Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

2. Übung am 25. September 2024
Thema: Wichtige Rechenoperationen, Termumformungen, Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen bzw. Ungleichungen

Schwerpunktaufgaben: 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12

Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie sind dazu in der Lage, Regeln für Termumformungen sicher und korrekt anzuwenden, insbesondere beim Kürzen von Brüchen, beim Auflösen von Doppelbrüchen, beim Ausmultiplizieren von Klammertermen, beim Ausklammern gemeinsamer Faktoren und beim Verwenden der binomischen Formeln.
- Sie können alle Lösungen von linearen Gleichungen und Ungleichungen ermitteln.
- Sie wissen, dass eine quadratische Gleichung entweder genau zwei reelle Lösungen oder genau eine reelle Lösung oder gar keine reelle Lösung besitzt, und können diese drei Fälle auch geometrisch deuten. Sie sind dazu in der Lage, alle Lösungen von quadratischen Gleichungen und Ungleichungen zu ermitteln.
- Sie können Gleichungen und einfache Ungleichungen, in denen die unbekannte Größe innerhalb eines Betrags vorkommt, lösen.

Passende Online-Zusatzangebote:
Im Online-Vorbereitungskurs Mathematik der TU Dresden[1] bieten sich das Kapitel zum Rechnen mit Zahlen und Termen, insbesondere die in den Abschnitten „Zahlenmengen", „Grundrechenarten" und „Spezielle Rechenregeln" bereitgestellten Selbsttests, sowie das Kapitel zu Gleichungen und Ungleichungen, insbesondere die in den Abschnitten „Gleichungen", „Ungleichungen" und „Lineare Gleichungssysteme" bereitgestellten Selbsttests und Lernvideos, zum Wiederholen, Vertiefen und weiteren Üben dieser Themen an.

Passende Literatur:

- Abschnitte 2.1, 4.1, 5.5, 6.1 sowie 10.1 bis 10.3 im Lehrbuch
  Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Abschnitte 1.2, 3.1, 6.1, 6.2, 6.7, 8.1 und 8.2 im Lehrbuch
  Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 1.5, 1.6, 2.1 bis 2.5 sowie 2.10 im Lehrbuch
  Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

[1] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826`

Übungsaufgaben Teil 1: Wichtige Rechenoperationen, Termumformungen

Aufgabe 1 (Bruchrechnung, Doppelbrüche)

Berechnen Sie die folgenden Brüche und kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Im Ergebnis soll insbesondere kein Doppelbruch mehr auftauchen.

(a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}$ (b) $\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}$ (c) $\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{3}$ (d) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{5}$

(e) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}$ (f) $\dfrac{12}{27}\cdot\dfrac{18}{8}\cdot\dfrac{2}{9}$ (g) $\dfrac{1}{3}:\dfrac{2}{5}$ (h) $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}$

(i) $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}}$ (j) $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{9}}$ (k) $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}}$ (l) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}$

Aufgabe 2 (Ausmultiplizieren von Klammertermen, Binomische Formeln)

Formen Sie die folgenden Terme so um, dass keine Klammern mehr auftreten (durch Ausmultiplizieren in den Teilaufgaben (a)–(f) bzw. durch Verwendung binomischer Formeln in den Teilaufgaben (g)–(l)). Fassen Sie am Ende noch möglichst weit zusammen.

(a) $3(5r-2s+t)$ (b) $(x-2y-6z)\cdot(-4a)+6ax-4az$

(c) $(2x+3y)(5x+2y)$ (d) $(9u-2v)(7u-3v)$

(e) $(x+y-z)(x-y-z)$ (f) $(a+b)(2a-3b)-(3a+2b)(a-b)$

(g) $(3a-b)^2$ (h) $\left(\dfrac{2}{3}m+\dfrac{1}{4}n\right)^2$

(i) $(-1+x)^2-(1-x)^2$ (j) $(3a-2b)^2-(3a+2b)^2$

(k) $(3x^2-1)^2+(2-5x)^2$ (l) $(7u-4v)^2-(7u+4v)(7u-4v)$

Aufgabe 3 (Ausklammern gemeinsamer Faktoren, Rückwärtsanwenden der binomischen Formeln)

(a) Schreiben Sie die folgenden Terme durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren als Produkt.

(a1) $21x^2-14xy$ (a2) $12uvw-2uvz+6uvwz$

(a3) $x-4xy$ (a4) $27a^4b+36a^2b^4$

(b) Schreiben Sie die folgenden Terme durch „Rückwärtsanwendung" der binomischen Formeln als Quadrat (von einer Summe oder einer Differenz) oder als Produkt (von einer Summe mit einer Differenz). Das Ergebnis soll also jeweils eine der Gestalten $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ oder $(a+b)(a-b)$ besitzen.

(b1) x^2+4x+4 (b2) $u^2-10u+25$ (b3) $100x^2-y^2$

(b4) $4x^2+16xy+16y^2$ (b5) $\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{16}v^4$ (b6) $25x^2-30xy^2+9y^4$

Aufgabe 4 (Termvereinfachungen durch Ausklammern oder binomische Formeln)
Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich. Formen Sie dazu zunächst den Zähler und/oder den Nenner durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren oder durch „Rückwärtsanwenden" einer binomischen Formel geeignet um.

(a) $\dfrac{ab-b}{ab+b}$ (b) $\dfrac{ax-ay}{5x-5y}$ (c) $\dfrac{10a-2ab+16ac}{2a}$ (d) $\dfrac{2x-4y}{3x-6y}$

(e) $\dfrac{u-v}{v-u}$ (f) $\dfrac{4x-4}{9-9x}$ (g) $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ (h) $\dfrac{(u-v)^2}{u^2-v^2}$

(i) $\dfrac{s^2-4t^2}{s^2-4st+4t^2}$ (j) $\dfrac{16-49x^2}{16-28x}$ (k) $\dfrac{9a^2+6a+1}{1+3a}$ (l) $\sqrt{x^4+4x^2+4}$

Aufgabe 5 (Vorteilhaftes Rechnen mit binomischen Formeln)
Berechnen Sie unter Verwendung von binomischen Formeln.

(a) 41^2 (b) 87^2 (c) 1010^2 (d) 997^2 (e) 69^2-31^2 (f) $304 \cdot 296$

Übungsaufgaben Teil 2: Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 6 (Lineare Gleichungen)
Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

(a) $3x = 15$ (b) $2x-4 = 3x+9$ (c) $1-x = 5x+19$

(d) $2(x-1) = x+7$ (e) $x-3(1+x) = 25$ (f) $x+4 = 4(x+1)-3x$

(g) $x+4 = 4(x-1)-3x$ (h) $5x+3(x+2) = 4(1-x)+10$

Aufgabe 7 (Lineare Ungleichungen)
Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen.

(a) $3x \leq 15$ (b) $x+6 \geq 2x-9$ (c) $3(x-1)+7 \geq 2(4-x)+1$

Inwiefern ändern sich die Lösungsmengen, wenn jeweils „$\leq$" durch „$<$" und „$\geq$" durch „$>$" ersetzt wird?

Übungsaufgaben Teil 3: Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 8 (Anzahl der reellen Nullstellen einer quadratischen Funktion)
In dieser Aufgabe geht es um quadratische Funktionen, welche sich bekanntlich durch eine Gleichung der Form $y = ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) beschreiben lassen.

(a) Bekanntermaßen ist der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion eine Parabel. Woran lässt sich anhand der Funktionsvorschrift erkennen, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist?

(b) Eine quadratische Funktion kann genau zwei reelle Nullstellen, genau eine reelle Nullstelle oder gar keine reelle Nullstelle besitzen. Geben Sie für jeden dieser Fälle ein Beispiel an – sowohl ein Beispiel, bei dem der Graph eine nach oben geöffnete Parabel ist, als auch ein Beispiel, bei dem die Parabel nach unten geöffnet ist. Skizzieren Sie jeweils die Funktionsgraphen.

	Parabel nach oben geöffnet	Parabel nach unten geöffnet
genau 2 reelle Nullstellen	$y =$	$y =$
genau 1 reelle Nullstelle	$y =$	$y =$
keine reelle Nullstelle	$y =$	$y =$

Aufgabe 9 (Quadratische Gleichungen)
Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

(a) $x^2 - 9 = 0$ (b) $2x^2 + x = 0$ (c) $x^2 + 2x - 8 = 0$

(d) $x^2 + 2x + 5 = 0$ (e) $2x^2 + x - 1 = 0$ (f) $12x - 4x^2 = 9$

(g) $x^2 + 6x = 2 - 7x^2$ (h) $(x-4)(x+7) = 0$ (i) $(x-5)(x-3) = 3$

Aufgabe 10 (Quadratische Ungleichungen)
Ermitteln Sie alle Lösungen der folgenden Ungleichungen.

(a) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ (b) $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$

(c) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ (d) $5x - x^2 \geq 4$

Inwiefern ändern sich die Lösungsmengen, wenn jeweils „$\leq$“ durch „$<$“ und „$\geq$“ durch „$>$“ ersetzt wird?

Übungsaufgaben Teil 4: Gleichungen und einfache Ungleichungen mit Beträgen

Aufgabe 11 (Einfache Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen)

(a) Gegeben sei eine Zahl $b > 0$. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von b, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$

(a1) der Gleichung $|x| = b$,
(a2) der Ungleichung $|x| \leq b$,
(a3) der Ungleichung $|x| \geq b$.

Wie lassen sich die Lösungsmengen jeweils anschaulich deuten?

(b) Geben Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen an.

(b1) $|x| = 4$ (b2) $|x| \leq 3$ (b3) $|x| \geq 7$

(c) Etwas allgemeiner seien nun Zahlen $a \in \mathbb{R}$ und $b > 0$ gegeben. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von a und b, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$

(c1) der Gleichung $|x - a| = b$,

(c2) der Ungleichung $|x - a| \leq b$,

(c3) der Ungleichung $|x - a| \geq b$.

Wie lassen sich die Lösungsmengen jeweils anschaulich deuten?

(d) Geben Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen an.

(b1) $|x - 3| = 2$ (b2) $|x + 1| \leq 3$ (b3) $|x + 4| \geq 1$

Aufgabe 12 (Gleichungen mit Beträgen)
Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen. Führen Sie dazu jeweils eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Vorzeichens des Ausdrucks im Betrag durch.

(a) $|3x - 7| - 5 = 0$ (b) $|x + 1| = 2x - 3$ (c) $|2x - 8| - x + 3 = 0$

(d) $|2x + 1| = x - 1$ (e) $|x + 1| = |2x - 1| - 2$ (f) $x + |x - 2| = |3x + 6| - 13$