Prof. Dr. F. Schuricht
Dr. M. Herrich
F. Friedrich

7. Übung am 2. Oktober 2024 für die Gruppe „Lehramt Math Spezial“
Thema: Relationen, Vertiefung ausgewählter Konzepte aus den vorherigen Übungen

Das letzte Übungsblatt beschäftigt sich zunächst mit Relationen und insbesondere mit sogenannten Äquivalenzrelationen. Außerdem werden ausgewählte Konzepte aus den vorherigen Übungen vertieft, sodass dieses letzte Übungsblatt auch zur Übung bzw. Reflexion der erlernten Beweistechniken und grundlegender Begriffe wie Abbildung, Teilbarkeit und Gruppen dient. Für die Definitionen benutzen wir wieder das Buch von Hermann Schichl und Roland Steinbauer.[1]

Aufgabe 1

Lesen Sie die Definitionen 4.2.2, 4.2.5 und 4.2.8. Überprüfen Sie dann, bei welchen der folgenden Relationen es sich um Äquivalenzrelationen auf der Menge M handelt.

(a) $M :=$ Menge aller Studierenden der TU Dresden,
$a \sim b :\Leftrightarrow a$ wohnt im selben Gebäude wie b.

(b) $M :=$ Menge aller Personen in einem Kinosaal,
$a \sim b :\Leftrightarrow a$ sitzt in einer weiter hinten gelegenen Reihe als b.

(c) $M :=$ Menge aller Schülerinnen und Schüler der Klasse 12 eines Gymnasiums,
$a \sim b :\Leftrightarrow a$ und b haben mindestens ein gemeinsames Leistungskursfach.

(d) $M :=$ Menge aller Städte in Deutschland,
$a \sim b :\Leftrightarrow a$ hat eine Luftlinienentfernung von maximal 100 km zu b

(e) $M :=$ Menge aller Busse der DVB,
$a \sim b :\Leftrightarrow a$ bedient die gleiche Linie wie b.

Aufgabe 2

Seien M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Für jedes $a \in M$ definieren wir die zugehörige *Äquivalenzklasse* durch:

$$[a]_\sim := \{b \in M \,|\, a \sim b\}.$$

(a) Zeigen Sie: sind a und b zwei Elemente von M mit der Eigenschaft $a \sim b$, dann stimmen die zu a und b gehörigen Äquivalenzklassen $[a]_\sim$ und $[b]_\sim$ überein.

(b) In jeder der folgenden Teilaufgaben (b1)–(b6) sind eine Menge M sowie eine Relation $\sim$ auf M gegeben. Geben Sie zunächst jeweils ein paar Beispiele für Paare aus Elementen a und b der Menge M an, für die $a \sim b$ gilt. Untersuchen Sie anschließend jeweils, ob die angegebene Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der definierten Menge M bildet, und geben Sie ggf. die Äquivalenzklassen an.

(b1) $M := \mathbb{Z}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a + b$ gerade

(b2) $M := \mathbb{Z}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a + b$ ungerade

(b3) $M := \mathbb{N}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a$ teilt b

[1] über die SLUB verfügbar unter `https://katalog.slub-dresden.de/id/0-1030104662`

(b4) $M := \mathbb{Z}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a + b = 10$

(b5) $M := \mathbb{Z}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a$ und b haben den gleichen Rest bei Division durch n, wobei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

(b6) $M :=$ Menge, die alle endlichen Mengen enthält, $\quad A \sim B :\Leftrightarrow A \subseteq B$

Aufgabe 3

Lesen Sie die Definition 4.2.24 (i). Untersuchen Sie in jeder der folgenden Teilaufgaben, ob die angegebene Relation $\sim$ eine Ordnungsrelation auf der definierten Menge M bildet.

(a) $M := \mathbb{R}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a \leq b$

(b) $M := \mathbb{Z}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a + b$ gerade

(c) $M := \mathbb{N}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a$ teilt b

(d) $M := \mathbb{Z}, \quad a \sim b :\Leftrightarrow a$ teilt b

(e) $M :=$ Menge, die alle endlichen Mengen enthält, $\quad A \sim B :\Leftrightarrow A \subseteq B$

Aufgabe 4

Sei M eine nichtleere Menge. Wir betrachten eine Menge $\mathcal{P}$ von Teilmengen von M. Wir nennen $\mathcal{P}$ eine *Partition* von M, wenn sie die folgenden Eigenschaften (i)–(iii) hat:

(i) Jede Teilmenge aus $\mathcal{P}$ ist nichtleer.

(ii) Je zwei Teilmengen aus $\mathcal{P}$ sind disjunkt.

(iii) Die Vereinigung aller Teilmengen aus $\mathcal{P}$ ergibt die Menge M.

Nun zur Aufgabe:

(a) Geben Sie für jede der folgenden Mengen M drei unterschiedliche Partitionen an.

(a1) $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (a2) $M := \mathbb{N}$ (a3) $M := [0, 1]$

(b) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge M. Zeigen Sie, dass die Menge aller unterschiedlichen Äquivalenzklassen von Elementen aus M eine Partition der Menge M ist.

Aufgabe 5

Seien X eine nichtleere Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Wir nennen d eine *Metrik* auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen (i)–(iii) erfüllt sind:

(i) $d(x, y) \geq 0 \quad$ und $\quad d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \quad$ (positive Definitheit),

(ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad$ (Symmetrie),

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad$ (Dreiecksungleichung).

Zeigen Sie in jeder der folgenden Teilaufgaben, dass die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf der gegebenen Menge X ist.

(a) $X := \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$

(b) $X := \mathbb{R}, \quad d(x, y) := |x - y|$

Hinweise zum Nachweis der Dreiecksungleichung:

- Sie dürfen verwenden, dass $|a + b| \leq |a| + |b|$ für alle reellen Zahlen a, b gilt.
- Addieren Sie $-z + z$.

Aufgabe 6

Seien P die Menge aller Punkte der Ebene, $\varphi : P \to P$ eine Abbildung und d eine Metrik auf P. Wir nennen die Abbildung φ *abstandstreu*, wenn gilt:

$$\forall A, B \in P: \ d(A, B) = d(\varphi(A), \varphi(B)).$$

Falls φ abstandstreu und surjektiv ist, so nennen wir φ eine *Bewegung* auf P. Zeigen Sie:

(a) Ist φ eine Bewegung auf P, dann ist φ bijektiv.

(b) Die Hintereinanderausführung $\varphi \circ \psi$ zweier Bewegungen φ, ψ auf P ist wieder eine Bewegung auf P.

(c) Seien $B(P)$ die Menge aller Bewegungen auf P und $\circ$ die Hintereinanderausführung zweier Bewegungen. Zeigen Sie, dass $(B(P), \circ)$ eine Gruppe ist, deren neutrales Element diejenige Abbildung ist, die jeden Punkt aus P auf sich selbst abbildet.

Aufgabe 7

Seien P die Menge aller Punkte der Ebene und $B(P)$ die Menge aller Bewegungen auf P bzgl. einer auf P definierten Metrik. Wir definieren die *Kongruenzrelation* $\sim$ durch:

$$\forall M, N \subseteq P: \ M \sim N \ :\Leftrightarrow \ \exists \varphi \in B(P) : \varphi(M) = N.$$

In Worten lässt sich diese Kongruenzrelation wie folgt formulieren: zwei ebene Punktmengen M und N (zum Beispiel zwei Dreiecke oder zwei Vierecke oder zwei Kreise) werden genau dann als *kongruent* bezeichnet, wenn eine Bewegung φ existiert, deren Bild von M gerade gleich der Menge N ist, durch welche die Menge M also in die Menge N überführt wird.

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.