

## 7. Übung am 2. Oktober 2024

### Thema: Gleichungen und Ungleichungen mit zwei Variablen, Kombinatorik, Vollständige Induktion

Schwerpunktaufgaben: 1, 2, 3, 4, 6, 8

#### Wesentliche Ziele dieser Übung:

- Sie wissen, dass durch eine Gleichung mit 2 Variablen im Allgemeinen eine Kurve in der  $xy$ -Ebene beschrieben wird. Sie sind dazu in der Lage, für vorgegebene Gleichungen von Geraden, Parabeln, Kreisen und Ellipsen die entsprechende Kurve im Koordinatensystem zu skizzieren und wesentliche Merkmale zu bestimmen (bei Geraden: Achsenschnittpunkte, bei Parabeln: Scheitelpunkt und Öffnungsrichtung, bei Kreisen: Mittelpunkt und Radius, bei Ellipsen: Symmetriepunkt und Halbachsenlängen).
- Sie wissen, dass durch eine Ungleichung mit 2 Variablen im Allgemeinen ein Bereich in der  $xy$ -Ebene beschrieben wird. Sie sind dazu in der Lage, für gewisse Ungleichungen mit 2 Variablen die Bereiche und ihre Begrenzungskurven im Koordinatensystem zu skizzieren.
- Sie können Fakultäten und Binomialkoeffizienten berechnen.
- Sie sind dazu in der Lage, Grundaufgaben der Kombinatorik zu bearbeiten.
- Sie können einfache Beweise mittels vollständiger Induktion führen.

#### Passende Online-Zusatzangebote:

Im Online-Vorbereitungskurs Mathematik der TU Dresden<sup>1</sup> bieten sich die Kapitel zu Gleichungen zweier Variablen sowie zur Kombinatorik einschließlich der bereitgestellten Selbsttests zum Wiederholen, Vertiefen und weiteren Üben dieser Themen an.

#### Passende Literatur:

- Kapitel 9 zum Thema Gleichungen mit 2 Variablen im Lehrbuch  
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 1. Binomi, Barsinghausen, 2010.
- Kapitel 6 zum Thema Kombinatorik im Lehrbuch  
Merziger, G. u.a.: Repetitorium Elementare Mathematik 2. Binomi, Barsinghausen, 2012.
- Abschnitt 4.3 zum Thema Kombinatorik im Lehrbuch  
Cramer, E., Nešlehová, J.: Vorkurs Mathematik. 7. Auflage, Springer, Berlin, 2018.
- Abschnitte 2.10.3, 7.2.1, 7.3.1, 7.5.1 sowie 7.5.3 zum Thema Gleichungen und Ungleichungen mit 2 Variablen, Abschnitte 10.1 bis 10.6 zum Thema Kombinatorik, Abschnitt 1.13.4 zur vollständigen Induktion im Lehrbuch  
Kemnitz, A.: Mathematik zum Studienbeginn. 12. Auflage, Springer, Wiesbaden, 2019.

---

<sup>1</sup>URL: <https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/11530829826>

## Übungsaufgaben Teil 1: Gleichungen und Ungleichungen mit zwei Variablen

### Aufgabe 1 ((Parameterfreie) Gleichungen für Geraden im $\mathbb{R}^2$ )

- (a) Jede der folgenden Gleichungen beschreibt eine Gerade. Zeichnen Sie diese in einem Koordinatensystem.

$$(a1) \quad y = 2x - 1 \qquad (a2) \quad 3x + 2y = 1 \qquad (a3) \quad x + 2 = 0 \qquad (a4) \quad 2y - 1 = 0$$

- (b) Jede Gerade, die nicht parallel zur  $y$ -Achse verläuft, lässt sich in der Form  $y = mx + n$  beschreiben. Welche Bedeutung haben dabei  $m$  und  $n$ ?
- (c) Jede Gerade, die weder parallel zur  $x$ -Achse noch parallel zur  $y$ -Achse verläuft, lässt sich in der Form  $ax + by = 1$  darstellen, mit  $a, b \neq 0$ . Welche Bedeutung haben dabei  $a$  und  $b$ ?

### Aufgabe 2 (Gleichungen für achsenparallele Parabeln)

- (a) Jede der folgenden Gleichungen beschreibt eine nach oben oder eine nach unten geöffnete Parabel. Zeichnen Sie diese in einem Koordinatensystem.

$$(a1) \quad y = x^2 + 1 \qquad (a2) \quad \frac{1}{2}x^2 + y = 2$$
$$(a3) \quad y = (x - 2)^2 - 1 \qquad (a4) \quad y = x^2 + 2x - 2$$

*Hinweis:* Überführen Sie die Gleichung in Teilaufgabe (a4) durch eine quadratische Ergänzung zunächst in die Form  $y = (x - x_0)^2 + y_0$ .

- (b) Jede der folgenden Gleichungen beschreibt eine nach links oder eine nach rechts geöffnete Parabel. Zeichnen Sie diese in einem Koordinatensystem.

$$(b1) \quad x = y^2 - 2 \qquad (b2) \quad x + y^2 = 1$$
$$(b3) \quad x = 2(y + 1)^2 + 1 \qquad (b4) \quad x = y^2 - y + \frac{3}{4}$$

*Hinweis:* Überführen Sie die Gleichung in Teilaufgabe (b4) durch eine quadratische Ergänzung zunächst in die Form  $x = (y - y_0)^2 + x_0$ .

### Aufgabe 3 (Gleichungen für Kreise)

Jede der folgenden Gleichungen beschreibt einen Kreis (genauer: die Peripherie eines Kreises). Ermitteln Sie jeweils den Mittelpunkt und den Radius des Kreises und zeichnen Sie den Kreis in einem Koordinatensystem.

$$(a) \quad x^2 + y^2 = 4 \qquad (b) \quad (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$$
$$(c) \quad x^2 - 2x + y^2 + 4y - 11 = 0 \qquad (d) \quad x^2 + x + y^2 - 3y = \frac{15}{4}$$

*Hinweis:* Überführen Sie die Gleichungen in den Teilaufgaben (c) und (d) jeweils durch eine quadratische Ergänzung zunächst in die Form  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .

### Aufgabe 4 (Gleichungen für achsenparallele Ellipsen)

Jede der folgenden Gleichungen beschreibt eine Ellipse (genauer: die Peripherie einer Ellipse). Zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem.

$$(a) \quad \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1 \qquad (b) \quad (x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 1 \qquad (c) \quad x^2 + 4(y - 1)^2 = 9$$

### Aufgabe 5 (Ungleichungen mit zwei Variablen)

Durch eine Ungleichung mit zwei Variablen  $x, y$  wird (von Sonderfällen abgesehen) ein Bereich in der  $xy$ -Ebene beschrieben. Zeichnen Sie die durch die folgenden Ungleichungen beschriebenen Bereiche in einem Koordinatensystem. Überlegen Sie sich dabei zunächst, wie die Begrenzungskurve des Bereichs aussieht (diese erhält man, indem man das Relationszeichen durch „ $=$ “ ersetzt).

- (a)  $y \leq x + 1$                       (b)  $y \leq 4 - x^2$                       (c)  $2x + y > 3$   
(d)  $y < (x + 1)^2 - 2$                       (e)  $x^2 + y^2 \leq 1$                       (f)  $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 \geq 4$   
(g)  $x + y^2 < 0$                       (h)  $2y^2 - x + 2 \leq 0$

## Übungsaufgaben Teil 2: Kombinatorik

### Aufgabe 6 (Fakultät und Binomialkoeffizient)

Diese Aufgabe soll dazu dienen, dass Sie vertrauter mit der Rechenoperation Fakultät und dem Binomialkoeffizienten werden. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke.

- (a)  $2!$                       (b)  $4!$                       (c)  $5!$                       (d)  $\binom{3}{2}$                       (e)  $\binom{5}{2}$                       (f)  $\binom{7}{4}$   
(g)  $\binom{n}{0}$                       (h)  $\binom{n}{1}$

In den Teilaufgaben (g) und (h) sei  $n$  jeweils eine beliebige positive natürliche Zahl.

### Aufgabe 7 (Anzahl aller Teilmengen einer endlichen Menge)

- (a) Gegeben sei die 5-elementige Menge  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wie viele Teilmengen von  $A$  mit genau 2 Elementen gibt es? Schreiben Sie diese Teilmengen auf.  
(b) Nun allgemeiner: Gegeben sei eine Menge  $A$  mit  $n$  Elementen. Wie viele Teilmengen von  $A$  mit genau  $k$  Elementen ( $0 \leq k \leq n$ ) gibt es?

### Aufgabe 8 (Aufgaben zur Kombinatorik)

Ermitteln Sie in den folgenden Teilaufgaben jeweils die gesuchte Anzahl.<sup>2</sup>

- (a) Fünf Personen werden namentlich in eine Liste eingetragen. Auf wie viele verschiedene Arten der Reihenfolge ist das möglich?  
(b) Bei der Herstellung eines Maschinenteils sind sieben Arbeitsgänge notwendig. Nach dem ersten Arbeitsgang folgen vier Arbeitsgänge, die in beliebiger Reihenfolge durchgeführt werden können. Eine weitere Bearbeitung ist aber erst nach Abschluss der ersten fünf Arbeitsgänge möglich. Die Reihenfolge der zwei restlichen Arbeitsgänge ist wiederum beliebig. Wie viele Bearbeitungsreihenfolgen sind bei der Herstellung des Maschinenteils möglich?

---

<sup>2</sup>Die Teilaufgaben (a)–(e) sind entnommen aus der Aufgabensammlung Wenzel, H., Heinrich, G.: Übungsaufgaben zur Analysis. Teubner, Wiesbaden 2005.

- (c) Ein Kind baut durch Übereinanderlegen von 2 roten, 3 schwarzen und 4 weißen Baukasten-steinen gleicher Form Türme.
- (c1) Wie viele verschiedene Türme sind möglich?
- (c2) Wie groß ist die Anzahl der Türme, die mit einem weißen Stein beginnen?
- (d) Wie viele Ziehungen sind bei „6 aus 49“ möglich, für die ein abgegebener Tipp genau drei Richtige ergibt?
- (e) Eine Lieferung von 25 Geräten, die durch ihre Fabrikationsnummern unterscheidbar sind, ent-hält 4 fehlerhafte Geräte.
- (e1) Wie viele verschiedene Stichproben vom Umfang 5 sind möglich?
- (e2) Wie viele Stichproben vom Umfang 5 mit genau 2 fehlerhaften Geräten gibt es?
- (e3) Wie viele Stichproben vom Umfang 5 gibt es, die höchstens ein fehlerhaftes Gerät ent-halten?
- (f) Angenommen, ein Passwort muss aus genau 5 Zeichen bestehen, wobei als Zeichen die Ziffern 0–9, die Großbuchstaben A–Z und die Kleinbuchstaben a–z möglich sind. Bestimmen Sie die Anzahl derartiger Passwörter. Wie viele dieser Passwörter
- (f1) bestehen ausschließlich aus Ziffern,
- (f2) bestehen aus lauter unterschiedlichen Zeichen,
- (f3) enthalten mindestens eine Ziffer,
- (f4) enthalten mindestens eine Ziffer, mindestens einen Großbuchstaben und mindestens einen Kleinbuchstaben?

### Übungsaufgaben Teil 3: Vollständige Induktion

#### **Aufgabe 9** (Beweis mittels vollständiger Induktion)

Weisen Sie durch vollständige Induktion nach, dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

#### **Aufgabe 10** (Ein weiterer Beweis mittels vollständiger Induktion)

Es sei  $x \neq 1$  eine vorgegebene reelle Zahl. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$