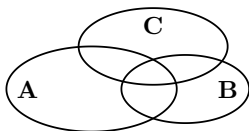
Geben Sie eine Formulierung für die folgenden Mengen an. Orientieren Sie sich an Aufgabe 8.

- (a) die Menge der natürlichen, geraden Zahlen
- (b) die Menge der reellen Zahlen, die die Gleichung $x^2 = 4$ lösen
- (c) die Menge der reellen Zahlen, die nicht in der Menge der rationalen Zahlen liegen
- (d) die Menge der positiven reellen Zahlen, deren Quadrat größer als die Zahl selbst ist

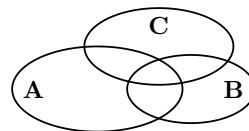
Aufgabe 10

- (a) Gegeben seien drei nichtleere Mengen A , B und C . Schraffieren Sie die folgenden Mengen im Mengendiagramm.

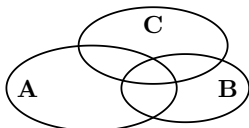
(a1) $A \cup B \cup C$



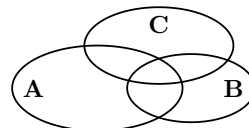
(a2) $A \cap B \cap C$



(a3) $(A \cap B) \cup C$

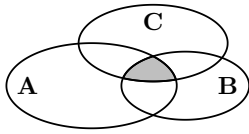


(a4) $(A \cup B) \setminus C$

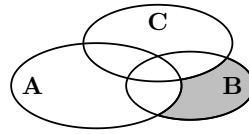


(b) Gegeben seien drei nichtleere Mengen A , B und C . Beschreiben Sie in den folgenden Teilaufgaben die grau unterlegten Mengen mit Hilfe der Mengen A, B, C und der bekannten Mengenoperationen \cup, \cap, \setminus .

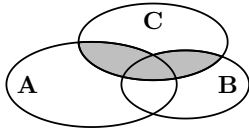
(b1)



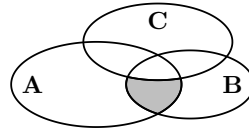
(b2)



(b3)



(b4)



Aufgabe 11

Zeichnen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils die Mengen A und B auf einem Zahlenstrahl. Kennzeichnen Sie auf dem Zahlenstrahl jeweils $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ sowie $B \setminus A$ und geben Sie diese Mengen an.

(a) $A = (0, 3], B = (2, 4)$

(b) $A = [0, 2], B = (2, 4)$

(c) $A = [0, 2], B = [2, 4)$

Aufgabe 12

Schreiben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe der Intervallschreibweise auf, ggf. auch als Vereinigung mehrerer Intervalle.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \wedge x < 2\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x > 2\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x > 1 \wedge x \leq 2) \vee x \leq -1 \vee x > 7\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 4\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 2)^2 < 1\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < 1 \vee x \geq 5) \wedge x^2 \leq 36\}$

Aufgabe 13

In dieser Aufgabe geht es um den Unterschied zwischen den beiden Eigenschaften „ist Element von“ und „ist Teilmenge von“.

Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$, $D = \{3\}$, $E = \{1, B, D\}$ und $F = \{1, 3, B\}$. Welche der folgenden Beziehungen sind richtig, welche falsch?

- | | | | |
|----------------------------|-----------------------------|---------------------|-------------------------|
| (a) $3 \in B$ | (b) $3 \in E$ | (c) $1 \in E$ | (d) $\{1\} \subseteq E$ |
| (e) $\{3\} \in E$ | (f) $\{1\} \in E$ | (g) $B \subseteq A$ | (h) $D \subseteq E$ |
| (i) $D \in E$ | (j) $D \subseteq B$ | (k) $D \in B$ | (l) $B \in F$ |
| (m) $B \subseteq F$ | (n) $\emptyset \subseteq D$ | (o) $E \subseteq F$ | (p) $F \subseteq E$ |
| (q) $A \cap B = B$ | (r) $B \cap E = \{1\}$ | (s) $A \cup D = A$ | (t) $D \cap E = D$ |
| (u) $D \cap E = \emptyset$ | | | |