Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

4. Übung am 27. September 2024
Thema: Reelle Funktionen

Schwerpunktaufgaben: 1, 4, 5, 6, 9, 10

Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie sind dazu in der Lage, für eine vorgegebene Zuordnung zu entscheiden, ob es sich um eine Funktion handelt.
- Sie wissen, welche Modifikationen in der Funktionsvorschrift eine Verschiebung bzw. eine Streckung bzw. eine Stauchung bzw. eine Spiegelung des Funktionsgraphen bewirken.
- Sie sind dazu in der Lage, die Funktionsvorschriften von quadratischen Funktionen und Betragsfunktionen anhand des Funktionsgraphen zu bestimmen.
- Sie kennen grundlegende Eigenschaften von Funktionen, zum Beispiel größtmöglicher Definitionsbereich, Monotonie, Beschränktheit, Umkehrbarkeit, Grenzwerte und Stetigkeit. Sie sind dazu in der Lage, diese für vorgegebene Funktionen zumindest anhand des Funktionsgraphen abzulesen.

Passende Online-Zusatzangebote:

Im Online-Vorbereitungskurs Mathematik der TU Dresden[1] bietet sich das Kapitel zu Reellen Funktionen, insbesondere die in den Abschnitten „Begriff und Darstellung“, „Eigenschaften“ und „Spezielle reelle Funktionen“ bereitgestellten Selbsttests und Lernvideos, zum Wiederholen, Vertiefen und weiteren Üben dieses Themas an.

Passende Literatur:

- Kapitel 3 zum Thema Funktionen im Lehrbuch
  Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 2. Binomi, Barsinghausen, 2012.
- Kapitel 5 sowie Abschnitte 10.1 und 10.2 im Lehrbuch
  Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 5.1, 5.2.1–5.2.3, 5.3 sowie 8.3 im Lehrbuch
  Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

[1] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826`

Übungsaufgaben Teil 1: Reelle Funktionen – Definition und erste Beispiele

Aufgabe 1 (Was ist eine reelle Funktion?)

(a) Was versteht man unter einer reellen Funktion?

(b) Zeichnen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils die Menge aller Paare (x, y), die der angegebenen Zuordnungsvorschrift genügen. Bei welchen Zuordnungen handelt es sich um reelle Funktionen?

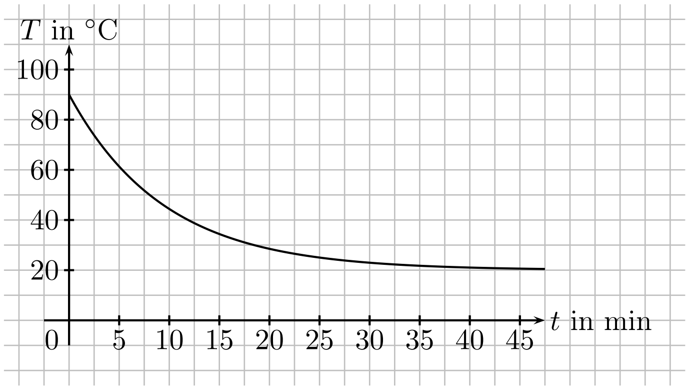
(b1) Jedem $x \in [-3, 3]$ werden alle $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, für die gilt: $x^2 + y^2 = 9$.

(b2) Jedem $x \in [-3, 3]$ werden alle $y \geq 0$ zugeordnet, für die gilt: $x^2 + y^2 = 9$.

(b3) Jedem $x \in [-3, 3]$ werden alle $y \in \mathbb{R}$ zugeordnet, für die gilt: $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Aufgabe 2 (Funktionaler Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur beim Abkühlungsprozess)
Anton hat sich eine Tasse mit heißem Tee (90°C) zubereitet. Er möchte ihn noch einen Moment abkühlen lassen, ehe er trinkt. Aufgrund eines Telefonats mit seiner Freundin vergisst er aber den Tee völlig, sodass dieser mehr als 45 Minuten lang unangetastet dasteht.

In der folgenden Abbildung ist der Abkühlungsprozess des Tees, das heißt der zeitliche Temperaturverlauf, grafisch dargestellt.



(a) Welche Temperatur hat der Tee nach 10 Minuten?

(b) Nach wie vielen Minuten hat der Tee eine Temperatur von 30°C?

(c) Wie hoch ist die Temperatur im Zimmer, in dem die Tasse Tee steht?

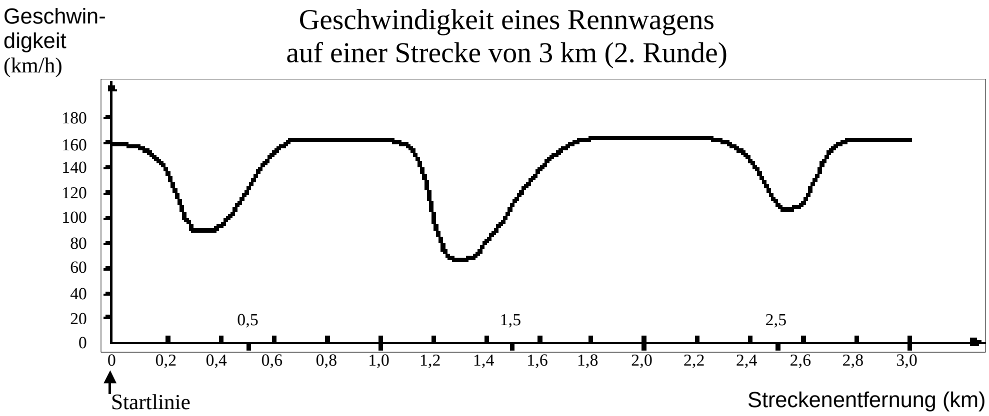
(d) Welche Abhängigkeit der Temperatur T in °C von der Zeit t in Minuten ist aufgrund der obigen Abbildung zu erwarten?

(i) lineare Abhängigkeit: die Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit wird beschrieben durch eine Vorschrift der Gestalt $T(t) = at + b$ (mit gewissen Konstanten a, b)

(ii) exponentielle Abhängigkeit: die Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit wird beschrieben durch eine Vorschrift der Gestalt $T(t) = a \cdot b^t + c$ (mit gewissen Konstanten a, b, c)

(iii) quadratische Abhängigkeit: die Abhängigkeit der Temperatur von der Zeit wird beschrieben durch eine Vorschrift der Gestalt $T(t) = at^2 + bt + c$ (mit gewissen Konstanten a, b, c)

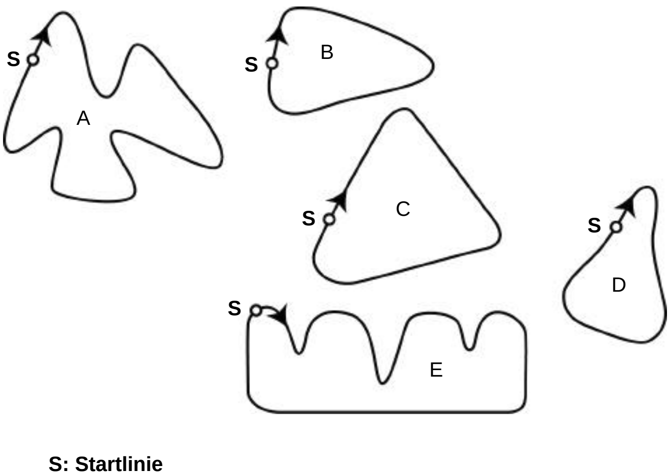
Aufgabe 3 (Funktionaler Zusammenhang zwischen Weg und Geschwindigkeit beim Autorennen)[2]
Der folgende Funktionsgraph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.



(a) Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geradlinigen Abschnitts der Rennstrecke?

(b) An welcher Stelle wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit gemessen und wie hoch war diese?

(c) In der folgenden Abbildung sind fünf Rennstrecken dargestellt. Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, sodass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



[2] Die Aufgabe stammt aus der PISA-Studie aus dem Jahr 2000 im Bereich „Mathematische Grundbildung“ und ist unter
`https://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/Beispielaufgaben_Mathematik.PDF`
zu finden. Die beiden Abbildungen in der Aufgabenstellung sind ebenfalls aus der verlinkten `pdf`-Datei entnommen.

Übungsaufgaben Teil 2: Verschiebung, Streckung, Stauchung oder Spiegelung des Funktionsgraphen durch Modifikationen in der Funktionsvorschrift

Aufgabe 4 (Auswirkungen von Änderungen in der Funktionsvorschrift auf den Funktionsgraphen)

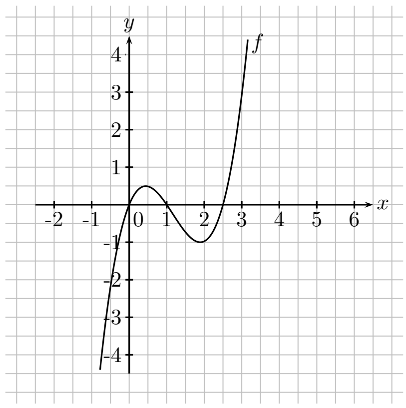
(a) Zeichnen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils den Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = \sin(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ und den Graphen der Funktion mit der in der Teilaufgabe angegebenen Gleichung (ebenfalls jeweils mit $x \in \mathbb{R}$) in ein Koordinatensystem.

(a1) $y = 2\sin(x)$ (a2) $y = \sin(2x)$ (a3) $y = \sin(x) - 2$ (a4) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

(b) Gegeben seien eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl $a > 0$. Beschreiben Sie auf Grundlage Ihrer Beobachtungen aus Teilaufgabe (a), wie die Graphen der durch die Gleichungen $y = a \cdot f(x)$, $y = f(ax)$, $y = f(x) - a$ und $y = f(x - a)$ beschriebenen Funktionen im Vergleich zum Graphen der Funktion f selbst aussehen.

(c) Gegeben sei wieder eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wie sehen die Graphen der durch die Gleichungen $y = -f(x)$ bzw. $y = f(-x)$ beschriebenen Funktionen im Vergleich zum Graphen der Funktion f selbst aus?

Aufgabe 5 (Auswirkungen von Änderungen in der Funktionsvorschrift auf den Funktionsgraphen)
In der folgenden Abbildung ist der Graph einer reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dargestellt.



Die Funktionen $g_1, \ldots, g_9 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien wie folgt definiert:

$$g_1(x) = f(x) - 1, \qquad g_2(x) = f(x) + 1, \qquad g_3(x) = 3f(x),$$
$$g_4(x) = \frac{1}{3}f(x), \qquad g_5(x) = 2f(x), \qquad g_6(x) = f(2x),$$
$$g_7(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right), \qquad g_8(x) = f(x - 1), \qquad g_9(x) = f(x + 1).$$

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden vier Abbildungen, von welcher der Funktionen $g_1, \ldots, g_9$ der Graph dargestellt ist.

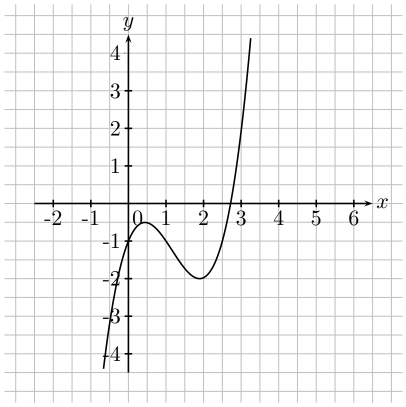


Abbildung 1

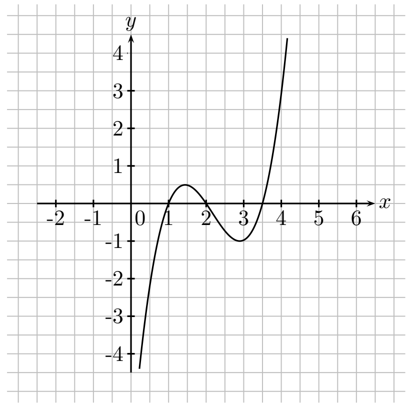


Abbildung 2

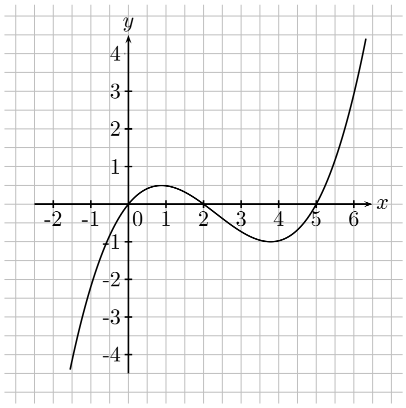


Abbildung 3

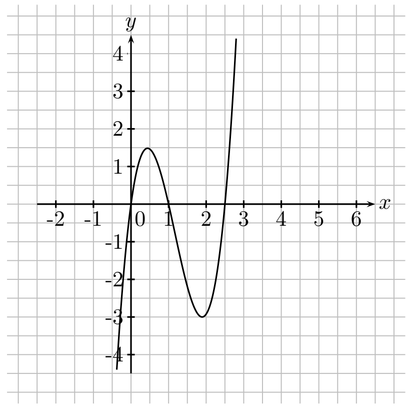


Abbildung 4

(b) Zeichnen Sie die Graphen derjenigen Funktionen $g_1, \ldots, g_9$, deren Graphen nicht bereits in Teilaufgabe (a) dargestellt waren.

(c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $h_1(x) = -f(x)$ und $h_2(x) = f(-x)$.

(d) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $h_3(x) = |f(x)|$.

Übungsaufgaben Teil 3: Bestimmen der Funktionsvorschrift anhand des Graphen; und umgekehrt: Zeichnen des Funktionsgraphen anhand der Funktionsvorschrift

Aufgabe 6 (Funktionsgraphen von linearen Funktionen)

(a) Eine lineare Funktion lässt sich stets durch eine Funktionsvorschrift der Gestalt $f(x) = mx+n$ beschreiben (mit Konstanten $m, n \in \mathbb{R}$). Welche Bedeutung haben dabei die Werte m und n für den Graphen von f?

(b) In jeder der folgenden Abbildungen ist der Graph einer linearen Funktion dargestellt. Geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift in der Gestalt $f(x) = mx + n$ an.

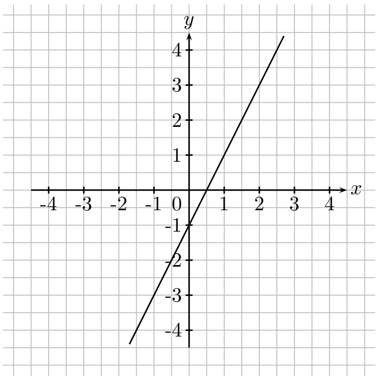


Abbildung 1

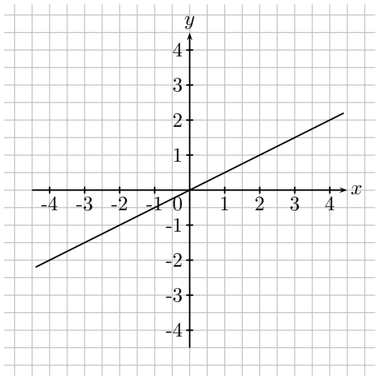


Abbildung 2

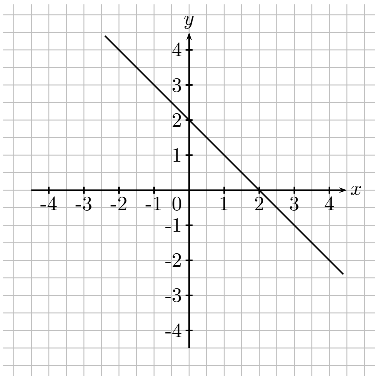


Abbildung 3

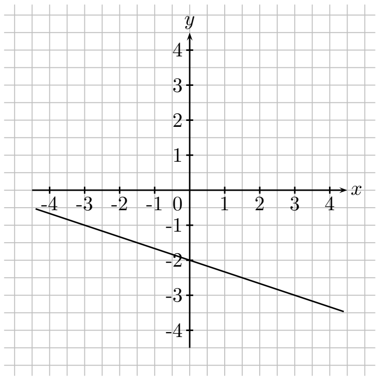


Abbildung 4

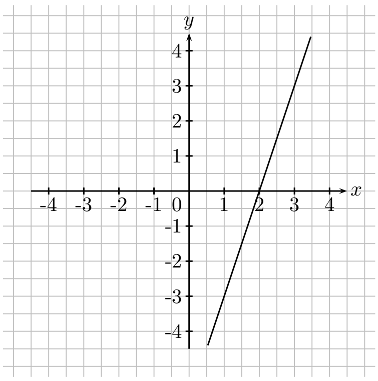


Abbildung 5

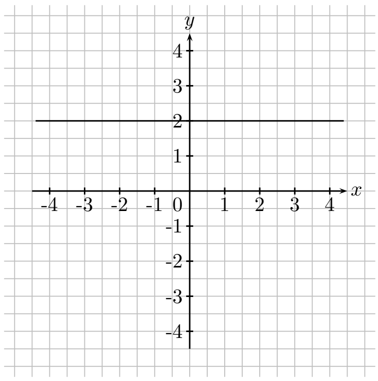


Abbildung 6

(c) Zeichnen Sie die Graphen der linearen Funktionen $f_1, \ldots, f_4$, gegeben durch

$$f_1(x) = x - 3, \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x + 3, \quad f_3(x) = \frac{2}{3}x + 1, \quad f_4(x) = -4x - 12.$$

(d) In jeder der folgenden Teilaufgaben sind zwei Punkte P und Q gegeben. Bestimmen Sie jeweils die Funktionsvorschrift derjenigen linearen Funktion, deren Graph durch die beiden gegebenen Punkte P und Q verläuft.

(d1) $P = (1, 2),\ Q = (3, 0)$ (d2) $P = (-2, 1),\ Q = (4, 3)$

(d3) $P = (0, 0),\ Q = (2, 3)$ (d4) $P = (-3, -2),\ Q = (1, 2)$

Aufgabe 7 (Funktionsgraphen von quadratischen Funktionen)

(a) Man sagt, die Vorschrift einer quadratischen Funktion ist in der *Scheitelpunktform* gegeben, wenn sie die Gestalt $f(x) = a(x-b)^2+c$ hat ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, Konstanten). Welche Bedeutung haben dabei die Werte a, b, c für den Graphen von f?

(b) In jeder der folgenden Abbildungen ist der Graph einer quadratischen Funktion dargestellt. Geben Sie jeweils die Funktionsvorschrift an, und zwar einmal in der Scheitelpunktform $f(x) = a(x-b)^2 + c$ und einmal in der Form $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

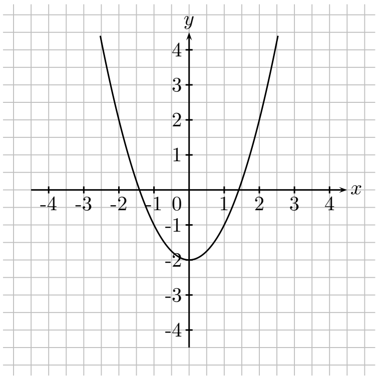


Abbildung 1

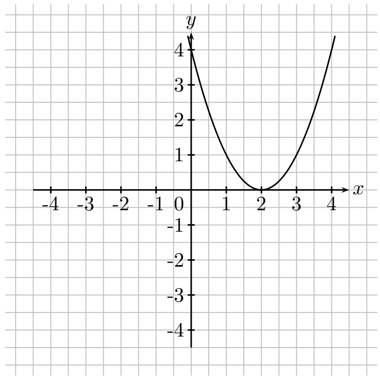


Abbildung 2

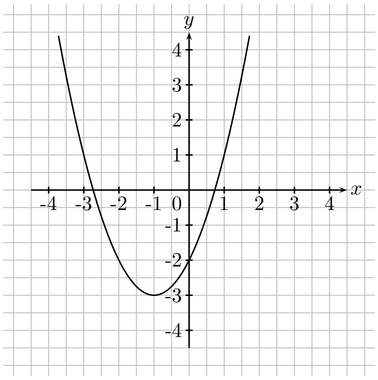


Abbildung 3

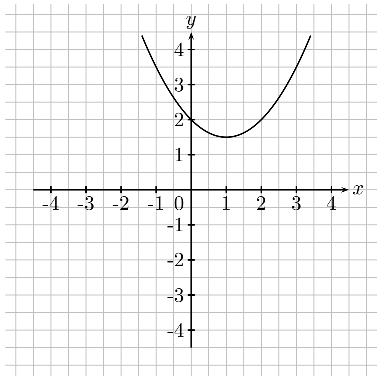


Abbildung 4

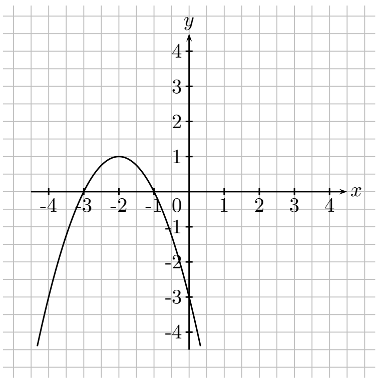


Abbildung 5

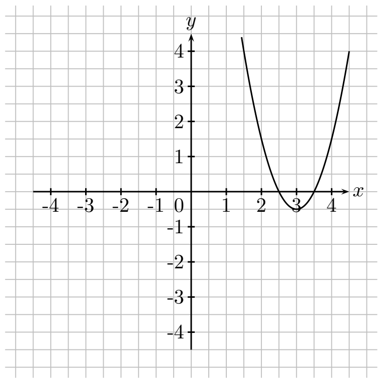


Abbildung 6

(c) Gegeben sei eine quadratische Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, Konstanten). Überführen Sie diese Vorschrift in die Scheitelpunktform $f(x) = a(x-b)^2 + c$. (Wie lassen sich also a, b, c in Abhängigkeit von α, β, γ berechnen?)

(d) Zeichnen Sie die Graphen der quadratischen Funktionen f_1, f_2, f_3, gegeben durch

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 3, \quad f_2(x) = 3x^2 + 12x + 8, \quad f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2.$$

Überführen Sie dazu die Funktionsvorschriften zunächst in die Scheitelpunktform.

Aufgabe 8 (Funktionsgraph, größtmöglicher Definitionsbereich und Bildbereich einer Funktion)
In den folgenden Teilaufgaben bezeichne D_f jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich der gegebenen Funktion f. Bestimmen Sie jeweils D_f und skizzieren Sie den Graphen von f. Geben Sie außerdem den Bildbereich der Funktion f an.

(a) Funktionen, in deren Vorschrift das Argument unter dem Bruchstrich vorkommt.

(a1) $f(x) = \frac{1}{x}$ (a2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(a3) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (a4) $f(x) = \frac{1}{2x-3} + 1$

(b) Funktionen, in deren Vorschrift das Argument unter der Wurzel vorkommt.

(b1) $f(x) = \sqrt{x}$ (b2) $f(x) = \sqrt{2x-1} - 3$

(b3) $f(x) = -\sqrt{x-1} + 1$ (b4) $f(x) = \sqrt{|x|}$

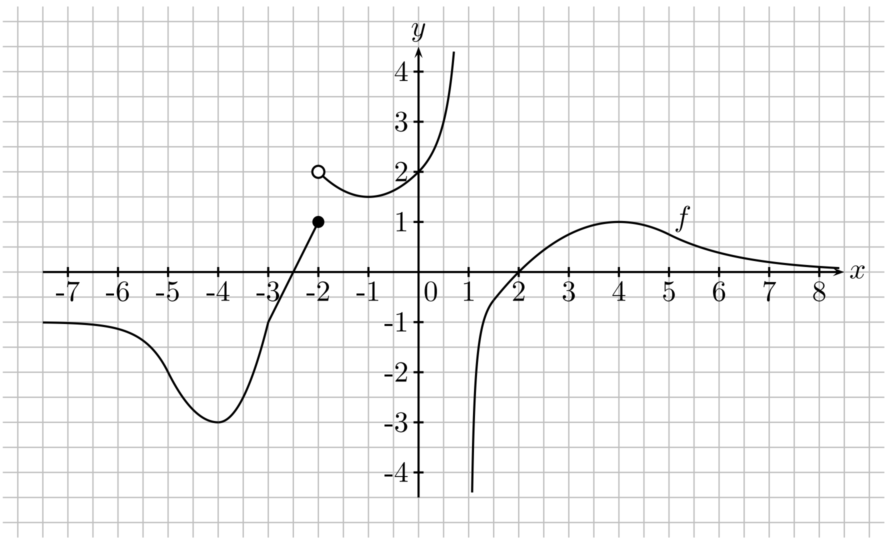
(c) Funktionen, in deren Vorschrift das Argument im Logarithmus vorkommt.

(c1) $f(x) = \ln(x)$ (c2) $f(x) = \ln(x+1)$

(c3) $f(x) = \ln(2x-3)$ (c4) $f(x) = \ln|x+1|$

Übungsaufgaben Teil 4: Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

Aufgabe 9 (Ablesen wichtiger Eigenschaften einer Funktion am Funktionsgraphen)
Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$.



(a) Geben Sie die Funktionswerte $f(0)$, $f(-4)$ und $f(-2)$ an.

(b) Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f an.

(c) Bestimmen Sie alle Monotonieintervalle von f, das heißt, alle Intervalle, in denen f monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

(d) Geben Sie alle Stellen an, an denen f nicht stetig ist. Geben Sie jeweils auch die Art der Unstetigkeit an (Sprungstelle, Polstelle oder hebbare Definitionslücke).

(e) Bestimmen Sie das Verhalten von f im Unendlichen, das heißt, geben Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ an.

Aufgabe 10 (Wahr-/Falsch-Aussagen zu Eigenschaften von Funktionen)
Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung, beispielsweise durch die Angabe eines entsprechenden Gegenbeispiels.

(a) Der größtmögliche Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ ist gegeben durch $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Der größtmögliche Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ ist gegeben durch $D_f = \mathbb{R}$.

(c) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt $f(x) = a \cdot b^x$ mit Konstanten $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b > 1$ ist stets monoton wachsend.

(d) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt $f(x) = x^2 + px + q$ mit Konstanten $p \in \mathbb{R}$ und $q < 0$ besitzt stets zwei unterschiedliche reelle Nullstellen.

(e) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gestalt $f(x) = x^2 + px + q$ mit Konstanten $p \in \mathbb{R}$ und $q > 0$ besitzt niemals eine reelle Nullstelle.

(f) Es gibt keine reelle Funktion, die sowohl gerade als auch ungerade ist.

(g) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende, stetige Funktion. Dann hat f mindestens eine Nullstelle.

(h) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Dann ist f umkehrbar.

(i) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine umkehrbare Funktion. Dann ist f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

(j) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade Funktion. Dann ist f nicht umkehrbar.

(k) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f(1) = 2$ und $f(3) = -1$ gilt. Dann hat f mindestens eine Nullstelle im Intervall $(1, 3)$.

(l) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = 2.$$

Dann ist f stetig an der Stelle $x = 1$.

(m) Eine auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist niemals beschränkt.

Aufgabe 11 (Umkehrfunktion)
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 3x + 2.$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in einem Koordinatensystem.

(b) Zeichnen Sie in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe (a) zusätzlich die Gerade ein, die durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten entsteht.

(c) Es sei g die Funktion, deren Graph die in Teilaufgabe (b) gezeichnete Gerade ist. Geben Sie die Funktionsvorschrift von g an.

(d) In welcher Beziehung stehen die Funktionen f und g zueinander?

Aufgabe 12 (Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen)
Untersuchen Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils, ob an der Stelle $x = 1$ links- und rechtsseitiger Grenzwert der Funktion f existieren und berechnen Sie ggf. deren Werte. Entscheiden Sie anhand Ihrer Ergebnisse, ob der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert. Schlussfolgern Sie außerdem jeweils, ob f stetig an der Stelle $x = 1$ ist.

(a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{für } x < 1, \\ -x^2+2x-1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+2 & \text{für } x < 1, \\ 2\sin(\frac{\pi}{2}x) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x \leq 1, \\ \frac{1}{x-1} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{für } x < 1, \\ -1 & \text{für } x = 1, \\ x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$