Prof. F. Schuricht
Dr. M. Herrich



**7. Übung am 2. Oktober 2024 für die Gruppe „Math/Phys Spezial“**

Im ersten Teil dieser abschließenden Übung führen wir den Zahlenbereich der komplexen Zahlen ein und beschäftigen uns mit grundlegenden Eigenschaften und Rechenregeln. In Ihrem Studium wird dieser Zahlenbereich ebenfalls noch einmal eingeführt und Ihnen werden komplexe Zahlen immer mal wieder begegnen. Wenn Sie möchten, schlagen Sie die auf diesem Übungsblatt erläuterten Begriffe im Zusammenhang mit komplexen Zahlen (etwa Realteil, Imaginärteil, Betrag und Argument einer komplexen Zahl) gerne auch einmal in anderer Literatur nach.[1] Natürlich werden wir auch in der Übung ausführlich über diese Begriffe sprechen.

Der zweite Teil dieser Übung ist einigen Aussagen zur Teilbarkeit und zu Primzahlen gewidmet.

## Komplexe Zahlen

Mit $\mathbb{C}$ wird der Zahlenbereich der *komplexen Zahlen* bezeichnet. Jede komplexe Zahl, das heißt jedes Element $z \in \mathbb{C}$, lässt sich als geordnetes Paar $z = (a, b)$ zweier reeller Zahlen auffassen. Im Zahlenbereich $\mathbb{C}$ sind die folgenden Rechenoperationen erklärt:

- Addition zweier komplexer Zahlen $z = (a, b)$ und $w = (x, y)$:

$$z + w := (a, b) + (c, d) := (a + x, b + y)$$

- Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = (a, b)$ und $w = (x, y)$:

$$z \cdot w := (a, b) \cdot (x, y) := (ax - by, ay + bx)$$

Die erste Koordinate einer komplexen Zahl $z$ wird als *Realteil* von $z$ bezeichnet (symbolische Schreibweise: $\mathrm{Re}(z)$), die zweite Koordinate wird *Imaginärteil* von $z$ genannt (symbolische Schreibweise: $\mathrm{Im}(z)$). Für $z = (a, b)$ ist also $\mathrm{Re}(z) = a$ und $\mathrm{Im}(z) = b$.

Der Zahlenbereich der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lässt sich als Erweiterung des Zahlenbereichs der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen, indem die komplexen Zahlen mit Imaginärteil 0, also die komplexen Zahlen der Form $(a, 0)$ mit $a \in \mathbb{R}$, als reelle Zahlen identifiziert werden. Es lässt sich leicht bestätigen, dass dies auch konform mit den oben eingeführten Operationen ist, die dann in der Tat gerade den bekannten Rechenoperationen aus $\mathbb{R}$ entsprechen (machen Sie sich das gerne einmal klar). Für komplexe Zahlen der Gestalt $(a, 0)$ schreibt man aus diesem Grund oft auch einfach nur $a$.

**Aufgabe 1** (Die imaginäre Einheit)

Die komplexe Zahl $\mathrm{i} := (0, 1)$ wird als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

(a) Verifizieren Sie, dass für jede komplexe Zahl $z := (a, b)$ gilt:

$$z = (a, 0) + (b, 0) \cdot \mathrm{i}.$$

*Bemerkung:* Gemäß unseren obigen Erläuterungen hinsichtlich des Auffassens reeller Zahlen als spezielle komplexe Zahlen sowie durch das übliche Weglassen des Multiplikationspunktes können wir in Kurzform somit auch einfach schreiben:

$$z = a + b\mathrm{i}.$$

In der Tat wird diese Notation meist der Notation als geordnetes Paar vorgezogen.

[1] beispielsweise einfach unter `https://www.wikipedia.de`

(b) Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{i}^2 := \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (-1, 0)$ (bzw. in Kurzform $\mathrm{i}^2 = -1$).

*Bemerkung:* Das zeigt, dass die Gleichung $z^2 + 1 = 0$, die bekanntermaßen keine Lösung im Zahlenbereich $\mathbb{R}$ besitzt, durchaus Lösungen im Zahlenbereich $\mathbb{C}$ hat.

Übrigens: Neben der komplexen Zahl $z = \mathrm{i}$ hat diese Gleichung eine weitere Lösung. Welche nämlich?

(c) Es seien $z := (a, b) = a + b\mathrm{i}$ und $w := (x, y) = x + y\mathrm{i}$ zwei beliebige komplexe Zahlen. Weiter oben wurde erklärt, wie das Produkt $z \cdot w$ gebildet wird. Zeigen Sie, dass sich dasselbe Ergebnis für das Produkt auch ergibt, indem $(a + b\mathrm{i}) \cdot (x + \mathrm{i}y)$ durch Ausmultiplizieren und unter Verwendung von $\mathrm{i}^2 = -1$ berechnet wird.

**Aufgabe 2** (Algebraische Eigenschaften von $\mathbb{C}$ mit den Operationen $+$ und $\cdot$)

Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen zusammen mit der eingangs definierten Addition und der eingangs definierten Multiplikation einen kommutativen Ring bildet, in dem jedes Element außer der komplexen Zahl $(0, 0) = 0 + 0\mathrm{i}$ ein Inverses bzgl. der Multiplikation besitzt. Geben Sie dabei insbesondere auch das neutrale Element bzgl. der Addition und das neutrale Element bzgl. der Multiplikation an.

**Aufgabe 3** (Komplexe Konjugation)

Es sei $z := a + b\mathrm{i}$ eine beliebige komplexe Zahl. Dann ist die zugehörige *konjugiert komplexe Zahl* definiert durch $\overline{z} := \overline{a + b\mathrm{i}} := a - b\mathrm{i}$.

Zeigen Sie:

(a) $\overline{\overline{z}} = z$ (b) $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ (c) $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$ (d) $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$

(e) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ (f) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}$

**Aufgabe 4** (Praktische Berechnung von Quotienten komplexer Zahlen)

Berechnen Sie von jeder der folgenden komplexen Zahlen den Real- und den Imaginärteil. Erweitern Sie den Quotienten dazu jeweils mit der zum Nenner gehörigen konjugiert komplexen Zahl.

(a) $\dfrac{1}{1 + \mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{2\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{-2 + 3\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$

**Aufgabe 5** (Veranschaulichung komplexer Zahlen)

Jede komplexe Zahl $z := a + b\mathrm{i}$ lässt sich als Punkt $(a, b)$ eines Koordinatensystems darstellen, auf dessen waagerechter Achse der Realteil und auf dessen senkrechter Achse der Imaginärteil abgetragen wird. Das derart festgelegte Koordinatensystem wird auch als *Gaußsche Zahlenebene* bezeichnet.

Veranschaulichen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$1, \quad 3\mathrm{i}, \quad 1 + \mathrm{i}, \quad -2 + 4\mathrm{i}, \quad \frac{1 + \mathrm{i}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{1 + \mathrm{i}}, \quad \frac{3 + 9\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}.$$

**Aufgabe 6** (Polardarstellung komplexer Zahlen)

Bisher haben wir komplexe Zahlen durch ihren Real- und ihren Imaginärteil charakterisiert und sie entsprechend in der Form $a + b\mathrm{i}$ oder der Form $(a, b)$ dargestellt. Diese Darstellung wird auch als *kartesische Darstellung* komplexer Zahlen bezeichnet.

Alternativ dazu lässt sich jede komplexe Zahl $z$ durch die folgenden beiden Größen charakterisieren:

- ihren euklidischen Abstand zum Koordinatenursprung – diese Größe wird *Betrag* der komplexen Zahl genannt und üblicherweise mit $|z|$ oder mit $r_z$ bezeichnet,
- den entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Winkel, welchen die Strecke zwischen dem Ursprung und der komplexen Zahl mit der positiven Realteilachse einschließt – diese Größe wird *Argument* oder einfach *Winkel* der komplexen Zahl genannt und üblicherweise mit $\arg(z)$ oder einfach $\varphi_z$ bezeichnet.

Für beide eben eingeführten Begriffe haben wir die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene zugrunde gelegt. Das Argument einer komplexen Zahl ist natürlich stets nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi$ eindeutig bestimmt. Die Darstellung einer komplexen Zahl unter Verwendung ihres Betrags und ihres Arguments anstelle ihres Real- und ihres Imaginärteils wird auch als *Polardarstellung* bezeichnet.

Nun zur eigentlichen Aufgabe:

(a) Überlegen Sie sich, wie sich kartesische und Polardarstellung einer komplexen Zahl ineinander überführen lassen. Das heißt genauer:

  (a1) Von einer komplexen Zahl $z$ seien Realteil $\mathrm{Re}(z) = a$ und Imaginärteil $\mathrm{Im}(z) = b$ bekannt. Wie lassen sich dann Betrag und Argument dieser komplexen Zahl berechnen?

  (a2) Umgekehrt seien von einer komplexen Zahl $z$ der Betrag $|z| = r$ und das Argument $\arg(z) = \varphi$ bekannt. Wie lassen sich dann Real- und Imaginärteil dieser komplexen Zahl berechnen?

  *Tipp:* Nutzen Sie bekannte Gesetzmäßigkeiten im rechtwinkligen Dreieck.

(b) Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z$ und $w$, von denen die Beträge $r_z$ und $r_w$ sowie die Argumente $\varphi_z$ und $\varphi_w$ bekannt seien. Zeigen Sie, dass das Produkt $z \cdot w$ dann den Betrag $r_z \cdot r_w$ und das Argument $\varphi_z + \varphi_w$ besitzt. Überlegen Sie ferner, welchen Betrag und welches Argument die zu $z$ gehörige konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$ hat.

**Aufgabe 7** (Eulersche Formel)

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird als die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$f'(z) = f(z)$$

unter der Anfangsbedingung $f(0) = 1$ definiert. Weisen Sie damit nach, dass für alle $b \in \mathbb{R}$ die folgende Identität erfüllt ist:

$$\mathrm{e}^{b\mathrm{i}} := \exp(b\mathrm{i}) = \cos(b) + \mathrm{i}\sin(b).$$

Zeigen Sie des Weiteren, mit Annahme der Gültigkeit der Potenzgesetze, dass für jede komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ gilt:

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{a} \cdot (\cos(b) + \mathrm{i}\sin(b)).$$

## Teilbarkeiten und Primzahlen

**Aufgabe 8**

Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a|b,\ b|c \ \Rightarrow\ a|c$
2. $a|b,\ a|c \ \Rightarrow\ a|b+c$
3. $a|b,\ c|d \ \Rightarrow\ ac|bd$

## Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ eindeutige nichtnegative ganze Zahlen $p, r \in \mathbb{N}_0$ existieren mit $r < b$ und

$$a = bp + r.$$

Folgern Sie daraus, dass für alle ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b \neq 0$ eindeutige ganze Zahlen $p, r \in \mathbb{Z}$ existieren mit $0 \leq r < |b|$ und

$$a = bp + r.$$

## Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass für jede Primzahl $p$ gilt:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: \; p|ab \;\Rightarrow\; p|a \vee p|b. \tag{$*$}$$

Ist umgekehrt eine Zahl $p \in \mathbb{N}$, für die $(*)$ erfüllt ist, notwendigerweise eine Primzahl?

*Hinweis:* Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ teilerfremde $x, y \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$\mathrm{ggT}(a, b) = ax + by.$$

## Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ positive Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ und Exponenten $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{N}$ existieren mit:

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_k}.$$

Mit Aufgabe 10 können Sie zeigen, dass diese eindeutig sind.