Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

5. Übung am 30. September 2024
Thema: Einführung in die Differential- und Integralrechnung

Schwerpunktaufgaben: 1, 2, 3, 4, 7, 11

Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie sind dazu in der Lage, die 1. Ableitung für gewisse Funktionen zu bestimmen (unter Verwendung von Ableitungsregeln wie Summenregel, Regel für konstante Faktoren, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel).
- Sie kennen die Bedeutung der 1. Ableitung als Anstieg der Tangente an den Funktionsgraphen an einer Stelle.
- Sie sind dazu in der Lage, das Monotonieverhalten einer Funktion mit Hilfe der 1. Ableitung zu untersuchen und das Krümmungsverhalten einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung zu untersuchen.
- Sie sind dazu in der Lage, lokale Extremstellen einer Funktion einschließlich der Art (Maximal- oder Minimalstelle) mit Hilfe von Ableitungen zu ermitteln.
- Sie können praktische Extremwertaufgaben als Optimierungsproblem mit Zielfunktion und Nebenbedingung modellieren und das erhaltene Optimierungsproblem lösen.
- Sie sind dazu in der Lage, Stammfunktionen zu gewissen Funktionen zu bestimmen (unter Verwendung einfacher Integrationsregeln/-methoden wie Summenregel, Regel für konstante Faktoren und Methode der linearen Substitution).
- Sie kennen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und können bestimmte Integrale mittels Stammfunktionen berechnen.
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen bestimmtem Integral und dem Inhalt der Fläche, die der Graph einer Funktion in einem vorgegebenen Intervall mit der x-Achse einschließt. Sie sind dazu in der Lage, Inhalte von Flächen zwischen Funktionsgraphen und x-Achse zu berechnen.

Passende Online-Zusatzangebote:

Im Online-Vorbereitungskurs Mathematik der TU Dresden[1] bieten sich das Kapitel zur Differentialrechnung, insbesondere die in den Abschnitten „Ableitungen“ und „Anwendungen der Differentialrechnung“ bereitgestellten Selbsttests und Lernvideos, sowie das Kapitel zur Integralrechnung, insbesondere die in den Abschnitten „Stammfunktionen“ und „Bestimmtes Integral“ bereitgestellten Selbsttests und Lernvideos, zum Wiederholen, Vertiefen und weiteren Üben dieser Themen an.

Passende Literatur:

- Kapitel 4 und 5 im Lehrbuch
  Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 2. Binomi, Barsinghausen, 2012.
- Abschnitte 10.3, 10.4, 11.1 und 11.2 im Lehrbuch
  Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 8.4.1 bis 8.4.11 sowie Abschnitte 8.5.1 bis 8.5.7 im Lehrbuch
  Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

[1] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826`

Übungsaufgaben Teil 1: Differentialrechnung

Aufgabe 1 (Bestimmung von Ableitungen unter Verwendung von Ableitungsregeln)
Bestimmen Sie unter Verwendung von bekannten (und tabellierten) Ableitungen sowie ggf. geeigneten Ableitungsregeln die Ableitungen der folgenden Funktionen f. In welchen Teilaufgaben ist die Verwendung der Produkt- bzw. der Quotienten- bzw. der Kettenregel erforderlich?

(a) $f(x) = 5x^4 - 7x^3 + 20x - 17 \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) = 2x^2 - \dfrac{6}{x^3} \quad (x \neq 0)$

(c) $f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

(d) $f(x) = 2x\mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R})$

(e) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^3-2} \quad (x \neq \sqrt[3]{2})$

(f) $f(x) = \sin(3x - 6) \quad (x \in \mathbb{R})$

(g) $f(x) = \sin(x)\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

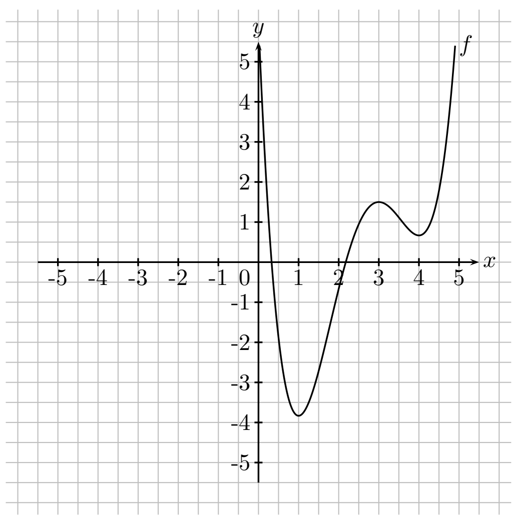
(h) $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$

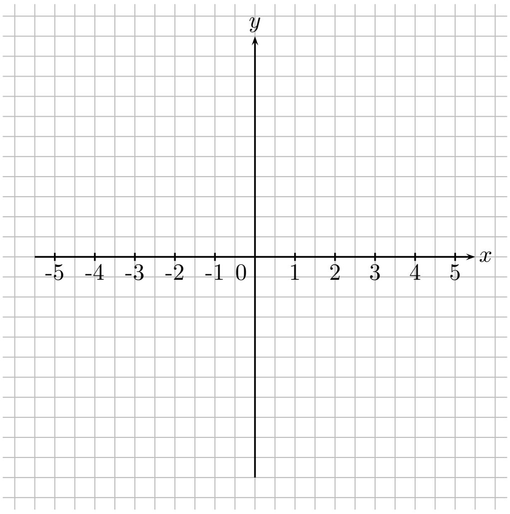
Aufgabe 2 (Tangente an den Funktionsgraphen an einer vorgegebenen Stelle)
Gegeben sei die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = \sqrt{x}$.

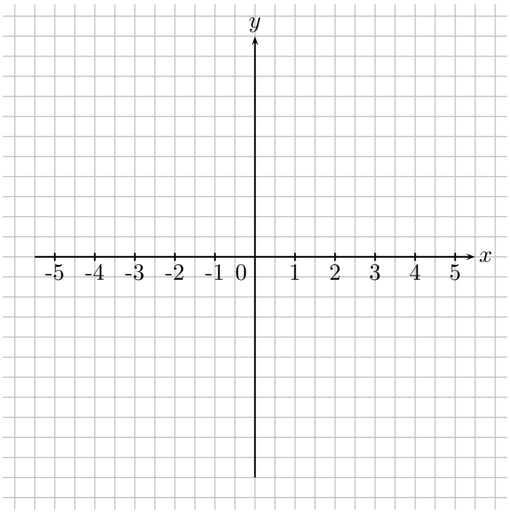
(a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x_0 = 4$.

(b) Ermitteln Sie eine Gleichung derjenigen Tangente an den Graphen von f, die durch den Punkt $P = (-1, 0)$ verläuft.

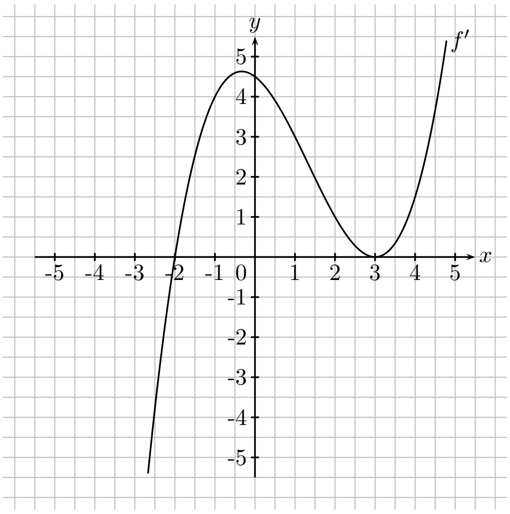
Aufgabe 3 (Graphen der 1. und 2. Ableitung einer Funktion)
Gegeben sei der im Folgenden dargestellte Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizzieren Sie in die Koordinatensysteme darunter die Graphen der ersten und der zweiten Ableitung von f.







Aufgabe 4 (Charakterisierung von lokalen Extremstellen und Wendestellen durch Ableitungen)
In der folgenden Abbildung ist der Graph der Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dargestellt.



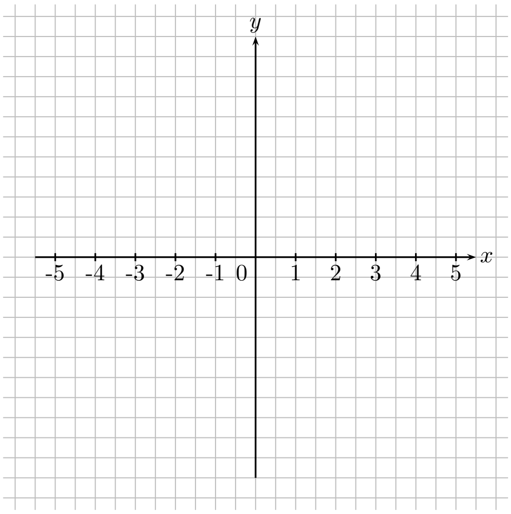
Von der Funktion f sei noch bekannt, dass ihr Graph an der Stelle $x = 0$ die x-Achse schneidet.
Lösen Sie die folgenden Teilaufgaben ausschließlich unter Zuhilfenahme des Graphen von f'.

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f an der Stelle $x = -2$ eine lokale Minimalstelle hat.

(b) Geben Sie alle weiteren Stellen an, an denen die Tangente an den Graphen von f waagerecht verläuft und entscheiden Sie jeweils, ob es sich dabei um eine lokale Minimalstelle, eine lokale Maximalstelle oder einen Sattelpunkt von f handelt.

(c) Geben Sie (zumindest näherungsweise) die Lage sämtlicher Wendestellen der Funktion f an.

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im folgenden Koordinatensystem.



Aus welchem Grund wurde Ihrer Meinung nach in der Aufgabenstellung angegeben, dass der Graph von f die x-Achse an der Stelle $x = 0$ schneidet bzw. für welche der Teilaufgaben (a)–(d) war diese Information überhaupt relevant?

Aufgabe 5 (Kurvendiskussion)

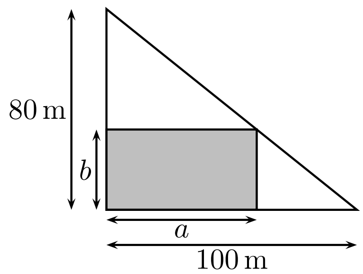
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 + 3x^2.$$

Ermitteln Sie alle Nullstellen, die Koordinaten der lokalen Extrempunkte einschließlich deren Art, die Koordinaten der Wendepunkte sowie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen. Ermitteln Sie außerdem eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -1$. Skizzieren Sie unter Verwendung ihrer Ergebnisse den Graphen der Funktion.

Aufgabe 6 (Aufstellen und Lösen eines Optimierungsproblems)

Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m hat, soll eine Markthalle mit rechteckigem Grundriss errichtet werden, vgl. nachfolgende Skizze.



Wie sind die Abmessungen a und b zu wählen, damit die Grundfläche der Markthalle maximal wird und wie groß ist die maximale Grundfläche?

Übungsaufgaben Teil 2: Stammfunktionen, Integralrechnung

Aufgabe 7 (Bestimmung von Stammfunktionen)

(a) Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche Bedingungen muss eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie eine Stammfunktion von f ist?

(b) Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen f jeweils eine Stammfunktion.

(b1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 5$

(b2) $f(x) = 2x\sqrt{x} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} \quad (x > 0)$

(b3) $f(x) = 6x^2 - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{2}{x} \quad (x \neq 0)$

(b4) $f(x) = 3\mathrm{e}^x - 2^x$

Aufgabe 8 (Stammfunktionen von Sinus und Kosinus)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$. Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F_1 von f, für die $F_1(0) = 0$ erfüllt ist, sowie diejenige Stammfunktion F_2 von f, für die $F_2(0) = 4$ gilt.

Aufgabe 9 (Bestimmung von Stammfunktionen mittels linearer Substitution)

Ermitteln Sie zu den folgenden Funktionen f jeweils eine Stammfunktion unter Verwendung der Substitutionsregel.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$

(b) $f(x) = \sin(4x - 3)$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}x - 1\right)^3$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

Aufgabe 10 (Wahr-Falsch-Aussagen zum bestimmten Integral)

Gegeben seien ein Intervall $[a, b]$ und eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen (i)–(iv) sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

(i) Das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ besitzt stets einen positiven Wert.

(ii) Das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ kann einen negativen Wert haben.

(iii) Das bestimmte Integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ entspricht stets dem Inhalt der Fläche, die durch den Graphen der Funktion f, die x-Achse sowie die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

(iv) Der Betrag des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ entspricht stets dem Inhalt der Fläche, die durch den Graphen der Funktion f, die x-Achse sowie die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

Aufgabe 11 (Berechnung von bestimmten Integralen, Zusammenhang zu Flächeninhalten)
Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. In welchen Teilaufgaben entspricht der berechnete Integralwert dem Inhalt der Fläche, die der Graph des Integranden im Integrationsintervall mit der x-Achse einschließt?

(a) $\int_0^2 (2 - x^2)\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 12 (Eine weitere Aufgabe zum bestimmten Integral)
Bestimmen Sie eine beliebige Funktion f, für die gilt:

$$\int_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -3.$$

Zeichnen Sie auch den Graphen dieser Funktion.
Zusatz: Finden Sie zwei weitere passende Funktionen. Mindestens eine von beiden sollte dabei einen Vorzeichenwechsel im Intervall $[-1, 5]$ aufweisen.