Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich
F. Friedrich

5. Übung am 30. September 2024 für die Gruppe „Lehramt Math Spezial“
Thema: Abbildungen

Das fünfte Übungsblatt beschäftigt sich mit Abbildungen (bzw. Funktionen – diese beiden Begriffe werden hier synonym verwendet) und einigen grundlegenden Eigenschaften wie Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Lesen Sie dazu gerne auch das Kapitel 4.3 aus dem Buch „Einführung in das mathematische Arbeiten“ von Hermann Schichl und Roland Steinbauer[1].

Aufgabe 1

Gegeben seien die Mengen $A := \{2,4,7,3\}$, $B := \{5,2,3,1\}$, $C := \{2,1,4\}$ und $D := \{6,1,3,2,7\}$. Stellen Sie die folgenden Abbildungen f, g, h, j mithilfe einer Skizze dar. Untersuchen Sie die Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität.

(a) $f : A \to B$
$2 \mapsto 2$
$4 \mapsto 1$
$7 \mapsto 5$
$3 \mapsto 5$

(b) $g : A \to C$
$2 \mapsto 4$
$4 \mapsto 2$
$7 \mapsto 2$
$3 \mapsto 1$

(c) $h : C \to B$
$2 \mapsto 1$
$1 \mapsto 5$
$4 \mapsto 3$

(d) $j : B \to A$
$5 \mapsto 7$
$2 \mapsto 3$
$3 \mapsto 2$
$1 \mapsto 4$

(e) Bestimmen Sie folgende Bilder und Urbilder. Dabei bezeichnen f, g, h, j die Abbildungen aus den Teilaufgaben (a)–(d).

(e1) $f(3)$, $g(7)$, $h(4)$, $j(3)$
(e2) $f^{-1}(1)$, $g^{-1}(2)$, $h^{-1}(2)$, $j^{-1}(7)$

(f) Bestimmen und begründen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen.

(f1) Es existiert eine injektive Abbildung $f : A \to D$.
(f2) Es existiert eine surjektive Abbildung $f : A \to D$.
(f3) Es existiert genau eine surjektive Abbildung $f : D \to A$.

[1] über die SLUB verfügbar unter `https://katalog.slub-dresden.de/id/0-1030104662`

(f4) Es existiert keine injektive Abbildung $f : D \to C$.
(f5) Es existiert eine injektive Abbildung $f : A \to D$, die surjektiv ist.
(f6) Es existiert eine bijektive Abbildung $f : D \to B$.
(f7) Jede Abbildung $f : B \to C$ ist surjektiv.
(f8) Jede Abbildung $f : C \to D$ ist injektiv.
(f9) Keine Abbildung $f : B \to C$ ist injektiv.
(f10) Jede injektive Abbildung $f : A \to B$ ist surjektiv.
(f11) Jede surjektive Abbildung $f : B \to A$ ist injektiv.

(g*) Formulieren Sie die Aussagen aus Teilaufgabe (f) in Quantoren-Schreibweise.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie, welche der folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind.

(a) $f_1 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto n + 1$

(b) $f_2 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto n^4$

(c) $f_3 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ z \mapsto |z|$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^4 + 2$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5 + 7$

(f) $f_6 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{für } z \geq 0 \\ |2z| - 1 & \text{für } z < 0 \end{cases}$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$.

(a) Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv und nicht injektiv ist.

(b) Beschränken Sie Definitions- und Zielbereich so, dass die Funktion bijektiv ist.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - 2|$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

(b) Bestimmen Sie die Bilder $f(\mathbb{R})$, $f([-1, 3])$, $f((2, 4])$ und $f([0, \infty))$.

(c) Bestimmen Sie die Urbilder $f^{-1}(\mathbb{R})$, $f^{-1}((0, 1))$, $f^{-1}([-1, 5))$ und $f^{-1}([1, 3])$.

(d) Welche der Eigenschaften injektiv, surjektiv, bijektiv besitzt f?

Aufgabe 5

Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv und/oder bijektiv?

(a) $f_1 : [0, \infty) \to [0, \infty),\ x \mapsto |x - 2|$

(b) $f_2 : (-\infty, 2] \to [0, \infty),\ x \mapsto |x - 2|$

(c) $f_3 : (-\infty, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - 2|$

Aufgabe 6

Lesen Sie die Definition 4.3.28 zur Verknüpfung zweier Abbildungen aus dem Buch von Schichl und Steinbauer. Bestimmen Sie anschließend in jeder der folgenden Teilaufgaben die Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$ für die angegebenen Funktionen.

(a) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sin(x)$ und $g(x) := x^2$

(b) $f, g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ mit $f(q) := \frac{q}{3}$ und $g(q) := q^2 - 1$

(c) $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f : n \mapsto 3^n$ und $g(n) := n^3$

Aufgabe 7

Seien A, B, C nichtleere Mengen sowie $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

(a) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

(b) Die Verknüpfung $f \circ g$ existiert.

(c) Ist f bijektiv, so besitzt jedes Element in B mindestens ein Urbild.

(d) Ist f bijektiv, so besitzt jedes Element in B maximal ein Urbild.

(e) Ist f bijektiv, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \to A,\ f(a) \mapsto a$ im Allgemeinen nicht bijektiv.

(f) Seien f und g bijektiv. Dann ist die Umkehrfunktion von $g \circ f$ gegeben durch $g^{-1} \circ f^{-1}$.

(g) Seien f und g bijektiv. Dann ist die Umkehrfunktion von $g \circ f$ gegeben durch $f^{-1} \circ g^{-1}$.