Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

3. Übung am 26. September 2024
Thema: Lineare Gleichungssysteme, weitere Aufgaben zu Rechenoperationen, zu Termumformungen und zum Lösen und Umstellen von Gleichungen

Schwerpunktaufgaben: 1, 3, 4, 5, 9, 12

Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie sind dazu in der Lage, alle Lösungen von linearen Gleichungssystemen mit zwei oder drei Unbekannten bzw. Gleichungen zu ermitteln, insbesondere für den Fall, dass die Anzahl der Unbekannten nicht mit der Anzahl der Gleichungen übereinstimmt. Sie können außerdem jeweils die drei möglichen Fälle „genau eine Lösung“, „unendlich viele Lösungen“ und „keine Lösung“ geometrisch deuten.
- Sie sind dazu in der Lage, Regeln für Termumformungen, insbesondere Potenz- und Wurzelgesetze, sicher und korrekt anzuwenden.
- Sie wissen, wie Wurzeln und Logarithmen berechnet werden.
- Sie können sicher mit dem Summenzeichen umgehen.
- Sie kennen die übliche Vorgehensweise zur Behandlung von Gleichungen, in denen die unbekannte Größe unter einer Wurzel oder im Nenner eines Bruches vorkommt.

Passende Online-Zusatzangebote:
Im Online-Vorbereitungskurs Mathematik der TU Dresden[1] bieten sich das Kapitel zum Rechnen mit Zahlen und Termen, insbesondere die in den Abschnitten „Zahlenmengen“, „Grundrechenarten“ und „Spezielle Rechenregeln“ bereitgestellten Selbsttests, sowie das Kapitel zu Gleichungen und Ungleichungen, insbesondere die in den Abschnitten „Gleichungen“, „Ungleichungen“ und „Lineare Gleichungssysteme“ bereitgestellten Selbsttests und Lernvideos, zum Wiederholen, Vertiefen und weiteren Üben dieser Themen an.

Passende Literatur:

- Abschnitte 2.2, 5.2 bis 5.4, 10.5 und 12.1 bis 12.3 im Lehrbuch
  Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Abschnitte 3.2 bis 3.4, 4.1, 6.3, 6.4 und 6.10 im Lehrbuch
  Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 1.7, 1.9, 2.7 und 2.9 im Lehrbuch
  Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

[1] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826`

Übungsaufgaben Teil 1: Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1 (Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten)
Untersuchen Sie für jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme, ob es genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder gar keine Lösung besitzt. Geben Sie im Falle der Lösbarkeit alle Lösungen an. Wie lassen sich die Ergebnisse geometrisch deuten?

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 3y & = & 9 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 6y & = & 7 \\ -2x & + & 4y & = & -1 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1 \\ -4x & + & 2y & = & -2 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & = & 4y & - & 15 \\ 5y & = & 11 & - & 4x \end{array}$$

Aufgabe 2 (Ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten)
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Wie lässt sich das Ergebnis geometrisch deuten?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ -x & + & y & - & z & = & -3 \\ 3x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 3 (Ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem)
Ermitteln Sie alle Lösungen des folgenden unterbestimmten linearen Gleichungssystems. Wie lässt sich das Ergebnis geometrisch deuten?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Übungsaufgaben Teil 2: Weitere Aufgaben zu wichtigen Rechenoperationen und Termumformungen

Aufgabe 4 (Umgang mit dem Summenzeichen)

(a) Berechnen Sie die folgenden Summen.

$$\text{(a1)} \sum_{k=1}^{6} k^2 \qquad \text{(a2)} \sum_{k=0}^{4} 2^k \qquad \text{(a3)} \sum_{i=1}^{5} |i-3|$$

(b) Beschreiben/deuten Sie mit Worten, was in den folgenden Teilaufgaben berechnet wird. In jeder Teilaufgabe ist $n \geq 1$ jeweils eine beliebige aber feste natürliche Zahl.

$$\text{(b1)} \sum_{k=1}^{n} k \qquad \text{(b2)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \text{(b3)} \sum_{k=1}^{n} (2k-1) \qquad \text{(b4)} \sum_{k=1}^{n} 1$$

(c) Berechnen Sie $x \in \mathbb{R}$ derart, dass gilt: $\sum\limits_{k=1}^{10} kx = 11$.

(d) Berechnen Sie $n \in \mathbb{N}$ derart, dass gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 325$.

Aufgabe 5 (Termvereinfachungen unter Verwendung von Potenzgesetzen)
Schreiben Sie die folgenden Terme jeweils als Potenz von x, das heißt in der Form x^p.

(a) $x^2 \cdot x^6$ (b) $(x^2)^6$ (c) $\frac{1}{x}$

(d) $\frac{x^5 \cdot x^7}{x^{10}}$ (e) $\sqrt{x}$ (f) $\sqrt[4]{x^3}$

(g) $x \cdot \sqrt{x}$ (h) $\frac{x}{\sqrt{x}}$ (i) $\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}$

Aufgabe 6 (Berechnung von Potenzen und Wurzeln)
Berechnen Sie. In einigen Teilaufgaben ist es sinnvoll, die Rechnung zunächst durch die Verwendung von Potenz- bzw. Wurzelgesetzen zu vereinfachen.

(a) 2^4 (b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ (c) $\frac{3}{4^2}$ (d) $\frac{3^2}{4}$ (e) $\sqrt{64}$ (f) $\sqrt[3]{64}$

(g) $\sqrt[4]{16}$ (h) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (i) $\sqrt{1}$ (j) $2^6 \cdot 5^6$ (k) $\frac{6^5}{3^5}$ (l) $\frac{4^5}{16^2}$

(m) $\frac{9^3}{3^9}$ (n) $\sqrt{2^8}$ (o) $\sqrt{25^3}$ (p) $\sqrt{3 \cdot \sqrt{9}}$

Aufgabe 7 (Wahr-Falsch-Aussagen zu Termumformungen)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

(a) Es gilt $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\frac{x+2}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ gilt $\frac{2x}{x+2} = 2 + x$.

(d) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = x$.

(e) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^4 + 1} = x^2 + 1$.

(f) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x+4| = |x| + 4$.

Aufgabe 8 (Berechnung von Logarithmen)
Berechnen Sie die folgenden Logarithmen.

(a) $\log_{10}(10)$ (b) $\log_{10}(1)$ (c) $\log_{10}(100)$ (d) $\log_{10}\left(\sqrt{1000}\right)$

(e) $\log_{10}(0{,}1)$ (f) $\log_{0{,}1}(10)$ (g) $\log_2(8)$ (h) $\log_2(0{,}5)$

(i) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$ (j) $\log_2\left(\sqrt{2}\right)$ (k) $\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)$ (l) $\log_4(2)$

(m) $\log_4\left(\sqrt{2}\right)$ (n) $\log_8\left(\frac{1}{2}\right)$ (o) $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right)$ (p) $\ln(\mathrm{e})$

(q) $\ln\left(\mathrm{e}^3\right)$ (r) $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ (s) $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^5}\right)$ (t) $\ln\left(\frac{\mathrm{e}^3}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$

Übungsaufgaben Teil 3: Weitere Aufgaben zum Umstellen und Lösen von Gleichungen

Aufgabe 9 (Umstellen von Gleichungen)

(a) Die folgende Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg s, der vergangenen Zeit t und der Geschwindigkeit v bei gleichförmiger Bewegung:

$$v = \frac{s}{t}.$$

(a1) Stellen Sie die Gleichung einmal nach s und einmal nach t um.

(a2) Welchen Weg legt ein Fahrzeug zurück, das 60 Sekunden lang gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt?

(a3) Wie lange benötigt ein Fahrzeug, das gleichförmig mit der Geschwindigkeit $v = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fährt, um eine Strecke von 600 Metern zurückzulegen?

(b) Die folgende Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg s, der vergangenen Zeit t und der Beschleunigung a bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung aus dem Stillstand heraus:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad (t > 0).$$

(b1) Stellen Sie die Gleichung einmal nach a und einmal nach t um.

(b2) Ein Fahrzeug beschleunige aus dem Stand heraus gleichmäßig mit einer Beschleunigung von $a = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wie lange benötigt das Fahrzeug, um 150 Meter zurückzulegen?

(c) Die folgende Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Oberflächeninhalt A, dem Radius r und der Höhe h eines geraden Kreiskegels:

$$A = 2\pi r(r + h) \quad (r, h > 0).$$

(c1) Stellen Sie die Gleichung einmal nach h und einmal nach r um.

(c2) Berechnen Sie die Höhe eines geraden Kreiskegels mit dem Radius $r = 4\,\text{cm}$ und dem Oberflächeninhalt $A = 10\,\text{dm}^2$.

(c3) Berechnen Sie den Radius eines geraden Kreiskegels mit der Höhe $h = 6\,\text{cm}$ und dem Oberflächeninhalt $A = 10\,\text{dm}^2$.

(d) Mit der folgenden Gleichung lässt sich der Gesamtwiderstand R bei Parallelschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 berechnen:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

(d1) Stellen Sie die Gleichung einmal nach R und einmal nach R_1 um.

(d2) Zwei Widerstände seien parallelgeschaltet. Der zweite Widerstand betrage $R_2 = 8\,\Omega$, der Gesamtwiderstand betrage $R = 6\,\Omega$. Berechnen Sie den Widerstand R_1.

Aufgabe 10 (Gleichungen, bei denen die unbekannte Größe unter dem Bruchstrich vorkommt)

Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

(a) $\dfrac{3x - 4}{4 - 6x} = 1$ (b) $2x - 3 = -\dfrac{1}{x}$ (c) $\dfrac{10 - 5x}{x^2 - 3x + 2} = 1$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Gleichungen, die durch Multiplikation mit den Nennern der vorkommenden Quotienten entstehen, und ermitteln Sie deren Lösungen. Denken Sie daran, am Ende jeweils eine Probe durchzuführen.

Aufgabe 11 (Gleichungen, bei denen die unbekannte Größe unter einer Wurzel vorkommt)
Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

(a) $\sqrt{2x-5} = x - 4$ (b) $\sqrt{4x+1} = x + 1$ (c) $2\sqrt{x} + 3 = x$

Hinweis: Betrachten Sie in den Teilaufgaben (a) und (b) zunächst die Gleichung, die durch Quadrieren beider Seiten entsteht und ermitteln Sie deren Lösungen. Auch in Teilaufgabe (c) hilft dieses Vorgehen prinzipiell, dort sollten Sie vorher aber die Gleichung so umstellen, dass auf der linken Seite nur noch die Wurzel steht. Denken Sie daran, am Ende jeweils eine Probe durchzuführen.

Aufgabe 12 (Typische Fehler bei Termumformungen und beim Lösen von Gleichungen)
Als Abschluss dieses Übungsblattes sollen in dieser Aufgabe einige Fehler thematisiert werden, die bei Termumformungen und beim Lösen von Gleichungen von Schülerinnen und Schülern, aber auch von Studierenden leider immer mal wieder gemacht werden. In jeder der folgenden Teilaufgaben wird Ihnen eine fehlerhafte „Lösung“ zu einem mathematischen Problem präsentiert. Ihre Aufgabe besteht jeweils darin, den oder die Fehler in der präsentierten „Lösung“ zu identifizieren und zu korrigieren.

(a) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^2 - 9 = 0$ zu bestimmen.
Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$x^2 - 9 = 0 \qquad | +9$$
$$x^2 = 9 \qquad | \sqrt{}$$
$$x = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung der Gleichung ist $x = 3$. f

(b) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $2x - \sqrt{36} = 0$ zu bestimmen.
Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$2x - \sqrt{36} = 0 \qquad | + \sqrt{36}$$

$$2x = \sqrt{36}$$

$\sqrt{36}$ kann 6 oder -6 sein. ↯ Fallunterscheidung!

Fall 1: $\sqrt{36} = 6$

$$\Rightarrow \quad 2x = 6 \qquad |:2$$

$$x = \underline{\underline{3}}$$

Fall 2: $\sqrt{36} = -6$

$$\Rightarrow \quad 2x = -6 \qquad |:2$$

$$x = \underline{\underline{-3}}$$

$\Rightarrow$ Die Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich $x = 3$ und $x = -3$. f

(c) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $(x+3)^2 = 25$ zu bestimmen. **Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch!** Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$(x+3)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 16$$

$$\Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

$\Rightarrow$ Die Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich $x = 4$ und $x = -4$. f

(d) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $2x(x+1) = x^2 - 5x$ zu bestimmen.

Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$2x(x+1) = x^2 - 5x \qquad |:x$$

$$2(x+1) = x - 5$$

$$2x + 2 = x - 5 \qquad | -x -2$$

$$x = \underline{\underline{-7}}$$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung der Gleichung ist $x = -7$. f

(e) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $5 - x^2 - 2x = x + 5$ zu bestimmen.

Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$5 - x^2 - 2x = x + 5 \quad | -x-5$$
$$-x^2 - 3x = 0$$
$$-x \cdot (x-3) = 0$$

Damit ein Produkt gleich Null ist, muss einer der Faktoren Null sein. $\Rightarrow x_1 = 0\ ,\ x_2 = 3$

$\Rightarrow$ Die Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich $x = 0$ und $x = 3$.

f

(f) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $2 - 3(x+1) = 20$ zu bestimmen.

Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$2 - 3(x+1) = 20$$
$$2 - 3x + 3 = 20$$
$$5 - 3x = 20 \quad | -5$$
$$-3x = 15 \quad | : (-3)$$
$$x = \underline{\underline{-5}}$$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung der Gleichung ist $x = -5$.

f

(g) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\dfrac{x}{x+4} = 3$ zu bestimmen.

Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$\frac{x}{x+4} = 3 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{x}{4} = 3 \quad | -1$$

$$\frac{1}{4}x = 2 \quad | \cdot 4$$

$$x = \underline{\underline{8}}$$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung der Gleichung ist $x = 8$. f

(h) Erneut bestehe die Aufgabe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\dfrac{x}{x+4} = 3$ zu bestimmen.
Auch die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$\frac{x}{x+4} = 3 \quad | \cdot (x+4)$$

$$x = 3x + 4 \quad | -3x$$

$$-2x = 4 \quad | : (-2)$$

$$x = \underline{\underline{-2}}$$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung der Gleichung ist $x = -2$. f

(i) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$ zu bestimmen.
Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$$

Gemäß binomischer Formel gilt $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2} = 3$$

$$\Rightarrow x + 1 = 3$$

$$\Rightarrow x = \underline{\underline{2}}$$

$\Rightarrow$ Die einzige Lösung der Gleichung ist $x = 2$. f

(j) Die Aufgabe bestehe darin, alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $\sqrt{x^2 + 1} = x + 3$ zu bestimmen.
Die folgende „Lösung“ zu dieser Aufgabe ist falsch! Wo genau liegt der Fehler und wie sieht eine korrekte Lösung zu dieser Aufgabe aus?

$\sqrt{x^2+1} = x+3$

$\Rightarrow \quad x+1 = x+3 \quad | -x$

$\Rightarrow \quad 1 = 3 \quad ↯$

$\Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung.

f