Prof. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

3. Übung am 26. September 2024 für die Gruppe „Math/Phys Spezial“

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich zunächst mit ersten grundlegenden Beweistechniken. Für die Bearbeitung dürfen grundlegende bekannte Aussagen aus der Schule verwendet werden. Überlegen Sie sich dabei, ob Sie die verwendeten Aussagen begründen können. Im zweiten Teil der Übung geht es dann um Funktionen/Abbildungen (diese beiden Begriffe werden hier synonym verwendet) und dabei insbesondere noch einmal ausführlich um die Eigenschaften Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Diese wurden im Abschnitt 3 der 1. Vorlesung des Brückenkurses eingeführt, schlagen Sie dort bei Bedarf noch einmal nach. Wir werden diese Begriffe aber auch in der Übung noch einmal wiederholen.

Üben erster grundlegender Beweistechniken

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Summe zweier gerader natürlicher Zahlen wieder gerade ist.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Summe dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl wieder ungerade ist.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Aufgabe 6

Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass folgende Implikationen gelten:

1. $a \neq b \;\Rightarrow\; a + c \neq b + c$
2. a^2 ungerade $\Rightarrow a$ ungerade

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass das Produkt dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 8

Seien a, b, c und d beliebige reelle Zahlen. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:

1. $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$
2. $|a - d| \leq |a - b| + |b - c| + |c - d|$

Abbildungen; Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von Abbildungen

Aufgabe 9

Überprüfen Sie folgende Abbildungsvorschriften auf Wohldefiniertheit (das heißt ob dadurch überhaupt eine Abbildung definiert wird), Injektivität, Surjektivität und Monotonie:

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1$
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2 + 1$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$
4. $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -2x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Aufgabe 10

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Alle injektiven Abbildungen zwischen zwei endlichen Mengen sind bijektiv.
2. Alle injektiven Abbildungen zwischen $\mathbb{N}$ und sich selbst sind bijektiv.
3. Es existiert eine bijektive Abbildung zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.
4. Seien $f : M \to N$ und $g : N \to O$ zwei Abbildungen, wobei M, N und O nichtleere Mengen sind. Dann gelten die folgenden Implikationen:

   $g \circ f$ ist bijektiv $\Rightarrow$ f ist surjektiv, g ist surjektiv

   $g \circ f$ ist bijektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv, g ist surjektiv

   $g \circ f$ ist bijektiv $\Rightarrow$ f ist surjektiv, g ist injektiv

   $g \circ f$ ist injektiv $\Rightarrow$ f ist injektiv, g ist injektiv

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass jede streng monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv ist.

Aufgabe 12

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass für jede Abbildung $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$f \text{ injektiv} \;\Leftrightarrow\; f \text{ surjektiv}.$$

Aufgabe 13

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

1. Falls $A \subseteq B \subseteq X$, dann gilt $f(A) \subseteq f(B)$.
2. Falls $A, B \subseteq X$, dann gelten $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ und $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$.