Prof. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

1. Übung am 24. September 2024 für die Gruppe „Math/Phys Spezial"

Dieses erste Übungsblatt beschäftigt sich mit Grundlagen der Logik. Dabei wird hier eine naive Prädikatenlogik benutzt, da wir nicht die Zeit und die Mittel haben, um alles rigoros aufzubauen. Aber die Auseinandersetzung mit diesem Übungsblatt wird als Vorbereitung auf das rigorose Arbeiten hilfreich sein.
Nutzen Sie gerne auch die Aufgaben des regulären Brückenkurses (d.h., für alle anderen Gruppen) und bringen Sie an, wenn Sie Aufgaben von dort besprechen möchten.

Vorab

Wir werden uns in der Übung vor Besprechung der jeweiligen Aufgaben wichtige dafür benötigte Begriffe klar machen. Dazu gehören insbesondere die Begriffe **Aussage**, **Wahrheitswert**, **Aussageform/Prädikat**, **Junktor**, **Disjunktion**, **Konjuktion**, **Implikation**, **Äquivalenz**, **Negation**, **Wahrheitswertetabelle** und **Quantor**. Dazu werden wir voraussichtlich auch auf die Aufgaben 2 und 3 des 1. Übungsblattes aus dem regulären Brückenkurs bzw. zumindest einige Teilaufgaben davon eingehen.

Aufgabe 1 (Aussagen und Aussageformen)

Welche der folgenden Wort-/Zeichengruppen sind Aussagen? Geben Sie ggf. den Wahrheitswert an.

1. Alle reellen Zahlen sind rational.
2. Alle rationalen Zahlen sind reell.
3. $3 \leq 7$
4. $x \leq 7$
5. $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$
6. Jede positive ganze Zahl kann als Summe von höchstens 4 Quadratzahlen dargestellt werden.
7. $\exists x \in \mathbb{R} : \; x + 1 = 0$
8. $\exists x \in \mathbb{R} : \; x^2 + 1 = 0$
9. a ist teilbar durch 3
10. a ist teilbar durch b

Aufgabe 2 (Grundlegende Eigenschaften)

Seien p, q und r beliebige Aussagen. Zeigen Sie mittels Wahrheitswertetabelle, dass die folgenden grundlegenden Gesetze gelten:

1. $p \wedge q = q \wedge p$ (Kommutativität der Konjunktion)
2. $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$ (Assoziativität der Konjunktion)
3. Für welche anderen logischen Junktoren gelten die Kommutativität und Assoziativität? Für welche nicht?

4. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Aufgabe 3 (Beweistechniken)
Seien p und q beliebige Aussagen und r eine falsche Aussage. Zeigen Sie folgende Gleichheiten:

1. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \;=\; p \Leftrightarrow q$
2. $p \Rightarrow q \;=\; \neg p \vee q \;=\; \neg q \Rightarrow \neg p$
3. $p \Rightarrow q \;=\; ((p \wedge \neg q) \Rightarrow r)$
4. $\neg(p \wedge q) \;=\; \neg p \vee \neg q, \quad \neg(p \vee q) \;=\; \neg p \wedge \neg q$ (De Morgansche Gesetze)

Können Sie damit die Beweistechniken des direkten Beweises, des Widerspruchsbeweises und der Kontraposition begründen?

Aufgabe 4
Sei $p(x)$ eine Aussageform. Schreiben Sie die Aussagen $\exists! x : p(x)$ und $\nexists x : p(x)$ in eine Form um, welche nur die Quantoren $\exists$ und $\forall$ verwendet.
Hinweis: $\exists! x : p(x)$ lässt sich sprachlich formulieren als „Es existiert genau ein x, sodass $p(x)$ gilt.“
$\nexists x : p(x)$ lässt sich sprachlich formulieren als „Es existiert kein x, sodass $p(x)$ gilt.“

Aufgabe 5

(a) Verneinen Sie die folgende Aussage:

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y, z \in \mathbb{R}: \; x = y + z.$$

Welchen Wahrheitswert besitzt die obige Aussage bzw. ihre Verneinung?

(b) Nun allgemeiner: Sei $q(x, y, z)$ eine Aussageform. Verneinen Sie die Aussage

$$\forall x\, \exists y, z: \; q(x, y, z).$$

Welches Prinzip zur Verneinung von Aussagen mit Quantoren fällt auf?

Aufgabe 6
Sei $p(x, y)$ eine Aussageform. Machen Sie sich an einem Beispiel klar, dass die Gleichheit

$$\forall x\, \exists y : p(x, y) \;=\; \exists x\, \forall y : p(x, y)$$

in der Regel nicht gilt.

Aufgabe 7
Seien $p(x)$ und $q(x)$ Aussageformen. Zeigen Sie, dass die Gleichheit

$$\forall x : p(x) \wedge q(x) \;=\; (\forall x : p(x)) \wedge (\forall x : q(x))$$

gilt.
Hinweis: Es könnte leichter zu zeigen sein, dass die Verneinungen gleich sind.

Aufgabe 8
Seien $p(x)$ und $q(x)$ Aussageformen. Zeigen sie:

$$(\forall x : p(x) \Rightarrow q(x)) \;\Rightarrow\; (\{x : p(x)\} \subseteq \{x : q(x)\})$$

Wie sieht es mit anderen Junktoren aus?

Aufgabe 9
Gilt die Gleichheit $\forall x :\ p(x) \vee q(x) \;=\; \forall x : p(x) \;\vee\; \forall x : q(x)$?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 10
Seien p, q und r beliebige Aussagen und $p(x)$ eine Aussageform. Zeigen Sie:

1. $(\exists x : p(x)) \Rightarrow q \;=\; \forall x : (p(x) \Rightarrow q)$
2. $q \Rightarrow (\forall x : p(x)) \;=\; \forall x : p(x) \Rightarrow q$
3. Wenn $p \Rightarrow q$, dann $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$.
4. Wenn $p \Rightarrow (q \wedge r)$, dann $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$.
5. Wenn $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$, dann $p \Rightarrow r$.

Aufgabe 11 (Hinreichende und Notwendige Bedingungen)
Machen Sie sich die Bedeutung der Begriffe **hinreichende** bzw. **notwendige Bedingung** für eine Aussage klar. Untersuchen Sie in jeder der folgenden Teilaufgaben, welche der Aussageformen A, B, C hinreichend bzw. notwendig für welche andere ist.

1. A : „Die natürliche Zahl n ist durch 6 teilbar."
   B : „Die natürliche Zahl n ist sowohl durch 3 als auch durch 2 teilbar."
   C : „Die natürliche Zahl n ist durch 3 teilbar."
2. A : „Die Stelle x ist eine Maximalstelle der zweimal differenzierbaren Funktion f."
   B : „Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x ist gleich Null."
   C : „Die zweite Ableitung der Funktion f an der Stelle x ist negativ."