Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich
F. Friedrich

Brückenkurs Mathematik 2024

4. Übung am 27. September 2024 für die Gruppe „Lehramt Math Spezial“
Thema: Termumformungen, Gleichungen und Polynomdivision

Das vierte Übungsblatt beschäftigt sich mit Termumformungen, dem Lösen von Gleichungen und Polynomdivision.

Übungsaufgaben Teil 1: Termumformungen, Gleichungen

Aufgabe 1

Formen Sie folgende Terme um und fassen Sie so weit wie möglich zusammen.

(a) $\dfrac{2ab+4bc}{2b+4bc} \qquad (a,b,c \in \mathbb{R} \text{ mit } 2b+4bc \neq 0)$

(b) $\dfrac{\frac{a+1}{b}}{\frac{a(a+1)}{3b}} \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\},\ b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(c) $\dfrac{18a+6}{3a^2} - \dfrac{2-5a}{a^2} \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(d) $(3^{-2} - 5^{-1})^{-1}$

(e) $\ln(\mathrm{e}^5)$

(f) $6\,\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}\right) \qquad (x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0)$

(g) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-1} - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1}$

Aufgabe 2

Wir kennen das Wurzelgesetz $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. Wir wollen nun „beweisen“, dass $2 = -2$ gilt. Dazu führen wir folgende Umformung aus:

$$2 = \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2} = (-2)^{\frac{2}{2}} = (-2)^1 = -2.$$

Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 3

Ermitteln Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen.

(a) $25 + (2x-6)(3x-5) - (3x-6)(2x-5) = 4x$

(b) $\mathrm{e}^{x-1} = 1$

(c) $\ln\left(\sqrt{x-4}\right) = \dfrac{1}{2}$

(d) $-24 - 3x(x-4) = -3x^2$

(e) $\dfrac{x+4}{x-3} = 2$

(f) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+4}} = 2$

(g) $\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1} = 3$

Aufgabe 4

Begründen Sie, möglichst ohne viele Termumformungen, dass die Gleichung $\sqrt{3-x}+5 = 4-\sqrt{7-2x}$ keine Lösung in den reellen Zahlen besitzt.

Aufgabe 5

Führen Sie für jedes der folgenden Polynome eine quadratische Ergänzung durch und geben Sie anschließend die Koordinaten des Scheitelpunkts des Funktionsgraphen an. Bestimmen Sie außerdem jeweils alle reellen Nullstellen und skizzieren Sie den Funktionsgraphen.

(a) $f(x) = x^2 + 4x - 12$

(b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(c) $f(x) = x^2 - 10x + 16$

(d) $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Aufgabe 6

Leiten Sie mithilfe einer quadratischen Ergänzung die bekannte pq-Formel her, nach der die durch

$$f(x) = x^2 + px + q$$

gegebene quadratische Funktion die reellen Nullstellen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

besitzt, sofern $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$ ist (und andernfalls keine reellen Nullstellen hat).

Übungsaufgaben Teil 2: Polynomdivision

Aufgabe 7

Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch.

(a) $(x^3 + 5x^2) : (x+3)$

(b) $(x^2 + x + 2) : (x+2)$

(c) $(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) : (x-2)$

(d) $(x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 6x - 5) : (x^2 - 2x - 3)$

(e) $(x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18) : (x^2 - 2x - 3)$

Aufgabe 8

Geben Sie in jeder der folgenden Teilaufgaben eine erste reelle Nullstelle des gegebenen Polynoms an. Führen Sie anschließend mit Hilfe dieser ersten Nullstelle eine geeignete Polynomdivision durch, um weitere reelle Nullstellen des Polynoms zu ermitteln.

(a) $x^3 - x$

(b) $x^3 - 4x$

(c) $x^3 + 2x^2 - x - 2$

(d) $x^3 + 4x^2 + x - 6$