Prof. F. Schuricht
Dr. M. Herrich

6. Übung am 1. Oktober 2024 für die Gruppe „Math/Phys Spezial“

Dieses Übungsblatt gibt eine Einführung in grundlegende Begriffe der abstrakten Algebra, die auch zu Beginn Ihres Studiums noch einmal eingeführt und Ihnen dann im Laufe des Studiums immer mal wieder begegnen werden. Wenn Sie möchten, schlagen Sie gerne vorab bereits einmal die Begriffe **Monoid**, **Gruppe**, **Gruppenhomomorphismus**, **Ring** und **Körper** nach.[1] Unbedingt erforderlich ist dies andererseits aber nicht, denn wir werden diese Begriffe auch gemeinsam in der Übung erarbeiten.

Aufgabe 1 (Erarbeitung des Begriffs „Monoid“)
Schreiben Sie die Definition des Begriffs *Monoid* sauber auf und geben Sie 5 Beispiele für Monoide vollständig an.

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit des neutralen Elements in Monoiden)
Zeigen Sie, dass das neutrale Element in jedem Monoid eindeutig sein muss.
Das heißt genauer: Seien $(M, *, e)$ ein Monoid und $\tilde{e}$ ein neutrales Element von $(M, *, e)$. Zeigen Sie, dass dann $\tilde{e} = e$ gilt.

Aufgabe 3 (Erarbeitung des Begriffs „Gruppe“)

(a) Schreiben Sie die Definition des Begriffs *Gruppe* sauber auf und geben Sie 5 Beispiele für Gruppen an.

(b) Begründen Sie, dass jede Gruppe auch ein Monoid ist.

(c) Umgekehrt ist nicht jedes Monoid auch eine Gruppe. Machen Sie sich das klar, indem Sie ein Beispiel für ein Monoid angeben, welches keine Gruppe ist.

(d) Welche Eigenschaft muss eine Gruppe haben, um als *kommutative Gruppe* bezeichnet zu werden? Überlegen Sie für Ihre Beispiele aus Teilaufgabe (a), bei welchen davon es sich um kommutative Gruppen handelt.

Aufgabe 4 (Eindeutigkeit der Inversen in einer Gruppe)
Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe.

(a) Es sei g ein beliebiges Element aus G. Gemäß der Definition einer Gruppe existiert dann ein $g^{-1} \in G$, für das $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$ gilt. Zeigen Sie, dass g^{-1} das einzige Element aus G mit dieser Eigenschaft ist. (Daraus lässt sich also schlussfolgern, dass zu jedem Element einer Gruppe genau ein zugehöriges Inverses existiert.)

(b) Zeigen Sie, dass für alle $g, h \in G$ gilt: $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$.

Aufgabe 5 (Gruppen mit ausschließlich selbst-inversen Elementen)

(a) Sei $(G, *, e)$ eine Gruppe, in der jedes Element zu sich selbst invers ist, das heißt, in der für jedes Element $g \in G$ gilt: $g^2 := g * g = e$. Zeigen Sie, dass G eine kommutative Gruppe ist.

[1] beispielsweise einfach unter `https://www.wikipedia.de`

(b) Fällt Ihnen ein Beispiel für eine Gruppe mit mindestens zwei Elementen ein, in der jedes Element zu sich selbst invers ist?

Aufgabe 6 (Gruppenhomomorphismen)

(a) Definieren Sie den Begriff *Gruppenhomomorphismus* und geben Sie 2 Beispiele für Gruppenhomomorphismen an.

(b) Seien $(G, *, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie:

(b1) Es gilt $\varphi(e_G) = e_H$.

(b2) Für jedes $g \in G$ gilt $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$.

(b3) Der Gruppenhomomorphismus φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi) = \{e_G\}$ gilt. Dabei bezeichnet $\ker(\varphi)$ den *Kern* von φ, der definiert ist durch $\ker(\varphi) := \{g \in G \mid \varphi(g) = e_H\}$.

Aufgabe 7 (Erarbeitung der Begriffe „Ring“ und „Ringhomomorphismus“)

Schreiben Sie die Definition des Begriffs *Ring* sauber auf und geben Sie 5 Beispiele für Ringe an. Machen Sie sich weiterhin den Begriff *Ringhomomorphismus* klar und geben Sie 2 Beispiele dafür an.

Aufgabe 8 (Grundlegende Eigenschaften von Ringen)

Sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein Ring. Beweisen Sie:

(a) Für alle $r \in R$ gilt $0 \cdot r = r \cdot 0 = 0$.

(b) Für alle $r, s \in R$ gilt $(-r) \cdot s = -(r \cdot s)$.

Aufgabe 9 (Addition in Ringen muss immer kommutativ sein)

Manche Literatur verlangt in der Definition des Begriffs „Ring“ explizit, dass die Addition eine kommutative Operation ist. Zeigen Sie, dass diese explizite Forderung allerdings gar nicht unbedingt notwendig ist, sondern die Kommutativität der Addition bereits aus den übrigen Eigenschaften aus der Definition des Begriffs „Ring“ folgt.

Aufgabe 10 (Die ganzen Zahlen bilden einen besonderen Ring.)

Sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein beliebiger Ring. Zeigen Sie, dass es genau einen Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ gibt.

Aufgabe 11 (Festigung der Begriffe „Ring“ und „Monoid“)

Sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein Ring. Des Weiteren sei $\circ : R \times R \to R$ die wie folgt definierte Operation:

$$a \circ b := a + b - (a \cdot b).$$

Zeigen Sie, dass $(R, \circ)$ ein Monoid ist.

Aufgabe 12 (Erarbeitung des Begriffs „Körper“)

Welche Eigenschaft muss ein Ring haben, um als *Körper* bezeichnet zu werden? Überlegen Sie für Ihre Beispiele aus Aufgabe 7, bei welchen davon es sich sogar um Körper handelt.