Prof. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

4. Übung am 27. September 2024 für die Gruppe „Math/Phys Spezial“

Dieses Übungsblatt beschäftigt sich mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion.
Hinweis: In einigen Aufgaben kommt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ vor (mit $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$). Dieser ist definiert durch $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass folgende Summengleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ für alle reellen Zahlen $x \neq 1$.

Aufgabe 2

Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. $n^5 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 5 teilbar
2. $3^{2n} - 2^n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 7 teilbar
3. $n^3 \leq 3^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>2}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie die Potenzgesetze mithilfe von vollständiger Induktion d.h.: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}$, dann gelten

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
3. $a^n b^n = (ab)^n$
4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Aufgabe 4

Sei M eine beliebige endliche Menge. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ gilt. Nutzen Sie im Gegensatz zur Übung vom Dienstag diesmal vollständige Induktion.

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $\sqrt[2^n]{2}$ irrational ist.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$,
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+2}{k}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^3$,
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Aufgabe 7

Wir wollen ein beliebiges Quadrat mit Rechtecken ausfüllen, wobei sich die Rechtecke nicht überschneiden und ein Seitenverhältnis von 1 zu 2 haben sollen. Für welche Anzahl n an Rechtecken ist dies möglich?

Hinweis: Zeigen Sie dafür folgende Aussagen:

1. Für $n = 2$, $n = 6$ und $n = 7$ ist dies möglich.
2. Wenn es für n möglich ist, dann auch für $n + 3$.
3. Zeigen Sie, dass für $n \geq 5$ dies möglich ist.
4. Zeigen Sie, dass dies nicht für $n = 1$, $n = 3$ und $n = 4$ möglich ist.

Zusatz

Aufgabe 8

(a) Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ sei A_n^k die Menge aller Abbildungen $f : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$ mit $\sum_{i=1}^{n} f(i) = k$. Zeigen Sie, dass $|A_n^k| = \binom{n}{k}$ gilt.

(b) Sei $A \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. Wir definieren eine Abbildung $f_A : \{1, \dots, n\} \to \{0, 1\}$ mit:

$$f_A(i) := \begin{cases} 0 & \text{für } i \notin A, \\ 1 & \text{für } i \in A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Menge der Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{0, 1\}$ bijektiv zu $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ ist.

Aufgabe 9

Zeigen Sie den Binomischen Lehrsatz:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} : (a + b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Aufgabe 10

Beweisen Sie das Beweisprinzip der vollständigen Induktion.

Hinweis: Betrachen Sie die Menge $N := \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ ist wahr}\}$ und zeigen Sie $N = \mathbb{N}$.