Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

Brückenkurs Mathematik 2024

6. Übung am 1. Oktober 2024
Thema: Vektorrechnung, Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$

Schwerpunktaufgaben: 1, 5, 6, 8, 10, 11

Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie sind dazu in der Lage, das Skalarprodukt zweier Vektoren zu berechnen und anhand des Skalarprodukts zu entscheiden, ob die beiden Vektoren einen spitzen Winkel, einen stumpfen Winkel oder einen rechten Winkel einschließen.
- Sie sind dazu in der Lage, das Vektorprodukt zweier Vektoren zu berechnen und mit Hilfe des Vektorprodukts einen Vektor zu bestimmen, der orthogonal zu zwei vorgegebenen Vektoren ist, sowie den Flächeninhalt von Dreiecken zu berechnen.
- Sie wissen, dass Geraden im $\mathbb{R}^2$ (d.h. in der zweidimensionalen Ebene) sowohl durch eine Parameterdarstellung als auch durch eine parameterfreie Gleichung beschrieben werden können. Sie sind dazu in der Lage, Parameterdarstellungen sowie parameterfreie Gleichungen von Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit vorgegebenen Eigenschaften aufzustellen.
- Sie wissen, dass Geraden im $\mathbb{R}^3$ (d.h. im dreidimensionalen Raum) nicht mehr durch eine einzelne parameterfreie Gleichung, aber immer noch durch eine Parameterdarstellung beschrieben werden können. Sie sind dazu in der Lage, Parameterdarstellungen von Geraden im $\mathbb{R}^3$ mit vorgegebenen Eigenschaften aufzustellen.
- Sie wissen, dass Ebenen im $\mathbb{R}^3$ (d.h. im dreidimensionalen Raum) sowohl durch eine Parameterdarstellung als auch durch eine parameterfreie Gleichung beschrieben werden können. Sie sind dazu in der Lage, Parameterdarstellungen sowie parameterfreie Gleichungen von Ebenen mit vorgegebenen Eigenschaften aufzustellen.
- Sie können Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden und Ebenen untersuchen und Abstände zwischen zweier solcher geometrischer Objekte berechnen.

Passende Online-Zusatzangebote:
Im Online-Vorbereitungskurs Mathematik der TU Dresden[1] bietet sich das Kapitel zur Vektorgeometrie, insbesondere die in den Abschnitten „Grundlagen der Vektorgeometrie“, „Geraden“ und „Ebenen“ bereitgestellten Selbsttests und Lernvideos, zum Wiederholen, Vertiefen und weiteren Üben dieses Themas an.

Passende Literatur:

- Kapitel 14 zum Thema Vektorrechnung im Lehrbuch
  Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Abschnitt 7.7 zum Thema Vektorrechnung im Lehrbuch
  Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

[1] URL: `https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826`

Übungsaufgaben Teil 1: Vektorrechnung

Aufgabe 1 (Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$, Betrag eines Vektors, Skalarprodukt zweier Vektoren)
Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie die zugehörigen Ortsvektoren in einem Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a}$ und $-2\vec{a} + 3\vec{b}$, und zwar jeweils einmal zeichnerisch und einmal rechnerisch.

(c) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(d) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sowie den Winkel, den die beiden Vektoren einschließen.

Aufgabe 2 (Vektorrechnung im $\mathbb{R}^3$, Betrag eines Vektors, Skalarprodukt zweier Vektoren)
Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a}$ und $-2\vec{a} + 3\vec{b}$.

(b) Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(c) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Entscheiden Sie anhand des Ergebnisses (ohne weitere Rechnung), ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen spitzen, einen rechten oder einen stumpfen Winkel einschließen.

Aufgabe 3 (Eine weitere Aufgabe zur Vektorrechnung im $\mathbb{R}^2$)
Gegeben seien die Punkte $A = (-2, 0)$, $B = (4, 4)$ und $D = (2, 7)$ in der Ebene.

(a) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABD.

(b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABD bei B einen rechten Winkel besitzt.

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABD.

(d) Ermitteln Sie den Punkt C derart, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Aufgabe 4 (Vektorprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$)
Für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ (d.h. mit drei Komponenten) ist das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erklärt. Anders als beim Skalarprodukt ist das Ergebnis ein Vektor, keine Zahl.

(a) Welche geometrische Bedeutung haben das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ und dessen Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}|$?

(b) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (Berechnung des Flächeninhalts von Dreiecken im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Vektorprodukts)
Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten

(a) $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$ und $C = (2, 2, 3)$,

(b) $A = (-1, 1, 2)$, $B = (1, 2, 3)$ und $C = (-2, 1, 1)$.

Übungsaufgaben Teil 2: Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 6 (Parameterdarstellung und parameterfreie Gleichung von Geraden im $\mathbb{R}^2$)
Eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ (d.h. in der zweidimensionalen Ebene) kann durch eine Parameterdarstellung, aber auch durch eine parameterfreie Gleichung beschrieben werden.
Es sei g die Gerade, die durch die beiden Punkte $A = (0, 2)$ und $B = (1, 4)$ verläuft.

(a) Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung von g.

(b) Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung von g in der Form $y = mx + n$.

(c) Welche der folgenden Punkte liegen auf der Geraden g? Berechnen Sie für diejenigen Punkte, die nicht auf g liegen, den Abstand zu g.

$$P_1 = (0, 0) \qquad P_2 = (-1, 1) \qquad P_3 = (4, 10)$$

(d) Es sei h_1 die Gerade, die g im Punkt B im rechten Winkel schneidet. Ermitteln Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung von h_1.

(e) Es sei h_2 die Gerade, die parallel zu g und durch den Punkt $P = (2, 0)$ verläuft. Ermitteln Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung von h_2.

Aufgabe 7 (Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$)
Untersuchen Sie in den folgenden Teilaufgaben, ob die Geraden g und h sich schneiden und geben Sie ggf. den Schnittpunkt an.

(a) g verläuft durch die beiden Punkte $P_1 = (4, -3)$ und $P_2 = (2, -6)$; h ist die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 2$

(b) g lässt sich durch die Parameterdarstellung $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, beschreiben; h verläuft durch die beiden Punkte $A = (1, -7)$ und $B = (5, 3)$

Übungsaufgaben Teil 3: Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 8 (Parameterdarstellung von Geraden im $\mathbb{R}^3$)
Im $\mathbb{R}^3$ (d.h. im dreidimensionalen Raum) lässt sich eine Gerade immer noch durch eine Parameterdarstellung beschreiben, aber nicht mehr durch eine einzelne parameterfreie Gleichung.
Es sei g die Gerade, die durch die beiden Punkte $A = (1, -2, 0)$ und $B = (2, -1, 1)$ verläuft.

(a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von g.

(b) Untersuchen Sie für jeden der beiden Punkte $P_1 = (3, 4, -5)$ und $P_2 = (4, 1, 3)$, ob er auf der Geraden g liegt.

Aufgabe 9 (Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$)
Untersuchen Sie in den folgenden Teilaufgaben, ob die Geraden g und h sich schneiden, parallel zueinander sind oder windschief zueinander sind. Geben Sie im Fall, dass sie sich schneiden, den Schnittpunkt an.

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 10 (Lagebeziehung Punkt – Ebene bzw. Gerade – Ebene)
Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ (d.h. im dreidimensionalen Raum) kann durch eine parameterfreie Gleichung der Form $ax + by + cz = d$ beschrieben werden.

(a) Welche Bedeutung hat der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ für die Ebene?

(b) Es sei $\mathcal{E}$ die Ebene mit der Gleichung $x + 2y - 3z = 1$.

(b1) Welche der folgenden Punkte liegen auf der Ebene $\mathcal{E}$? Berechnen Sie für diejenigen Punkte, die nicht auf $\mathcal{E}$ liegen, den Abstand zu $\mathcal{E}$.

$$P_1 = (0, 0, 0) \qquad P_2 = (0, 2, 1) \qquad P_3 = (2, 2, 1)$$

(b2) Es sei g die Gerade mit der Parameterdarstellung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Ebene $\mathcal{E}$.

(b3) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die die Ebene $\mathcal{E}$ im Punkt $P = (4, 3, 3)$ im rechten Winkel schneidet.

Aufgabe 11 (Parameterdarstellung und parameterfreie Gleichung von Ebenen im $\mathbb{R}^3$)
Es sei $\mathcal{E}$ die Ebene, welche die drei Punkte $A = (2, 0, 1)$, $B = (3, 2, 0)$ und $C = (1, -2, 4)$ enthält.

(a) Bestimmen Sie sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine parameterfreie Gleichung der Ebene $\mathcal{E}$.

(b) Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung derjenigen Ebene, die parallel zu $\mathcal{E}$ und durch den Punkt $P = (2, 1, 2)$ verläuft.