Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich
F. Friedrich

3. Übung am 26. September 2024 für die Gruppe „Lehramt Math Spezial"
Thema: Summenzeichen und Vollständige Induktion

Das dritte Übungsblatt beschäftigt sich mit Rechenbeispielen zum Summenzeichen sowie der vollständigen Induktion als weiterer Beweistechnik.

Übungsaufgaben Teil 1: Summenzeichen

Aufgabe 1 Seite 30 ab Kapitel 2.3 bis Seite 31
Berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\sum_{k=1}^{6} k^2$

(b) $\sum_{k=0}^{4} 2^k$

(c) $\sum_{k=1}^{5} |k-3|$

(d) $\sum_{k=1}^{6} xk$ (Was fällt Ihnen in Bezug auf das x auf?)

Aufgabe 2 Seite 30 ab Kapitel 2.3 bis Seite 31
Beschreiben/deuten Sie mit Worten, was in den folgenden Teilaufgaben berechnet wird. In jeder Teilaufgabe ist $n \geq 1$ jeweils eine beliebige, aber feste natürliche Zahl.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^2$

(c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

(d) $\sum_{k=1}^{n} 1$

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie $x \in \mathbb{R}$ derart, dass gilt: $\sum_{k=1}^{10} kx = 11$.

(b) Berechnen Sie $n \in \mathbb{N}$ derart, dass gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = 325$.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Beweisen werden wir diese Aussage in Aufgabe 4.

Übungsaufgaben Teil 2: Vollständige Induktion

Aufgabe 4 Seite 42 bis Seite 45.
Beweisen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass die folgenden Summenformeln für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

(a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Gauß'sche Summenformel)

(b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

(c) $\sum_{k=0}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

(d) $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (x ist dabei eine beliebige Zahl ungleich 1)

Aufgabe 5
Beweisen Sie folgende Formeln mithilfe vollständiger Induktion:

(a) $2^n \geq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$

(b) $n^2 + n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 2 teilbar.
Hinweis: Im Induktionsschritt wollen Sie zeigen, dass $(n+1)^2 + (n+1)$ durch 2 teilbar ist. Formen Sie den Term solange um, bis Sie die Induktionsvoraussetzung ausnutzen können. Zeigen Sie dann für den restlichen Term, dass er durch 2 teilbar ist.

(c) $n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.
Hinweis: Im Induktionsschritt wollen Sie zeigen, dass $(n+1)^3 - (n+1)$ durch 6 teilbar ist. Formen Sie den Term solange um, bis Sie die Induktionsvoraussetzung ausnutzen können. Zeigen Sie dann für den restlichen Term, dass er durch 2 und durch 3 teilbar ist.

(d) $n^3 + 2n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

(e*) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$
Hinweis: Führen Sie die Induktion nach n aus.

Aufgabe 6

Beweisen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ existiert eine Primfaktorzerlegung.

(b) Die Primfaktorzerlegung ist eindeutig.