Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich
F. Friedrich

Brückenkurs Mathematik 2024

2. Übung am 25. September 2024 für die Gruppe „Lehramt Math Spezial"
Thema: Beweistechniken

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit ersten grundlegenden Beweistechniken (direkter und indirekter Beweis).
Machen Sie sich vorher mit der Schreibweise für Teilbarkeit vertraut, die wird in einigen Aufgaben benötigt.
Betrachten Sie am besten zunächst jeweils ein paar konkrete Beispiele und versuchen Sie anschließend, das Problem abstrakt zu formulieren und zu lösen. Es geht bei dieser Übung nicht darum, Beweise perfekt aufzuschreiben, sondern ein Gespür für Lösungsansätze zu entwickeln.
Sie dürfen allgemein bekannte Tatsachen annehmen, z. B. dass eine von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch 3 teilbar ist, oder jede natürliche Zahl größer 1 in Primfaktoren zerlegt werden kann.
In einigen Aufgaben sind zur Erarbeitung der benötigten Theorie wieder Seiten aus dem Buch „Einführung in das mathematische Arbeiten" von Hermann Schichl und Roland Steinbauer[1] angegeben.

Übungsaufgaben Teil 1: Ergänzungen zur Logik – Notwendige und hinreichende Bedingungen für Aussagen

Aufgabe 1

Lesen Sie die Seiten 82 bis 84 bis einschließlich Theorem 3.2.7.

Wir betrachten die Aussage p: „Es regnet" und die Aussage q: „Die Straße ist nass".
Offensichtlich gilt $p \Rightarrow q$.

(a) Formen Sie mithilfe der Regel der Kontraposition die Aussage um. Formulieren Sie auch den Wortlaut.

(b) Erläutern Sie am gegebenen Beispiel notwendige und hinreichende Bedingungen.

(c) Finden Sie andere Beispiele aus dem Alltag, wo wir das Prinzip der Kontraposition sowie notwendige und hinreichende Bedingungen vorfinden.

Aufgabe 2

(a) Gegeben sei eine reelle Zahl x. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass $x^2 \geq 4$ gilt?

- (a1) Es gilt $x \geq 2$.
- (a2) Es gilt $|x| \geq 2$.
- (a3) Es gilt $2x^2 > 5$.

(b) Gegeben sei ein Viereck $ABCD$. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass das Viereck ein Rechteck ist?

[1] über die SLUB verfügbar unter `https://katalog.slub-dresden.de/id/0-1030104662`

(b1) Die jeweils gegenüber liegenden Seiten des Vierecks sind zueinander parallel.

(b2) Alle Seiten des Vierecks sind gleich lang.

(b3) Alle Seiten des Vierecks sind gleich lang und alle Innenwinkel sind rechte Winkel.

(c) Gegeben seien eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $x^* \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind notwendige, welche sind hinreichende Bedingungen dafür, dass x^* eine lokale Extremstelle von f ist?

(c1) Es gilt $f'(x^*) = 0$.

(c2) Es gilt $f''(x^*) \neq 0$.

(c3) Es gilt $f'(x^*) = 0$ und $f''(x^*) \neq 0$.

Übungsaufgaben Teil 2: Direkter und indirekter Beweis

Aufgabe 3 Seite 126 Definition 4.1.4 und Seite 127 Definition 4.1.6

Es seien A und B Mengen. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \;\Leftrightarrow\; A = B.$$

(*) Beweisen Sie die Aussage indirekt.

Aufgabe 4

Es seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie:

$$A \subseteq B \,\wedge\, B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C.$$

Als Vorbereitung für die nächsten Aufgaben definieren wir die Begriffe *Teilbarkeit* und *Nachfolger* in den ganzen Zahlen (insbesondere sind diese Begriffe dann natürlich auch in den natürlichen Zahlen definiert).

Seien $n, t \in \mathbb{Z}$. Wir sagen t *teilt* n, wenn eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $n = t \cdot k$ gilt. Alternative Formulierungen für diese Eigenschaft sind „n *ist durch* t *teilbar*“ oder auch „t ist Teiler von n“.

Beispiel: 4 teilt 8, weil $8 = 4 \cdot 2$ gilt. Hier sind $n = 8$, $t = 4$, $k = 2$.

Wir nennen n *gerade*, wenn n durch 2 teilbar ist, also eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2 \cdot k$ existiert. Andernfalls nennen wir n *ungerade*. Eine ganze Zahl n ist genau dann ungerade, wenn eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $n = 2 \cdot k + 1$ gilt.

Der *Nachfolger* einer ganzen Zahl n ist die Zahl $n + 1$. Deren Nachfolger ist $n + 2$. Usw.

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 6

Beweisen Sie: Das Produkt von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 6 teilbar.

Aufgabe 7

Beweisen Sie:

(a) Die Summe von zwei geraden Zahlen a, b ist gerade.

(b) Die Summe von zwei ungeraden Zahlen a, b ist gerade.

(c) Die Summe von einer geraden Zahl a und einer ungeraden Zahl b ist ungerade.

Aufgabe 8

Beweisen Sie: Es gibt keine ganzen Zahlen m und n mit $28 \cdot m + 42 \cdot n = 100$.
Hinweis: Suchen Sie auf der linken Seite der Gleichung einen Teiler, welcher 100 nicht teilt.

Aufgabe 9

Es seien a,b,t ganze Zahlen.

Beweisen Sie: Wenn t Teiler von a und Teiler von b ist, so teilt t auch die Summe und die Differenz von a und b.

Aufgabe 10

Wir wollen nun beweisen, dass unendlich viele Primzahlen existieren. Ein Gerüst für den Beweis ist im Folgenden schon vorgegeben. Allerdings sind noch einige Lücken enthalten (die grauen Felder). Setzen Sie in jede dieser Lücken die passende der unten stehenden Aussagen (a)–(o) ein.

Hinweis: Die Existenz der Primfaktorzerlegung, das heißt die Tatsache, dass jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, als Produkt von Primfaktoren dargestellt werden kann, dürfen Sie als gegeben annehmen.

Lückenbehafteter Beweis:

Wir führen den Beweis indirekt. Das heißt: Dann können wir also schreiben: $P =$ Wir suchen nun einen Widerspruch. Dazu bilden wir eine Zahl, die durch jede Primzahl teilbar ist. Diese sei Als nächstes betrachten wir den Nachfolger dieser Zahl, also Wir können auch alternativ schreiben Da wir m als Produkt aller Primzahlen geschrieben haben, gilt: Sowie: Nun existieren 2 Fälle.

- Fall 1: $m + 1$ ist eine Primzahl.
- Fall 2: $m + 1$ ist keine Primzahl. Dann besitzt $m + 1$ eine Primfaktorzerlegung Für $m + 1$ gilt also: Da m das Produkt aller Primzahlen ist, gilt: Wir bilden nun die Differenz zwischen $m + 1$ und m: Nach Aufgabe 9 gilt also: Das ist ein Widerspruch, denn:

Damit muss die Annahme verworfen werden, es folgt schlussendlich:

Aussagen zum Füllen der Lücken:

(a) $m + 1 = p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_\ell}$ mit geeigneten Primzahlen $p_{i_1}, \ldots, p_{i_\ell} \in P$.

(b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

(c) $\{p_1, \ldots, p_n\}$, wobei $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ mit $p_1 < \ldots < p_n$ und $n \in \mathbb{N}$ endlich.

(d) $m + 1$ ist durch mindestens eine Primzahl teilbar. Sei diese Primzahl p_k.

(e) $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$.

(f) Wir nehmen an, die Menge der Primzahlen P ist endlich.

(g) $(m+1)-(m)=1$.

(h) Es gibt keine Primzahl, die 1 teilt.

(i) $m+1=p_1\cdot\ldots\cdot p_n+1$.

(j) $m+1$.

(k) Da $m+1>p_n$, aber p_n die größte Primzahl ist, haben wir einen Widerspruch.

(l) p_k teilt 1.

(m) $m=p_1\cdot\ldots\cdot p_n$ mit $p_1,\ldots,p_{n-1}>1 \quad\Rightarrow\quad m>p_n$.

(n) m ist durch p_k teilbar.

(o) $m+1>m>p_n \;\Rightarrow\; m+1>p_n$.

Aufgabe 11

Sei $n\in\mathbb{N}$. Beweisen Sie: n ist genau dann gerade, wenn n^2 gerade ist.

Aufgabe 12

Wir wollen beweisen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ irrtational ist. Anders geschrieben: $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.
Definieren wir zunächst, was überhaupt unter einer rationalen Zahl zu verstehen ist. Eine Zahl ist *rational*, wenn sie als Verhältnis von zwei ganzen, teilerfremden Zahlen a und b dargestellt werden kann: $\frac{a}{b}$ mit $a,b\in\mathbb{Z}$ und $b\neq 0$.
Nun zum Beweis der Aussage, dass $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ gilt. Wie bereits in Aufgabe 10 ist ein Gerüst für den Beweis im Folgenden schon vorgegeben. Setzen Sie in jede der enthaltenen Lücken wieder die passende der unten stehenden Aussagen (a)–(k) ein.

Lückenbehafteter Beweis:

Wir führen den Beweis indirekt. Wir nehmen also an: ______ Das bedeutet: ______ Diese Gleichung quadrieren wir und stellen um. ______ Nach der Definition von Teilbarkeit folgt: ______ Nach Aufgabe 11 gilt damit: ______ Also setzen wir nach der Definition von Teilbarkeit: ______ Das setzen wir in die Gleichung von oben ein: ______ Nach der Definition von Teilbarkeit folgt also: ______ Nach Aufgabe 11 gilt damit: ______ Es folgt also: ______ Insgesamt folgt: ______

Aussagen zum Füllen der Lücken:

(a) a ist gerade.

(b) $2\cdot b^2=a^2 \;\Rightarrow\; 2\cdot b^2=(2\cdot k)^2 \;\Rightarrow\; 2\cdot b^2=4\cdot k^2 \;\Rightarrow\; b^2=2\cdot k^2$.

(c) a und b sind nicht teilerfremd.

(d) $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

(e) Wir haben einen Widerspruch zur Annahme. Also ist $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

(f) $\sqrt{2}=\dfrac{a}{b}$ für geeignete teilerfremde Zahlen $a,b\in\mathbb{Z}$ mit $b\neq 0$.

(g) a^2 ist gerade.

(h) $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \;\Rightarrow\; 2 = \frac{a^2}{b^2} \;\Rightarrow\; 2 \cdot b^2 = a^2.$

(i) b ist gerade.

(j) $a = 2 \cdot k$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{Z}$.

(k) b^2 ist gerade.