Prof. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

5. Übung am 30. September 2024 für die Gruppe „Math/Phys Spezial“

Dieses Übungsblatt wird sich mit etwas beschäftigen, was Sie alle während Ihres Studiums oft genug machen werden: **Fehler**. Wir werden auf diesem Übungsblatt „beweisen“, dass Geld nicht funktioniert, alle Katzen die gleiche Farbe haben und dass $1 = 0$ und $\pi = 4$ ist. In jeder Aufgabe wird ein Beweis für eine Aussage vollzogen und Ihre Aufgabe ist es, die Fehler in der Argumentation zu erkennen und zu benennen.

Aufgabe 1 (Jede beschränkte differenzierbare Funktion ist konstant.)
Aber das stimmt doch so nicht... was ist hier falsch gelaufen?

Beweis. Gegeben sei eine beschränkte differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wegen der Beschränktheit existieren $N, M \in \mathbb{R}$, sodass

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; N \leq f(x) \leq M.$$

Differenzieren gibt uns nun

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; 0 \leq f'(x) \leq 0,$$

woraus folgt, das $f' = 0$ sein muss und f selbst damit konstant ist. $\square$

Aufgabe 2 (Geld-Multiplikations-Glitch)
Was ist hier falsch gelaufen?

Beweis. Für einen Euro-Cent können wir die folgende Rechnung vollziehen:

$$1\,\mathrm{ct} = 0{,}01\,\mathrm{Euro} = 0{,}1\,\mathrm{Euro} \cdot 0{,}1\,\mathrm{Euro} = 10\,\mathrm{ct} \cdot 10\,\mathrm{ct} = 100\,\mathrm{ct} = 1\,\mathrm{Euro}.$$

$\square$

Wieso müssen wir das System der Währung nicht deswegen reformieren?

Aufgabe 3 (Ein Klassiker)
Wir beweisen nun, dass $2 = 1$ gilt. Wiedermal ist die Frage: was haben wir hier falsch gemacht?

Beweis. Wir starten mit der bekannten Aussage: für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Damit gilt auch

$$(a + a)(a - a) = a^2 - a^2$$

für alle $a \in \mathbb{R}$. Ausklammern liefert uns

$$(a + a)(a - a) = a(a - a).$$

Einfaches Kürzen auf beiden Seiten liefert uns nun

$$2a = a$$

und schließlich

$$2 = 1.$$

$\square$

Aufgabe 4 (Alle Katzen haben die gleiche Farbe.)
Wir werden nun im nachfolgenden Beweis mittels vollständiger Induktion zeigen, dass alle Katzen die gleiche Farbe haben. Wieder die Frage: was lief schief?

Beweis. Wir werden den Beweis führen, indem wir uns eine Gruppe von n Katzen ansehen und über die Größe der Gruppe eine Induktion führen.

IA: Bei nur einer Katze haben natürlich alle Katzen die gleiche Farbe.

IS: $n \to n+1$

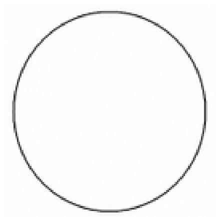
IV: In einer Gruppe von n Katzen haben alle die gleiche Farbe.

IB: In einer Gruppe von $n+1$ Katzen haben alle die gleiche Farbe.
Wir haben also nun $n+1$ Katzen gegeben, und schicken eine davon erstmal weg. Nun haben wir eine Gruppe von n Katzen, und die Induktionsvoraussetzung garantiert uns, dass nun alle die gleiche Farbe haben. Holen wir nun die weggeschickte Katze wieder in die Gruppe und senden dafür ein notwendig anderes Tier raus, so kriegen wir wieder eine Gruppe von n Katzen, die nun gemäß der Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Farbe haben müssen. Nun können wir aufgrund der *Transitivität* der Gleichheit sehen, dass alle $n+1$ Katzen die gleiche Farbe haben.

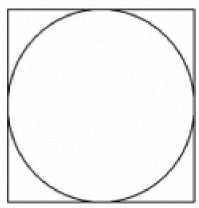
$\square$

Aufgabe 5 ($\pi = 4$)
Hier werden wir jetzt einen grafischen „Beweis“ betrachten, der verspricht, das π gleich 4 ist und der gefühlt aller paar Tage im Internet in grob dieser Form auftaucht. Wieder die Frage: wo ist das Problem?

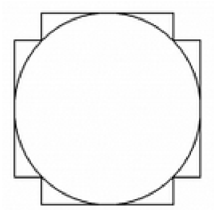
Take a circle of diameter 1. Its circumference is π since its radius is 1/2 and a circumference is 2π times radius.



Now put a square round it.

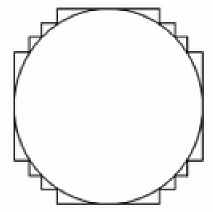


The length of the perimeter of the square is 4 since each side has length equal to the diameter of the circle. Now fold in the corners like so.



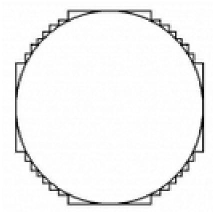
Since there was no stretching or shrinking, the length of this new curve is also 4.

Do the process again, i.e., fold in all the corners.



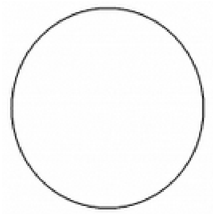
The length of this curve is still 4 since no stretching or shrinking was involved.

Do it again.



The length is again 4.

We can take the limit of this process. The limit is a circle.



Since the jagged curve gets closer and closer to the circle and always has length 4 we can see that the perimeter of the circle has length 4. But the perimeter length is also equal to π.

Therefore, π is 4.

Aufgabe 6 (0 = 1, mit Summen)
Wieder die Frage: wo ist in der folgenden Argumentation der Fehler?

Beweis.

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0+\cdots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 1+0+0+\cdots \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 7 (0 = 1, mit Integralen)
Wir versuchen es gleich noch einmal mit der Hilfe von Integralen und partieller Integration. Was haben wir diesmal falsch gemacht?

Beweis. $\int \frac{1}{x} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \frac{-1}{x^2} dx = 1 + \int \frac{1}{x} dx$ □

Aufgabe 8 (3 = 1, mit unendlichen Brüchen)
Was ist hier diesmal schief gelaufen?

Beweis. Wir wissen, dass $1 = \frac{3}{4-1}$ gilt. Das heißt weiterhin auch, dass $1 = \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4-1}}$ und damit auch

$$1 = \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4 - \dots}}}}$$

gilt. Andererseits gilt aber auch $3 = \frac{3}{4-3}$, und auch $3 = \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4-3}}$, und damit gilt genauso

$$3 = \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4 - \cfrac{3}{4 - \dots}}}}.$$

Damit gilt offensichtlich $1 = 3$. □

Aufgabe 9 ($-1 = 1$, mit Potenzgesetzen)
Wir haben doch bereits die Potenzgesetze bewiesen? Was ist denn hier schief gegangen?

Beweis. $-1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$ □

Aufgabe 10 (2 ist keine Primzahl)
Natürlich kann man auch mit reiner Logik Fehler machen. Wo liegt der Fehler in der folgenden Argumentation?

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass die folgende Aussage gilt: Jede Implikation oder ihre Umkehrung ist wahr. Das lässt sich mit Hilfe der Wahrheitswertetabelle von $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$ beweisen. Wir wenden das nun speziell auf die Aussagen

$$p := \text{„}n \text{ ist ungerade“} \quad \text{und} \quad q := \text{„}n \text{ ist eine Primzahl“}$$

an. Dann muss mindestens eine der Implikationen $p \Rightarrow q$ oder $q \Rightarrow p$ wahr sein. $p \Rightarrow q$ kann aber nicht wahr sein, da $15 = 3 \cdot 5$ ungerade, aber keine Primzahl ist. Also muss die Implikation $q \Rightarrow p$ wahr sein und damit durch Kontraposition auch $\neg p \Rightarrow \neg q$. Nun ist die Zahl 2 gerade und wie wir gerade gezeigt haben, ist sie damit keine Primzahl. □