Prof. F. Schuricht Brückenkurs Mathematik 2024
Dr. M. Herrich

2. Übung am 25. September 2024 für die Gruppe „Math/Phys Spezial"

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit dem Thema Mengen, da diese essentiell für jede mathematische Ausbildung sind. Dabei wird eine mehr oder weniger naive Mengenlehre zugrunde gelegt, da wir nicht die Zeit und die Mittel für einen axiomatischen Aufbau haben, wie Sie es voraussichtlich in den ersten Wochen des Studiums kennenlernen werden. Eine Menge nach unserer Auffassung hier ist die Gesamtheit aller Objekte x, die ein logisches Prädikat $A(x)$ erfüllen.

Vorab

Wir werden uns in der Übung vor Besprechung der jeweiligen Aufgaben wichtige dafür benötigte Begriffe klar machen. Dazu gehören insbesondere die Begriffe **Menge**, **Teilmenge**, **Obermenge**, **Mengengleichheit**, **Potenzmenge**, **Durchschnitt**, **Vereinigung**, **Kartesisches Produkt**, **Mächtigkeit/Gleichmächtigkeit von Mengen** sowie **Abzählbarkeit** und **Überabzählbarkeit von Mengen**. Für Letzteres werden wir auch die Begriffe **Funktion/Abbildung**, **injektiv**, **surjektiv** und **bijektiv** wiederholen, vgl. auch Abschnitt 3 der 1. Vorlesung.

Zur Erläuterung der genannten Begriffe werden wir voraussichtlich auch auf die Aufgaben 5, 7 und 11 des 1. Übungsblattes aus dem regulären Brückenkurs bzw. zumindest einige Teilaufgaben davon eingehen.

Teilmengen

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A und B folgende Aussage gilt:

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für beliebige Mengen A und B folgende Aussage gilt:

$$A \cap B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B.$$

Aufgabe 3 (Grundlegende Eigenschaften)

Seien A, B und C beliebige Mengen. Nutzen Sie ihre Kenntnisse aus den vorigen Aufgaben oder das Venn-Diagramm, um folgende Aussagen zu beweisen:

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$
4. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

Aufgabe 4 (De Morgansche Gesetze)
Zeigen Sie die De Morganschen Gesetze für die Mengenlehre, das heißt, weisen Sie die folgenden Identitäten nach:
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{und} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Mächtigkeit und Abzählbarkeit von Mengen

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ für jede endliche Menge M mit $|M| = n$ gilt.
Hinweis: Mit $\mathcal{P}(M)$ wird die *Potenzmenge* einer Menge M bezeichnet, das heißt die Menge aller Teilmengen von M. Mit $|M|$ wird die Anzahl der Elemente von M bezeichnet.

Aufgabe 6
Gegeben seien zwei endliche Mengen M_1 und M_2. Zeigen Sie, dass für das kartesische Produkt dieser beiden Mengen gilt:
$$|M_1 \times M_2| = |M_1| \cdot |M_2|.$$

Aufgabe 7
Zeigen Sie: jede Teilmenge $N \subseteq M$ einer abzählbaren Menge M ist wieder abzählbar.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abzählbar ist.

Aufgabe 9
Zeigen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.
Zusatz: Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass es keine surjektive Abbildung von einer Menge M in ihre Potenzmenge gibt. Begründen Sie damit, warum die Gleichheit $|M| = 2^{|M|}$ nie wahr ist.

Zusatz

Aufgabe 11
Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, falls:
$$\forall x, y \in K \, \forall t \in [0,1] : \; tx + (1-t)y \in K.$$

(a) Skizzieren Sie je ein Beispiel für eine konvexe Menge und für eine nicht konvexe Menge im $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass für zwei konvexe Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ auch die folgenden Mengen konvex sind:

(b1) $A \cap B$ (b2) $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$

Aufgabe 12

Zeigen Sie folgende Teilmengenbeziehungen und Identitäten:

1. $4\mathbb{Z} \subsetneq 2\mathbb{Z}$
   Hinweis: Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $n\mathbb{Z}$ definiert durch $n\mathbb{Z} := \{n \cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$.
2. $12\mathbb{Z} \subsetneq 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}$
3. $3 + 2\mathbb{Z} = 11 + 2\mathbb{Z}$
   Hinweis: Für Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $m+n\mathbb{Z}$ definiert durch $m+n\mathbb{Z} := \{m+n\cdot z : z \in \mathbb{Z}\}$.
4. $\mathbb{N}_0 \subseteq \sum^2 \mathbb{Q} := \{\sum_{i=1}^n a_i^2 : n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{Q},\ i = 1, \ldots, n\}$
5. $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sum^2 \mathbb{Q}$
6. $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \sum^2 \mathbb{Q}$