Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

5. Übung am 1. Oktober 2021
Thema: Differentialrechnung und Anwendungen

Schwerpunktaufgaben: 2, 6, 7, 8, 10, 11

Zunächst ein Hinweis: In der 5. Vorlesung ging es neben der Differentialrechnung auch um eine Einführung in die Integralrechnung. Da beide Themen zusammen etwas viel für eine einzige Übung wären, enthält diese Übung erstmal ausschließlich Aufgaben zur Differentialrechnung. Es werden allerdings als Nachtrag einige Aufgaben zur Integralrechnung auf dem 7. Übungsblatt, welches am 5. Oktober in den Übungen besprochen wird, enthalten sein.

Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie sind dazu in der Lage, die 1. Ableitung für gewisse Funktionen zu bestimmen (unter Verwendung von Ableitungsregeln wie Summenregel, Regel für konstante Faktoren, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel).
- Sie kennen die Bedeutung der 1. Ableitung als lokale Änderungsrate der Funktion und als Anstieg der Tangente an den Funktionsgraphen an einer Stelle.
- Sie sind dazu in der Lage, das Monotonieverhalten einer Funktion mit Hilfe der 1. Ableitung zu untersuchen, und das Krümmungsverhalten einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung zu untersuchen.
- Sie sind dazu in der Lage, lokale Extremstellen einer Funktion einschließlich der Art (Maximal- oder Minimalstelle) mit Hilfe von Ableitungen zu ermitteln.
- Sie sind dazu in der Lage, praktische Extremwertaufgaben als Optimierungsproblem mit Zielfunktion und Nebenbedingung zu modellieren und das erhaltene Optimierungsproblem zu lösen.

Passende Online-Zusatzangebote:

- Angebote im OPAL-Kurs „Online-Vorbereitungskurs Mathematik“[1]:
  Im Bereich „Differentialrechnung“ finden Sie eine inhaltliche Aufbereitung und weitere Übungsaufgaben zu diesem Thema.
- zusätzliche Übungsaufgaben im OPAL-Kurs „TUDMATH Brückenkurs Mathematik - Übungsaufgaben“[2]:
  Es eignen sich sämtliche Aufgaben im Bereich „Differentialrechnung“. Dort finden Sie Übungsaufgaben zur Bestimmung von Ableitungen und zur Ermittlung der lokalen Extremstellen einer Funktion.

Passende Literatur:

- Kapitel 4 zum Thema Differentialrechnung im Lehrbuch
  Merziger, G., Holz, M., Timmann, S., Wille, D.: Repetitorium Elementare Mathematik 2. Binomi, Barsinghausen, 2012.

[1] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826?9`
[2] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/9503768589?7`

- Abschnitte 10.3 sowie 10.4 im Lehrbuch
  Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 6. Auflage, Springer, Berlin, 2015.
- Abschnitte 8.4.1 bis 8.4.11 im Lehrbuch
  Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 9. Auflage, Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2010.

Übungsaufgaben Teil 1: Berechnen von Ableitungen.

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten, dass diese Funktion an jeder Stelle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist und dass für die Ableitung $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ gilt.

2. Üblicherweise brauchen Ableitungen nicht, wie in Aufgabe 1 verlangt, mit Hilfe des Differenzenquotienten berechnet werden. Stattdessen verwendet man bekannte (und tabellierte) Ableitungen einiger elementarer Funktionen sowie Ableitungsregeln.

   Bestimmen Sie auf diese Weise die Ableitungen der folgenden Funktionen f. In welchen Teilaufgaben ist die Verwendung der Produkt- bzw. der Quotienten- bzw. der Kettenregel erforderlich?

   (a) $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 20x - 17 \quad (x \in \mathbb{R})$

   (b) $f(x) = 2x^2 - \frac{6}{x^3} \quad (x \neq 0)$

   (c) $f(x) = 3\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

   (d) $f(x) = 2x\mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R})$

   (e) $f(x) = \frac{x-2}{x^3-2} \quad (x \neq \sqrt[3]{2})$

   (f) $f(x) = \sin(3x - 6) \quad (x \in \mathbb{R})$

   (g) $f(x) = \sin(x)\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

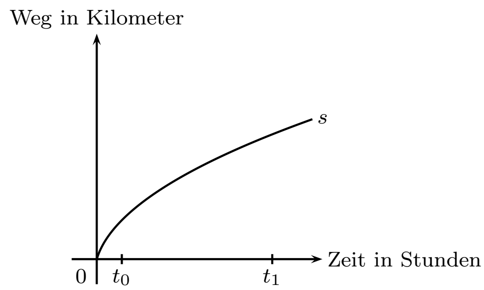
   (h) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$

Übungsaufgaben Teil 2: Deutung der Ableitung als Tangentenanstieg und als lokale Änderungsrate der Funktion.

3. Gegeben seien eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $[x_0, x_1]$. Ordnen Sie den folgenden Begriffen (links) die korrekten Ausdrücke (rechts) zu. Beachten Sie, dass Mehrfachzuordnungen möglich sind.

Differenzenquotient	☐	☐	$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
Differentialquotient	☐	☐	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
mittlere Änderungsrate	☐	☐	$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
lokale Änderungsrate	☐	☐	$f'(x_0)$
1. Ableitung	☐	☐	$f''(x_0)$
Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0	☐	☐	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

4. Das folgende Diagramm zeigt den zurückgelegten Weg s eines Marathonläufers in Abhängigkeit von der Zeit t.



(a) Veranschaulichen Sie die mittlere Änderungsrate des zurückgelegten Weges im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ in der Abbildung und interpretieren Sie diese Angabe im Sachzusammenhang.

(b) Markieren Sie in der Abbildung den Steigungswinkel der Gerade durch die beiden Punkte $(t_0, s(t_0))$ und $(t_1, s(t_1))$ und geben Sie eine Formel zur Berechnung dieses Winkels an.

(c) Veranschaulichen Sie die lokale Änderungsrate an der Stelle t_0 in der Abbildung und interpretieren Sie diese Größe im Sachzusammenhang.

5. In jeder der folgenden vier Abbildungen sind der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ein Punkt P_0 auf dem Graphen von f sowie eine Gerade g zu sehen. In welchen der Abbildungen ist g Tangente an den Graphen von f im Punkt P_0? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

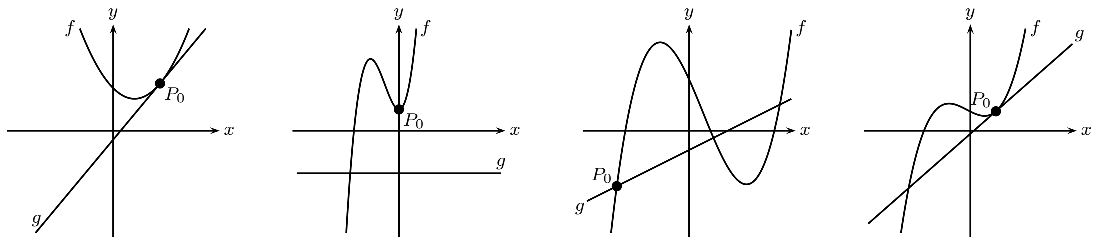


Abbildung 1 | Abbildung 2 | Abbildung 3 | Abbildung 4

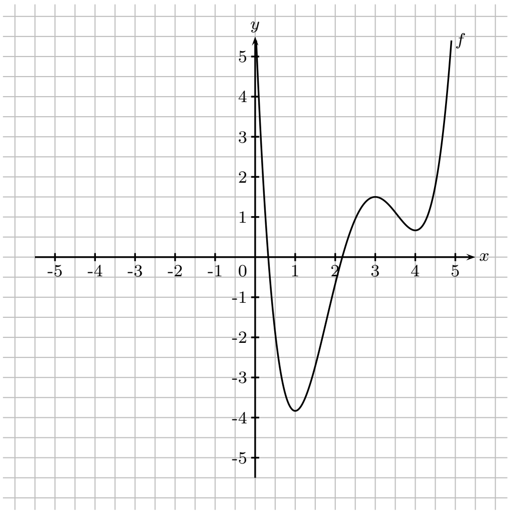
6. Gegeben sei die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = \sqrt{x}$.

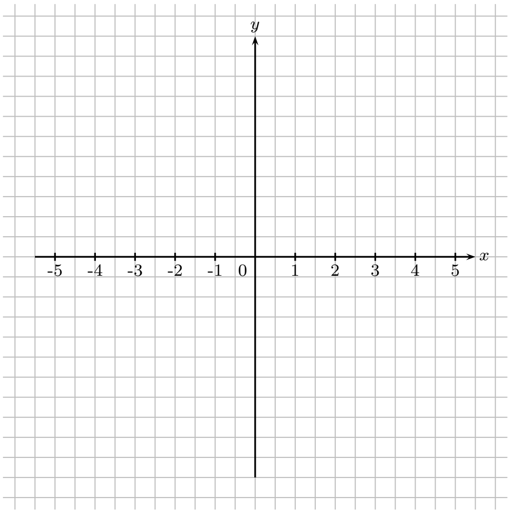
(a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 4$.

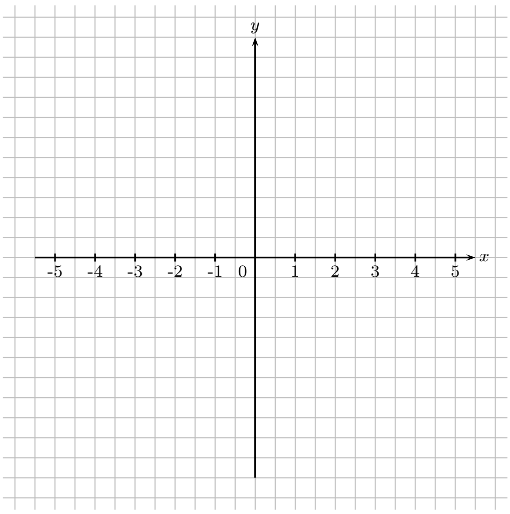
(b) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Tangente an den Graphen von f, die durch den Punkt $P(-1, 0)$ verläuft.

Übungsaufgaben Teil 3: Untersuchung von Eigenschaften einer Funktion mittels Ableitungen.

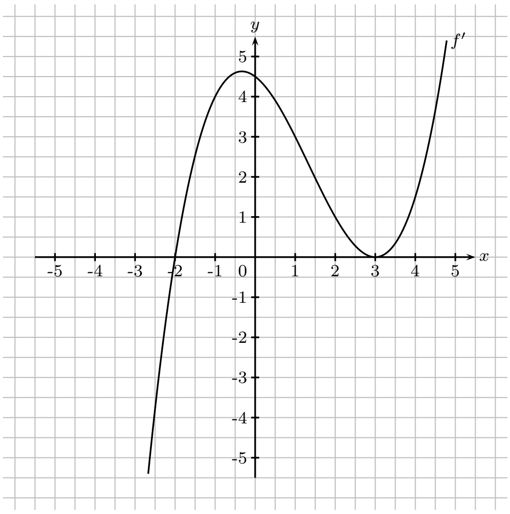
7. Gegeben sei der im Folgenden dargestellte Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizzieren Sie in die Koordinatensysteme darunter die Graphen der ersten und der zweiten Ableitung von f.







8. In der folgenden Abbildung ist der Graph der Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dargestellt.



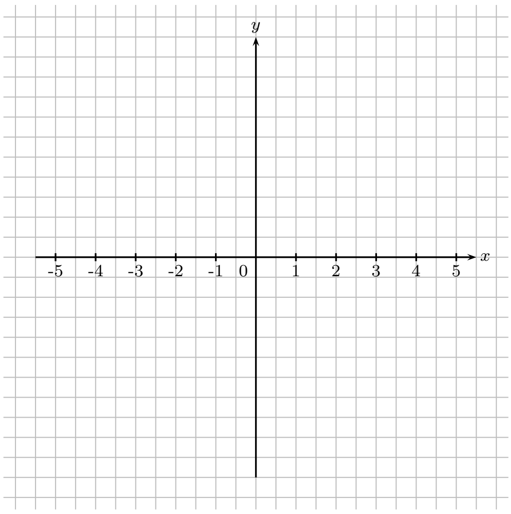
Von der Funktion f sei noch bekannt, dass ihr Graph an der Stelle $x = 0$ die x-Achse schneidet. Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben ausschließlich unter Zuhilfenahme des Graphen von f'.

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f an der Stelle $x = -2$ eine lokale Minimalstelle hat.

(b) Geben Sie alle weiteren Stellen an, an denen die Tangente an den Graphen von f waagerecht verläuft und entscheiden Sie jeweils, ob es sich dabei um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder einen Sattelpunkt von f handelt.

(c) Geben Sie (zumindest näherungsweise) die Lage sämtlicher Wendestellen der Funktion f an.

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im folgenden Koordinatensystem.



Aus welchem Grund wurde Ihrer Meinung nach in der Aufgabenstellung angegeben, dass der Graph von f die x-Achse an der Stelle $x = 0$ schneidet bzw. für welche der Teilaufgaben (a)–(d) war diese Information überhaupt relevant?

9. Zeichnen Sie den Graphen einer beliebigen zweimal stetig differenzierbaren Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es gilt $g'(0) < 0$.
- Es gilt $g'(1) < 0$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g''(x) < 0$.

Zusatz: Bestimmen Sie eine mögliche Funktionsvorschrift für g.

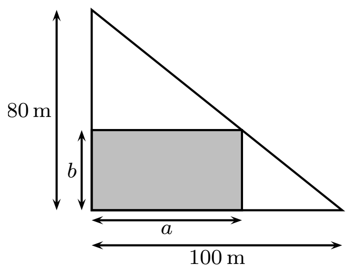
10. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 + 3x^2.$$

Ermitteln Sie alle Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte einschließlich deren Art, die Koordinaten der Wendepunkte sowie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen. Ermitteln Sie außerdem eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$. Skizzieren Sie unter Verwendung ihrer Ergebnisse den Graphen der Funktion.

Übungsaufgaben Teil 4: Extremwertaufgaben.

11. Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m hat, soll eine Markthalle mit rechteckigem Grundriss errichtet werden, vgl. nachfolgende Skizze.



Wie sind die Abmessungen a und b zu wählen, damit die Grundfläche der Markthalle maximal wird und wie groß ist die maximale Grundfläche?

12. Aus einem Baumstamm (Kreisquerschnitt, Radius R) soll ein Balken mit Rechteckquerschnitt (Breite b, Höhe h) so herausgeschnitten werden, dass er eine möglichst große Tragfähigkeit besitzt, die durch das Widerstandsmoment $W = \frac{1}{6}bh^2$ gemessen werden kann. Berechnen Sie für diesen Fall Breite b und Höhe h des Balkens.[3]

Übungsaufgaben Teil 5: Weitere Aufgaben.

Bei den folgenden Aufgaben handelt es sich teilweise um wiederholende Aufgaben, teilweise aber auch um weiterführendere Aufgaben. Sie sind nicht in erster Linie für die Besprechung in den Übungen gedacht. Falls Sie aber Fragen zu diesen Aufgaben haben, können Sie diese natürlich trotzdem gerne Ihrer Übungsleiterin bzw. Ihrem Übungsleiter stellen.

13. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen f.

    (a) $f(x) = 3x^5 - 6x^2 + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$

    (b) $f(x) = \dfrac{3}{x} + x\sqrt{x} \quad (x > 0)$

    (c) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2} \quad (x \neq 0)$

    (d) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} \quad (x \in \mathbb{R})$

    (e) $f(x) = 7x^2 \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

[3] Diese Aufgabe stammt aus der Aufgabensammlung Wenzel, H., Heinrich, G.: Übungsaufgaben zur Analysis. Teubner, Wiesbaden 2005.

(f) $f(x) = 7x^2 \sin(3x) \quad (x \in \mathbb{R})$

(g) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$

14. Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = |x|$.
Zeigen Sie, dass diese Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie dazu einmal den rechtsseitigen Grenzwert und einmal den linksseitigen Grenzwert des Differenzenquotienten, das heißt,

$$\lim_{h \to 0,\, h>0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{und} \quad \lim_{h \to 0,\, h<0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

und zeigen Sie, dass diese nicht übereinstimmen.

15. In jeder der folgenden vier Abbildungen sind der Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Entscheiden Sie jeweils anhand des Graphen, ob die Funktion

(a) stetig,

(b) differenzierbar

an der Stelle x_0 ist.

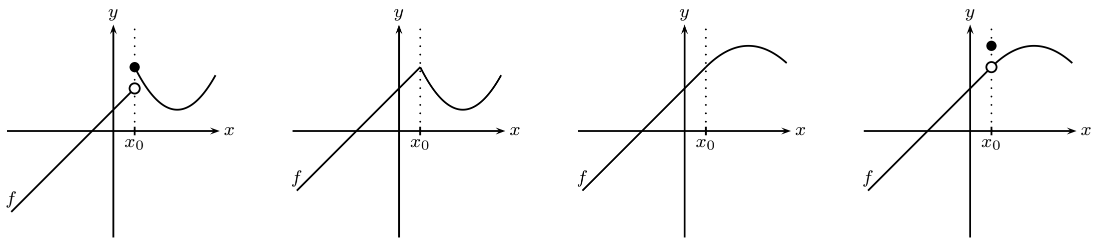


Abbildung 1 Abbildung 2 Abbildung 3 Abbildung 4

16. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Ermitteln Sie alle Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte einschließlich deren Art sowie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen. Ermitteln Sie außerdem eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$. Skizzieren Sie unter Verwendung ihrer Ergebnisse den Graphen der Funktion.

17. Zwei Fahrzeuge A und B bewegen sich längs der beiden Koordinatenachsen gleichförmig mit den Geschwindigkeiten $v_A = 0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ bzw. $v_B = 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in Richtung Koordinatenursprung (und dann auch weiter entlang der negativen Koordinatenachsen). Zu Beginn ($t = 0\,\mathrm{s}$) befindet sich das Fahrzeug A am Ort $x(0) = 15\,\mathrm{m}$ und das Fahrzeug B bei $y(0) = 12\,\mathrm{m}$. Zu welcher Zeit ist der Abstand der beiden Fahrzeuge zueinander am kleinsten?