Skript
zur Vorlesung
Finanzmathematik

Dr. Jan Rudl
TU Dresden

Version 3.0
Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript ist aus einer sechsstündigen Vorlesung „Finanzmathematik“ an der Fachrichtung Mathematik der TU Dresden entstanden. Die erforderlichen mathematischen Grundkenntnisse in Maß-, Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie sowie in der Theorie der stochastischen Prozesse sind im Anhang überblicksartig aufgeführt.

Inhaltlich ist dieses Skript eng an die übliche Standardliteratur (die jeweils zum Anfang des jeweiligen Abschnitts genannt wird) angelehnt. Die Vorlesungen von Herrn Prof. Dr. Volker Nollau und Herrn Dr. Lothar Partzsch an der TU Dresden zu Teilgebieten der Finanzmathematik haben ebenfalls Eingang gefunden. Einen großen Einfluss hatte außerdem meine Tätigkeit bei der Maravon GmbH, aus der sich eine Vielzahl praxisrelevanter Ergänzungen ergeben hat.

Vom mathematischen Inhalt her basiert das vorliegende Skript – bis auf wenige Ausnahmen – somit auf bereits vorliegenden Ergebnissen. Mein Eigenanteil beschränkt sich daher im Wesentlichen auf die (hoffentlich) durchgehende Konsistenz der Darstellung.

Dresden, Oktober 2013 Jan Rudl

Notationen

- $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}, \quad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{R}_{0+} := [0, \infty), \quad \mathbb{R}_{>0} := (0, \infty)$

- $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (m \in \mathbb{N})$

  - $\boldsymbol{x}^T := (x_1, \ldots, x_m)$
  - $\boldsymbol{0}^m := (0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{1}^m := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$
  - $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := \sum_{j=1}^{m} x_j y_j \in \mathbb{R}$ („übliches“ Skalarprodukt)
  - $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y} \quad :\Longleftrightarrow \quad x_j \geq y_j \ \forall j = 1, \ldots, m$

    $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{y} \quad :\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y} \ \wedge \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$

    (d.h. für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ ist $x_j > y_j$)

    $\boldsymbol{x} \gg \boldsymbol{y} \quad :\Longleftrightarrow \quad x_j > y_j \ \forall j = 1, \ldots, m$
  - $\Big(\boldsymbol{x}\Big)^+ \ := \begin{pmatrix} \max(x_1, 0) \\ \max(x_2, 0) \\ \vdots \\ \max(x_m, 0) \end{pmatrix}$

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \ldots & & \ldots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (n, m \in \mathbb{N})$:

  - $\boldsymbol{A}_i := \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{im} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ (i-te Zeile als Spaltenvektor)

    $\boldsymbol{A}^j := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ (j-te Spalte)

- $\boldsymbol{A}^T := \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \ldots & & \ldots \\ A_{1m} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- $\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n \cdot \boldsymbol{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ („übliches“ Matrixprodukt)
- Zusammenhang zwischen Skalar- und Matrixprodukt: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T \bullet \boldsymbol{y}$

Einführende Bemerkungen

- **Finanzmathematik** (*Mathematical Finance*) – Disziplin der angewandten Mathematik, die sich insbesondere mit der Analyse und dem Vergleich von Zahlungsströmen und der Ermittlung theoretischer Barwerte (*present values*) von Finanzprodukten beschäftigt.
- **Untergliederung** in
  - **klassische** Finanzmathematik (Zins-, Renten- und Tilgungsrechnung) und
  - **stochastische** (bzw. *moderne*) Finanzmathmatik (Grundproblem: „Fairer Preis“ für eine Aktienoption)
- Unterscheidung von stochastischer Finanzmathematik in
  - **diskreter** Zeit (Grundmodell: Cox-Ross-Rubinstein- oder Binomialmodell) und
  - **stetiger** Zeit (Grundmodell: Black-Scholes-Modell)
- Benötigte theoretische Grundlagen: Stochastische Prozesse (insbesondere **Martingale**) sowie **Stochastische Differentialgleichungen**
- Modellierung ist sehr wichtig!
- **Geschichte:**
  - **1900:** Dissertation „Théorie de la spéculation“, Louis **Bachelier** (1870-1946)
    - erfuhr erst 50 Jahre später Anerkennung
    - arbeitete mit Wiener-Prozessen (5 Jahre vor Albert Einstein!)
    - Preisformeln für Aktienoptionen wurden angegeben
    - Bachelier Finance Society – Internationale finanzmathematische Gesellschaft
  - **1908:** „Theorie der Börsengeschäfte“, Vinzenz Bronzin (1872-1970)
    - „vergessene“ Arbeit, nahm in weiten Teilen des Black-Scholes-Modell vorweg
  - **1973:** Black-Scholes-Modell
    - Standardmodell für die Bewertung von Aktienoptionen
    - Annahme: Aktienkurse sind logarithmisch normalverteilt
    - Originalarbeiten: **Black**, Fischer S. (1938–1995) & **Scholes**, Myron S. (* 1941): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy 81, 1973, S. 637-654
      Merton, Robert C. (* 1944): Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science 4, 1973, S. 141-183
    - Merton und Scholes erhielten dafür 1997 den Nobelpreis (Black war zu diesem Zeitpunkt bereits verstorben).

Kapitel 1

Klassische Finanzmathematik

- Im Wesentlichen „Elementarmathematik“, aber hilfreich zum Verständnis grundlegender Begriffe und Zusammenhänge in der Finanzmathematik
- Wichtig für Rechnungs- und Versicherungswesen
- Literatur: Jürgen Tietze, Einführung in die Finanzmathematik [13]

1.1 Zinsrechnung

- **Wirtschaftswissenschaftliche Definition:** Zins (*interest*) – Entgelt für ein über einen bestimmten Zeitraum zur Nutzung überlassenes Sach- oder Finanzgut (Kapital)

  Hier: Finanzgut (Kapital)
- **Laufzeit:** Dauer der Kapitalüberlassung
- **Zinszuschlagstermine:** Zeitpunkte, zu denen die Zinsen fällig (und mit dem Kapital zusammengefasst) werden

  Üblich: jährlich, halbjährlich, vierteljährlich, monatlich
- **Zinsperiode:** Zeitraum zwischen zwei Zinszuschlagsterminen (bzw. dem Überlassungstermin des Kapitals und dem ersten Zinszuschlagstermin)
- **Nachschüssige Verzinsung:** Zinsen werden am Ende der Zinsperiode gezahlt (im Folgenden vorausgesetzt)

  Vorschüssige Verzinsung: Zahlung zu Beginn der Zinsperiode
- **Verzinsungsarten: Lineare (einfache) Verzinsung** (*simple interest*) – Zinsen werden zeitanteilig berechnet und erst am Ende der Laufzeit dem Kapital zugeschlagen, d.h., innerhalb der Laufzeit existiert kein Zinszuschlagstermin.

Exponentielle Verzinsung (Zinseszins): (*compound interest*) – Zinsen werden nach jeder Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt und selbst wieder verzinst, d.h., innerhalb der Laufzeit existieren ein oder mehrere Zinszuschlagstermine.

- **Übliche Bezeichnungen:**

  $n \in \mathbb{R}_{>0}$ – Laufzeit (in Zeiteinheiten, üblicherweise Jahre)

  $K_0 \in \mathbb{R}$ – Anfangskapital (*initial balance*)

  $K_n \in \mathbb{R}$ – Endkapital

  $i \in \mathbb{R}$ – **Zinsrate** (Zinssatz, *interest rate*), bezogen auf dieselbe Zeiteinheit wie die Laufzeit

  $p := 100 \cdot i$ – **Zinsfuß**

- Berechnung von K_n bei gegebenen K_0, i, n: **Aufzinsung** (*compounding*)

  Berechnung von K_0 bei gegebenen K_n, i, n: **Abzinsung** bzw. **Diskontierung** (*discounting*)

- Die **Berechnung von Jahresbruchteilen** erfolgt mit Hilfe sogenannter **Zinsberechnungsmethoden** (*day count conventions*, siehe Abschnitt A.1). Die jeweils angewendete Zinsberechungsmethode muss ggf. explizit vereinbart werden.

1.1.1 Lineare und exponentielle Verzinsung

- Berechnungsformeln für das Endkapital K_n:

  Lineare Verzinsung: $\boxed{K_n^{(\mathrm{simp})} = K_0 \cdot (1 + i \cdot n)}$

  Zinseszinsrechnung: $\boxed{K_n^{(\mathrm{comp})} = K_0 \cdot (1 + i)^n}$

- Bei der Zinseszinsrechung heißt $1 + i$ **Aufzinsungsfaktor** und $\dfrac{1}{1+i}$ **Diskontfaktor**.

- **Beispiel:** $K_0 = 100,\ \ i = 5\%$

n	1	2	5	10	15	20	30	40
$K_n^{(\mathrm{simp})}$	105	110	125	150	175	200	250	300
$K_n^{(\mathrm{comp})}$	105	110.25	127.62	162.89	207.89	265.33	432.19	704.00

- **Zahlungsreihe:**

  Endliche Folge von Zahlungen $K_{0,1}, K_{0,2}, \ldots, K_{0,k} \in \mathbb{R} \quad (k \in \mathbb{N})$

  mit gemeinsamem Laufzeit-Ende $n \in \mathbb{R}_{>0}$ und jeweiligen Zahlungszeitpunkten $n_1, n_2, \ldots, n_k \in [0, n]$

  (d.h. die jeweiligen Laufzeiten betragen $n - n_1, n - n_2, \ldots, n - n_k$).

- Der **Endwert einer Zahlungsreihe** wird – in Verallgemeinerung des Begriffs Endkapital – ebenfalls mit K_n bezeichnet.

- Berechnungsformeln für den Endwert K_n einer Zahlungsreihe:

Lineare Verzinsung: $$\boxed{K_n^{(\text{simp})} = \sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot \Big(1 + i \cdot (n - n_m)\Big)}$$

Zinseszinsrechnung: $$\boxed{K_n^{(\text{comp})} = \sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot (1+i)^{(n-n_m)}}$$

- **Beispiel:** $k = 10,\ K_{0,m} = 100,\ \ n_m = m - 1\ (m = 1, \ldots, k),\ \ i = 5\%,\ \ n = 10$

  (regelmäßige Zahlungen vom Jahr 0 bis zum Jahr 9 in Höhe von 100, gesucht ist der Wert im Jahr 10)

$$\begin{aligned}
K_n^{(\text{simp})} &= 100 \cdot \sum_{m=1}^{10} \Big(1 + i \cdot \Big(10 - (m-1)\Big)\Big) \\
&= 100 \cdot \sum_{m=1}^{10} (1 + i \cdot m) \ = \ 100 \cdot \Big(10 + i \cdot \sum_{m=1}^{10} m\Big) \\
&\overset{1}{=} 100 \cdot \Big(10 + i \cdot \frac{10 \cdot 11}{2}\Big) \ = \ 100 \cdot \Big(10 + 0.05 \cdot 55\Big) \ = \ \underline{\underline{1275}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_n^{(\text{comp})} &= 100 \cdot \sum_{m=1}^{10} (1+i)^{(10-(m-1))} \\
&= 100 \cdot \sum_{m=1}^{10} 1.05^m \ \overset{2}{=} \ 100 \cdot 1.05 \cdot \frac{1.05^{10} - 1}{1.05 - 1} \ = \ \underline{\underline{1320.68}}
\end{aligned}$$

1.1.2 Äquivalenz von Zahlungsreihen

- **Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik:** „Zahlungsreihen dürfen nur dann miteinander verglichen werden, wenn diese zuvor auf denselben Stichtag auf- bzw. abgezinst wurden."

- Der **Wert einer Zahlungsreihe zum Zeitpunkt** $t \in \mathbb{R}$ wird mit K_t bezeichnet. Man erhält diesen durch summandenweises Aufzinsen bzw. Diskontieren der Zahlungen $K_{0,1}, \ldots, K_{0,k}$.

[1] $\sum\limits_{m=1}^{k} m = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$

[2] $\sum\limits_{m=0}^{\infty} q^m = \frac{1}{1-q}$ und $\sum\limits_{m=1}^{\infty} q^m = \frac{q}{1-q}$ für $|q| < 1$,
$\sum\limits_{m=0}^{k} q^m = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$ und $\sum\limits_{m=1}^{k} q^m = q \cdot \frac{1-q^k}{1-q} = q \cdot \frac{q^k-1}{q-1}$ für $|q| \neq 1$

- Berechnungsformeln für den Wert K_t einer Zahlungsreihe z. Ztpkt. t:

Lineare Verzinsung: $\boxed{K_t^{(\text{simp})} = \sum_{m=1, t \geq n_m}^{k} K_{0,m} \cdot \Big(1 + i \cdot (t - n_m)\Big) + \sum_{m=1, t < n_m}^{k} \frac{K_{0,m}}{1 + i \cdot (n_m - t)}}$

Zinseszinsrechnung:
$$\begin{aligned} K_t^{(\text{comp})} &= \boxed{\sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot (1+i)^{(t-n_m)}} \\ &= \sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot (1+i)^{(n-n_m)} \cdot (1+i)^{(t-n)} \\ &= \boxed{K_n^{(\text{comp})} \cdot (1+i)^{(t-n)}} \end{aligned}$$

- Der Wert zum Stichtag $t = 0$ wird auch als **Barwert** (bzw. Gegenwartswert, *present value*) bezeichnet.

- **Bemerkung:** Bei der linearen Verzinsung ist – im Gegensatz zur Zinseszinsrechnung – die Festlegung, dass die Zahlungen $K_{0,1}, \ldots, K_{0,k}$ ausgehend von den jeweiligen Zahlungszeitpunkten $n_1, \ldots, n_k$ (und nicht etwa von der Laufzeit n aus) aufgezinst bzw. diskontiert werden, unbedingt erforderlich, da ansonsten die Ergebnisse abweichen können, wie das folgende Beispiel zeigt:

  Gegeben sei eine Zahlungsreihe mit $K_{0,1} = 100$, $K_{0,2} = 200$, $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n = 2$ und $i = 5\%$.

  - Bei linearer Verzinsung beträgt der Endwert $K_2^{(\text{simp})} = 100 \cdot 1.1 + 200 = 310$.
  - Nun ist der Wert zum Zeitpunkt $t = 1$ gesucht. Gemäß obiger Formel ergibt sich $K_1^{(\text{simp})} = 100 \cdot 1.05 + \frac{200}{1.05} = 105 + 190.48 = \boxed{295.48}$.
  - Hätte man den Endwert 310 diskontiert, würde sich $\frac{310}{1.05} = \boxed{295.24}$ ergeben.
  - Bei Diskontierung des Endwertes ist bei linearer Verzinsung das Ergebnis sogar abhängig von der Laufzeit: Hätte man z.B. als Laufzeit $n = 3$ gewählt, würde der entsprechende Endwert $K_3^{(\text{simp})} = 100 \cdot 1.15 + 200 \cdot 1.05 = 325$ betragen. Dieser Wert auf den Zeitpunkt $t = 1$ diskontiert ergibt $\frac{325}{1.1} = \boxed{295.45}$.

- **Definition 1.1** *Zwei Zahlungsreihen heißen* ***äquivalent zum Stichtag*** $t \in \mathbb{R}$, *falls sie zum Zeitpunkt* t *denselben Wert besitzen.*

- **Lemma 1.2** *Sind zwei Zahlungsreihen zum Stichtag* $t \in \mathbb{R}$ *äquivalent, so sind sie es bei Anwendung der Zinseszinsrechnung auch zu jedem beliebigen anderen Stichtag* $\tilde{t} \in \mathbb{R}$. *Diese Aussage gilt bei Anwendung der linearen Verzinsung nicht immer.*

  Beweis: Gegeben seien zwei Zahlungsreihen mit den Werten $\tilde{K}_t^{(\text{comp})} = \hat{K}_t^{(\text{comp})}$ zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Für jeden beliebigen anderen Stichtag $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ gilt dann analog zu obigen Formeln ist

$$\tilde{K}_{\tilde{t}}^{(\text{comp})} = \tilde{K}_t^{(\text{comp})} \cdot (1+i)^{\tilde{t}-t} = \hat{K}_t^{(\text{comp})} \cdot (1+i)^{\tilde{t}-t} = \hat{K}_{\tilde{t}}^{(\text{comp})},$$

d.h., die Zahlungsreihen sind auch zum Zeitpunkt $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ äquivalent.

Das folgende Beispiel zeigt, dass dies bei Anwendung der linearen Verzinsung nicht immer der Fall ist: Gegeben seien zwei Zahlungsreihen mit

$$\begin{array}{llll} \tilde{K}_{0,1} = \tilde{K}_{0,2} = 150, & \tilde{n}_1 = 0,\ \tilde{n}_2 = 1, & \tilde{n} = 2 & \text{und} \\ \hat{K}_{0,1} = \hat{K}_{0,2} = 100,\ \hat{K}_{0,3} = 115, & \hat{n}_1 = 0,\ \hat{n}_2 = 1,\ \hat{n}_3 = 2, & \hat{n} = 2. & \end{array}$$

Für $i = 10\%$ ergibt sich für die jeweiligen Endwerte

$$\begin{array}{lclcll} \tilde{K}_2^{(\text{simp})} & = & 150 \cdot 1.2 + 150 \cdot 1.1 & = & 345 & \text{und} \\ \hat{K}_2^{(\text{simp})} & = & 100 \cdot 1.2 + 100 \cdot 1.1 + 115 & = & 345, & \end{array}$$

d.h., die beiden Zahlungsreihen sind (bei Anwendung der linearen Verzinsung) zum Stichtag $t = 2$ äquivalent. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ergibt sich jedoch

$$\begin{array}{lclcll} \tilde{K}_0^{(\text{simp})} & = & 150 + \frac{150}{1.1} & = & 286.36 & \text{und} \\ \hat{K}_0^{(\text{simp})} & = & 100 + \frac{100}{1.1} + \frac{115}{1.2} & = & 286.74, & \end{array}$$

d.h., die beiden Zahlungsreihen sind (bei Anwendung der linearen Verzinsung) zum Stichtag $t = 0$ nicht äquivalent. ■

- **Bemerkung:** Bei Anwendung der linearen Verzinsung wird beim Vergleich von zwei Zahlungsreihen üblicherweise der Tag der letzten auftretenden Zahlung, d.h. $\max\left\{ \max_{\tilde{m}=1,\ldots,\tilde{k}} \tilde{n}_{\tilde{m}}, \max_{\hat{m}=1,\ldots,\hat{k}} \hat{n}_{\hat{m}} \right\}$, als Stichtag gewählt.

1.1.3 Mittlerer Zahlungstermin

- Gegeben sei eine Zahlungsreihe mit den Zahlungen $K_{0,1}, \ldots, K_{0,k}$, den dazugehörigen Zahlungsterminen $n_1, \ldots, n_k$, der Laufzeit n sowie der Zinsrate i.

  Die Summe

  $$K = \sum_{m=1}^{k} K_{0,m}$$

  aller Zahlungen wird als **nominelle Summe** bezeichnet. Derjenige Zeitpunkt $\bar{n}$, für den der Endwert einer Einmalzahlung in Höhe von K äquivalent ist mit dem Endwert der gegebenen Zahlungsreihe, wird als **mittlerer Zahlungstermin** (oder **Zeitzentrum**) bezeichnet.

- Bestimmungsgleichungen für den mittleren Zahlungstermin $\bar{n}$:

Lineare Verzinsung: $\boxed{\sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot \big(1 + i \cdot (n - n_m)\big) = K \cdot \Big(1 + i \cdot (n - \bar{n})\Big)}$

Zinseszinsrechnung: $\boxed{\sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot \Big(1 + i\Big)^{(n-n_m)} = K \cdot (1 + i)^{n-\bar{n}}}$

- Bei Verwendung der linearen Verzinsung lässt sich die Bestimmungsgleichung durch elementare Umformung zu

$$\sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot (n - n_m) \;=\; K \cdot (n - \bar{n})$$

vereinfachen. Ist es zu bemerken, dass der mittlere Zahlungstermin bei linearer Verzinsung *unabhängig* von der Zinsrate i ist.

1.1.4 Gemischte Verzinsung

- Im Folgenden wird der Einfachheit halber von einer Zahlungsreihe mit genau einer Zahlung z. Ztpkt. 0 (d.h. von einem Anfangskapital K_0) ausgegangen.

- Fällt der Beginn oder das Ende einer Kapitalüberlassungsfrist nicht auf einen Zinszuschlagstermin, wird in der Bankenpraxis häufig die sogenannte **gemischte Verzinsung** angewendet. Dabei werden die anfallenden Zinsen **vor dem ersten bzw. nach dem letzten Zinszuschlagstermin** jeweils durch **lineare Verzinsung** berechnet. Zwischen dem ersten und letzten Zinszuschlagstermin werden die Zinsen durch Zinseszinsrechnung bestimmt.

Bezeichnung: $n \in \mathbb{R}_{>0}$ – Laufzeit in Jahren (wie bisher)

$t_1 \in [0, n]$ – erster Zinszuschlagstermin

$t_2 \in [t_1, n]$ – letzter Zinszuschlagstermin

- Endwert K_n bei gemischter Verzinsung:

$$\boxed{K_n^{(\text{mix})} \;=\; K_0 \cdot (1 + i \cdot t_1) \cdot (1 + i)^{t_2 - t_1} \cdot \Big(1 + i \cdot (n - t_2)\Big)}$$

- **Beispiel:** Anfangskapital $K_0 = 100$, Zinsrate $i = 12\%$, Laufzeit $n = 2$ von Oktober bis übernächsten Oktober, Zinszuschlagstermine am Jahresanfang

$$\Longrightarrow \quad t_1 = 0.25,\; t_2 = 1.25$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad K_2^{(\text{mix})} \;&=\; 100 \cdot (1 + 0.12 \cdot 0.25) \cdot (1 + 0.12)^1 \cdot (1 + 0.12 \cdot 0.75) \\ &=\; 100 \cdot 1.03 \cdot 1.12 \cdot 1.09 \;=\; \underline{\underline{125.74}} \end{aligned}$$

- Zum Vergleich: Die übliche Zinseszinsrechnung würde zu $K_2^{(\text{comp})} = 100 \cdot 1.12^2 = \underline{\underline{125.44}}$ führen (bei Zinsperioden kleiner als einem Jahr liefert die lineare Verzinsung stets höhere Werte).

- **Problem:** Äquivalenzbetrachtungen sind – wie bei der linearen Verzinsung – vom gewählten Stichtag abhängig. Außerdem beeinflusst eine „Parallelverschiebung“ der Laufzeit das Ergebnis.

Beispiel: Wie oben, aber Laufzeit von Juli bis übernächsten Juli

$$\Longrightarrow \quad t_1 = 0.5,\; t_2 = 1.5 \quad \Longrightarrow \quad K_2^{(\text{mix})} \;=\; 100 \cdot 1.06 \cdot 1.12 \cdot 1.06 \;=\; \underline{\underline{125.84}}$$

1.1.5 Unterjährige Verzinsung

- Gibt es innerhalb eines Jahres mehrere Zinszuschlagstermine, spricht man von **unterjähriger Verzinsung** (*period compounding*). Diese ist lediglich im Zusammenhang mit der Zinseszinsrechnung von Bedeutung (da bei linearer Verzinsung stets das Anfangskapital als Bezugsgröße gewählt wird).

- Es ist zwischen der **nominellen** Zinsrate i_{nom} (*nominal interest rate*) und der **effektiven** Zinsrate i_{eff} (*effective interest rate*) zu unterscheiden.

- f – Anzahl der unterjährigen Zinszuschlagstermine

  (üblich: $f = 2$ – halbjährlich, $f = 4$ – vierteljährlich, $f = 12$ – monatlich)

- Endwert $K_{n,f}^{(\text{comp})}$ bei unterjähriger Verzinsung (Laufzeit n):

$$\boxed{K_{n,f}^{(\text{comp})} \;=\; K_0 \cdot \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{f}\right)^{f \cdot n}}$$

- **Beispiel:** $K_0 = 100$, $n = 2$, $f = 4$, $i_{\text{nom}} = 8\%$

$$\Longrightarrow \quad K_{2,4}^{(\text{comp})} \;=\; 100 \cdot \left(1 + \tfrac{0.08}{4}\right)^{4 \cdot 2} \;=\; 100 \cdot (1.02)^8 \;=\; \underline{\underline{117.17}}$$

- Zum Vergleich: Bei jährlicher Verzinsung ($f = 1$) würde sich $K_{2,1}^{(\text{comp})} \;=\; 100 \cdot (1.08)^2 \;=\; \underline{\underline{116.64}}$ ergeben.

- Die **nominelle Zinsrate** stellt somit die Berechnungsgrundlage dar, aus der sich der jeweilige Zinssatz $\dfrac{i_{\text{nom}}}{f}$ für die Zinsperiode (Halbjahr, Quartal, Monat) ergibt.

- Die **effektive Zinsrate** ist diejenige Zinsrate, die bei *jährlicher* Verzinsung denselben Zinsertrag liefern würde. Es besteht demnach die Beziehung

$$\boxed{\left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{f}\right)^{f} \;=\; 1 + i_{\text{eff}}}$$

- **Beispiel:** Wie oben, $f = 4$, $i_{\text{nom}} = 8\%$ $\quad \Longrightarrow \quad i_{\text{eff}} \;=\; \left(1 + \dfrac{0.08}{4}\right)^{4} - 1 \;=\; \underline{\underline{8.24\%}}$

1.1.6 Stetige Verzinsung

- Lässt man bei der unterjährigen Verzinsung die Anzahl der Zinszuschlagstermine f unendlich groß (und damit die Zinsperioden unendlich klein) werden, ergibt sich formal

$$\boxed{\lim_{f \to \infty} \left(1 + \frac{i_{\text{nom}}}{f}\right)^{f} \;=\; \mathrm{e}^{i_{\text{nom}}}}$$

- Die Verzinsung unter Verwendung dieses Aufzinsungsfaktor $\mathrm{e}^{i_{\mathrm{nom}}}$ wird auch als **stetige Verzinsung** (*continous compounding*) bezeichnet.
- Aufgrund der „angenehmen" Eigenschaften der e-Funktion (insbesondere bezüglich Differenzieren und Integrieren) wird die stetige Verzinsung insbesondere bei formal-mathematischen Untersuchungen verwendet.
- In diesem Zusammenhang wird die nominelle Zinsrate i_{nom} auch als **stetige Zinsrate** (*continuously compounded interest rate*) oder **Zinsintensität** bezeichnet.
- Die dazugehörige effektive (Jahres-)Zinsrate i_{eff} ergibt sich aus

$$\boxed{\mathrm{e}^{i_{\mathrm{nom}}} = 1 + i_{\mathrm{eff}}}$$

- **Beispiel:** Die zur stetigen Zinsrate $i_{\mathrm{nom}} = 8\%$ gehörige effektive Zinsrate ist $i_{\mathrm{eff}} = \mathrm{e}^{0.08} - 1 = 8.33\%$.

1.2 Rentenrechnung

- Unter einer **Rente** versteht man eine **periodische Folge von Zahlungen**. Mathematisch ist dies eine Zahlungsreihe, deren **Zahlungszeitpunkte** eine **arithmetische Folge** mit der Differenz $\delta > 0$ bilden, d.h., für die Folge der Zahlungszeitpunkte $n_1, \ldots, n_k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, gilt $n_1 \in \mathbb{R}_{0+}$ und $n_{m+1} - n_m = \delta$ für $m \in \{1, \ldots, k-1\}$.
- **Bemerkungen:**
  1. Die Zahlungen einer Rente werden als **Raten** bezeichnet.
  2. Für $k = \infty$ (und folglich auch unendlicher Laufzeit n) erhält man die sogenannte **ewige Rente** (siehe Abschnitt 1.2.1). Im Folgenden wird jedoch (zunächst) $k < \infty$ vorausgesetzt.
  3. Im Folgenden werden jährliche Zinszuschlagstermine angenommen, die mit den Zahlungszeitpunkten der Rente übereinstimmen, d.h. $\delta = 1$ und $n_1 \in \{0, 1\}$.
  4. Im Fall von $n_m = m$ $(m = 1, \ldots, k)$ spricht man von einer **nachschüssigen Rente**, im Fall von $n_m = m - 1$ von einer **vorschüssigen Rente**. In beiden Fällen beträgt die Laufzeit $n = k$. Bei einer nachschüssigen Rente erfolgt die erste Zahlung z. Ztpkt. 1 und die letzte Zahlung z. Ztpkt. n, bei einer vorschüssigen Rente erfolgt die erste Zahlung z. Ztpkt. 0 und die letzte Zahlung z. Ztpkt. $n - 1$.
  5. Im Folgenden werden **ausschließlich *nachschüssige* Renten** betrachtet. Die entsprechenden Formeln für *vorschüssige* Renten ergeben sich aus den Formeln für nachschüssige Renten durch Abdiskontierung um eine Periode (d.h. Division durch $1 + i$).
  6. Es kommt grundsätzlich die **Zinseszinsrechnung** zur Anwendung.

7. Die Zinsrate i ist konstant über die gesamte Laufzeit.

- **Annahme:** Zahlungen in gleicher Höhe $R > 0$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \text{Endwert} \quad K_n &= \sum_{m=1}^{k} K_{0,m} \cdot (1+i)^{(n-n_m)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} R \cdot (1+i)^{(n-m)} = R \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \Big(1+i)^m \\
&= R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = \boxed{R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Barwert} \quad K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \boxed{R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

1.2.1 Ewige Rente

- **Annahme:** Zahlungen in gleicher Höhe $R > 0$ erfolgen unendlich lange ($n = k = \infty$)

  Endwert und Barwert ergeben sich als Grenzwerte der entsprechenden Werte der endlichen Rente:

  Endwert $K_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} K_n = \lim\limits_{n\to\infty} R \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} \to \infty$ für $i > 0$

  Barwert $K_0^\infty := \lim\limits_{n\to\infty} K_0 = \lim\limits_{n\to\infty} R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \boxed{\dfrac{R}{i}}$ für $i > 0$

- **Interpretation** des Barwertes einer ewigen Rente: Der Barwert K_0^∞ entspricht genau demjenigen Betrag, der jährlich Zinsen in Höhe von R erzeugt, denn es gilt $K_0^\infty \cdot i = R$.

- **Übungsaufgabe:** Bestimmen Sie den Endwert und den Barwert einer ewigen Rente für den Fall $i \leq 0$.

1.2.2 Renten mit veränderlichen Raten

- **Arithmetisch veränderliche Rente:**

  Zahlungen $K_{0,m} := R + (m-1) \cdot d$ mit $R > 0$ und $d \in \mathbb{R}$

  $\Longrightarrow \quad K_{0,1} = R,\; K_{0,m+1} - K_{0,m} = d$ für $m \in \{1, \ldots, k-1\}$ $(k \in \mathbb{N})$

  $\Longrightarrow$ Endwert $\boxed{K_n = \left(R + \dfrac{d}{i}\right) \cdot \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} - \dfrac{n \cdot d}{i}}$ (Übungsaufgabe)

- **Geometrisch veränderliche Rente:**

  Zahlungen $K_{0,m} := R \cdot (1 + i_{\text{dyn}})^{m-1}$ mit $R > 0$ und $i_{\text{dyn}} \in \mathbb{R}$

  i_{dyn} – **Dynamik-Rate**, $1 + i_{\text{dyn}}$ – **Dynamik-Faktor**

  $\Longrightarrow \quad K_{0,1} = R,\; \dfrac{K_{0,m+1}}{K_{0,m}} = 1 + i_{\text{dyn}}$ für $m \in \{1, \ldots, k-1\}$ $(k \in \mathbb{N})$

$$\Longrightarrow \quad \text{Endwert} \quad \boxed{K_n \;=\; R \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i_{\text{dyn}})^n}{i - i_{\text{dyn}}} \quad \text{für } i \neq i_{\text{dyn}}} \qquad \text{(Übungsaufgabe)}$$

- **Übungsaufgabe:** Bestimmen Sie den Endwert einer geometrisch veränderlichen Rente für den Fall $i = i_{\text{dyn}}$.

1.3 Tilgungsrechnung

- *Mathematisch* kann die Tilgungsrechnung als eine Variante der Rentenrechnung aufgefasst werden, wobei der Barwert K_0 der Rente der Höhe einer zurückzuzahlenden (zu tilgenden) Schuld (z.B. Kredit oder Hypothek) entspricht.

- Die Zahlungen $K_{0,1}, \ldots, K_{0,k}$ $(k \in \mathbb{N})$ der Rente heißen in diesem Zusammenhang **Annuitäten**.

- Im Folgenden werden – wie bei der Rentenrechnung – jährliche Zinszuschlagstermine angenommen, die mit den Zahlungszeitpunkten der Annuitäten übereinstimmen. Die Laufzeit sei $n \in \mathbb{N}$ (Jahre).

- Charakteristisch für die Tilgungsrechnung ist die **additive Aufspaltung** der Annuitäten $K_{0,m}$ $(m = 1, \ldots, n)$ in einen **Zinsanteil** Z_m und einen **Tilgungsanteil** T_m, d.h.

$$\begin{aligned} K_{0,m} &= Z_m + T_m, \quad m = 1, \ldots, n, \qquad \text{mit} \\ \sum_{m=1}^{n} T_m &= K_0, \quad Z_1 := i \cdot K_0 \quad \text{und} \quad Z_m := i \cdot \Bigl(K_0 - \sum_{j=1}^{m-1} T_j\Bigr). \end{aligned}$$

- Prinzipiell unterscheidet man zwei Tilgungsarten: Die **Ratentilgung** und die **Annuitätentilgung**.

- Die **Ratentilgung** ist durch konstante Tilgungsanteile, d.h.

$$\boxed{T_m := \frac{K_0}{n} \quad \text{für alle} \quad m = 1, \ldots, n}$$

gekennzeichnet. Der Zinsanteil (und damit die Annuität) verringert sich somit von einem Zahlungszeitpunkt zum nächsten um $i \cdot \frac{K_0}{n}$. Die Ratentilgung kann demzufolge als eine **arithmetisch veränderliche Rente** (s.o.) mit

$$K_{0,1} := \frac{K_0}{n} + i \cdot K_0 \qquad \text{und} \qquad d := -i \cdot \frac{K_0}{n}$$

aufgefasst werden. Für den Endwert K_n ergibt sich (siehe obige Formel)

$$K_n = \left(K_{0,1} + \frac{d}{i}\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{n \cdot d}{i}$$

$$= \left(\frac{K_0}{n} + i \cdot K_0 - \frac{K_0}{n}\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + K_0$$

$$= K_0 \cdot \Big((1+i)^n - 1\Big) + K_0 \quad = \quad K_0 \cdot (1+i)^n,$$

was dem Endwert der Schuld K_0 z. Ztpkt. n entspricht.

- Die **Annuitätentilgung** ist durch konstante Annuitäten, d.h.

  $$\boxed{K_{0,m} \;:=\; A \quad \text{für alle} \;\; m = 1, \ldots, n}$$

  gekennzeichnet. Aus obiger Endwert-Formel für Renten gleicher Höhe ergibt sich zur Bestimmung von A die Gleichung

  $$A \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \overset{!}{=} \quad K_0 \cdot (1+i)^n$$

  und folglich

  $$\boxed{A \;=\; K_0 \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}} \qquad (i \neq 0).$$

- **Übungsaufgabe:** Bestimmen Sie die Annuität A bei Annuitätentilgung im Fall $i = 0$.

Kapitel 2

Stochastische Finanzmathematik in diskreter Zeit

- Wesentlicher Unterschied zwischen klassischer und stochastischer Finanzmathematik: „Zahlungsströme“ (Verallgemeinerung von Zahlungsreihen auf ggf. stetige Zeit) sind stochastischen Einflüssen unterworfen

  $\Longrightarrow$ Wert eines Zahlungsstromes zu einem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_{0+}$ ist ebenfalls stochastisch

- Modellierung der „Wertentwicklungen“ stochastischer Zahlungsströme („Preisprozesse“) im Rahmen sogenannter **Marktmodelle**

Wesentliche Komponenten eines Marktmodells:

- **Zeithorizont** $n \in \mathbb{R}_{>0}$ (entspricht der Laufzeit aus der klassischen Finanzmathematik)
- **Menge von Handelszeitpunkten** $\mathbb{T} \subset [0, n]$ mit $\{0, n\} \subset \mathbb{T}$ (entspricht den Zahlungszeitpunkten einer Zahlungsreihe aus der klassischen Finanzmathematik)
- **Zustandsmenge** $\Omega \neq \emptyset$ – beschreibt mögliche „zukünftige Szenarien“
- Menge von $N + 1$ $(N \in \mathbb{N}_0)$ **Preisprozessen** $S^0, \ldots, S^N : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ (Verallgemeinerung der Werte zu den Zeitpunkten $t \in \mathbb{T}$ einer Zahlungsreihe aus der klassischen Finanzmathematik)

Bemerkungen:

- Den zukünftigen Szenarien können mit Hilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden.
- Dem Preisprozess S^0 kommt in vielen Fällen eine Sonderrolle als „**Diskontierungsprozess**“ (dem sogenannten „**Numéraire**“) zu.

- In Verbindung mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ kann ein Preisprozess S als ein stochastischer Prozess $\left(S_t\right)_{t \in \mathbb{T}}$ mit $S_t : \omega \in \Omega \to S(t, \omega) \in \mathbb{R}$ aufgefasst werden (falls er den üblichen Messbarkeitsforderungen genügt).

- Die von einem Preisprozess S abgeleitete Funktion $S(t, .) : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}$, heißt **Preis zum Zeitpunkt** t. Der Preis zum Zeitpunkt n wird auch als **(Europäisches) Auszahlungsprofil** bezeichnet, der Preis zum Zeitpunkt 0 auch einfach nur als **Preis**. In Verbindung mit einem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ ist ein **Preis zum Zeitpunkt** t eine Zufallsgröße.

- **Grundlegende Problemstellung:** Geeignete Ergänzung eines auf $\hat{\mathbb{T}} \times \Omega$ ($\hat{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}$) gegebenen („zeitlich unvollständig bekannten") Preisprozesses zu einem („zeitlich vollständig bekannten") Preisprozess auf $\mathbb{T} \times \Omega$ unter Beachtung eines geeigneten „Äquivalenzprinzips" (in Verallgemeinerung der Äquivalenz von Zahlungsreihen aus der klassischen Finanzmathematik)

- **Klassifizierung** von im Folgenden behandelten Modellen:

Modell	$\mathbb{T}$	Ω	Preisprozesse
Einperioden-Marktmodell mit endlich vielen Zuständen (Abschnitt 2.2)	$\{0, n\}$	$\lvert\Omega\rvert \in \mathbb{N}$	endlich viele
Einperioden-Marktmodell mit allgemeinem Zustandsraum (Abschnitt 2.3)	$\{0, n\}$	beliebig (auch überabzählbar unendlich)	endlich viele
Allgemeines Mehrperioden-Marktmodell (Abschnitt 2.4)	$\{0, 1, \ldots, n\}$	beliebig	endlich viele
Mehrperioden-Binomialmodell (Abschnitt 2.5)	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$\lvert\Omega\rvert = 2^n$	2 (ein Bond und eine Aktie, s.u.)
Black-Scholes-Modell (Abschnitt 3.1)	$[0, n]$	beliebig	2 (ein Bond und eine Aktie, s.u.)
Allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen (Abschnitt 4.3)	$[0, n]$ bzw. $[0, \infty)$	beliebig	endlich viele

2.1 Finanzinstrumente und ihre Preisprozesse

Bemerkung: Es ist im Folgenden stets zwischen der **mathematischen Definition** und der **wirtschaftswissenschaftlichen Interpretation** zu unterscheiden. In der Literatur wird – aus mathematischer Sicht – ein Finanzinstrument (Wertpapier, *security, asset*) häufig als ein Preisprozess definiert. Hier jedoch wird ein Finanzinstrument als ein Tupel von charakteristischen Parametern angesehen, aus denen sich dazugehörige Preisprozesse bzw. Auszahlungsprofile ableiten lassen.

2.1.1 Basiswertpapiere

Basiswertpapiere sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Preisprozesse nicht in direkter (d.h. funktionaler) Beziehung zu anderen Preisprozessen stehen. Sie weisen somit eine gewisse „Eigenständigkeit“ auf.

2.1.1.1 Anleihe

Definition 2.1 *Eine **Anleihe** (festverzinsliches Wertpapier, bond, loan) ist ein Ein-Tupel $(g)_{\mathrm{B}}$ mit $g \in \mathbb{R}_{>0}$. Der zugehörige Preisprozess $S_{(g)_{\mathrm{B}}}$ ist streng positiv und besitzt das **Auszahlungsprofil***

$$S_{(g)_{\mathrm{B}}}(n,.) \equiv g.$$

Bemerkung: Eine Anleihe ist demnach durch eine sichere (d.h. von $\omega \in \Omega$ unabhängige) Auszahlung zum Zeitpunkt n gekennzeichnet. Die charakteristische Zahl g wird als **Nominalwert** (Nennwert, *nominal amount, notional amount, face value, par value*) bezeichnet.

2.1.1.2 Aktie

Eine **Aktie** (*stock, share*) besitzt keinen charakterisierenden Parameter und ist durch einen streng positiven Preisprozess gekennzeichnet, dessen Auszahlungsprofil (im Gegensatz zur Anleihe) *nicht* konstant ist.

Bemerkung: Bei dem Preisprozess einer Aktie handelt es sich um einen sehr allgemeinen Prozess, der nicht nur für das Finanzinstrument „Aktie“ spezifisch ist, sondern ebenso für die Preisentwicklung von Zinsen, Währungen (*currencies*) oder Rohstoffe (*commodities*) herangezogen werden kann.

2.1.2 Derivative Wertpapiere

Derivative Wertpapiere (Derivate, *derivatives*) sind dadurch gekennzeichnet, dass ihr Preisprozess (und insbesondere ihr Auszahlungsprofil) in einem funktionalen Zusammenhang zu dem Preisprozess eines Basiswertpapiers steht.

2.1.2.1 Futures/Forwards

Aus **wirtschaftswissenschaftlicher Sicht** handelt es sich bei Futures bzw. Forwards[1] um sogenannte **unbedingte Termingeschäfte**: Zwei Vertragsparteien **verpflichten** sich, ein bestimmtes Finanzinstrument (z.B. Aktie oder Anleihe, aber auch Währungen oder Zinsraten) zu einem festgelegten Zeitpunkt (Ausübungszeitpunkt, Fälligkeit, *maturity*) zu einem bei Vertragsabschluss festgelegten Preis (der sogenannte **Basispreis** oder **Ausübungspreis**, *exercise price, strike (price)*) zu kaufen bzw. zu verkaufen. Der **Käufer** eines Futures wird dabei als **„long position"**, der **Verkäufer** als **„short position"** bezeichnet. Das zugrundeliegende Finanzinstrument heißt **Basiswert** oder **Underlying**.

Der *Käufer* (long position) eines Futures profitiert dabei in dem Fall, dass das Underlying zum Ausübungszeitpunkt einen höheren Wert als den vereinbarten Ausübungspreis besitzt, da in diesem Fall das Underlying zum geringeren Preis gekauft und zum höheren „Marktpreis" verkauft werden kann. Der *Verkäufer* (short position) profitiert im genau gegenteiligen Fall.

Üblicherweise wird bei Futures der Ausübungspreis dergestalt festgelegt, dass der Preis des Futures (zum Zeitpunkt 0) Null ist.

Es folgt die **mathematische Definition** eines Futures[2]:

Definition 2.2 *Ein **Future** ist ein Paar $\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{Fut}}$, wobei U eine Funktion $U:\Omega\to\mathbb{R}$ (genannt das **Underlying**) und $\tilde{K}$ eine positive reelle Zahl (genannt der **Strike**) ist. Der zugehörige Preisprozess $S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{Fut}}}$ besitzt das **Auszahlungsprofil***

$$S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{Fut}}}(n,.) := U(.) - \tilde{K}\mathbf{1},$$

wobei $\mathbf{1}$ die Eins-Funktion auf Ω bezeichnet.

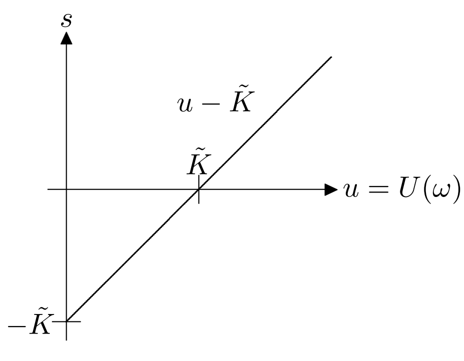


Abbildung 2.1: Auszahlungsprofil eines Futures in Abhängigkeit vom Wert des Underlyings

[1] Futures und Forwards unterscheiden sich im Wesentlichen in der Art der Geschäftsabwicklung – der Futures-Handel ist erheblich stärker standardisiert und reglementiert als der Forwards-Handel. Aus mathematischer Sicht ergeben sich daraus keine Unterschiede in der Behandlung.

[2] Da mathematisch zwischen Futures und Forwards nicht unterschieden zu werden braucht, wird im Folgenden lediglich von Futures gesprochen.

Bemerkungen:

1. Die obige Definition betrachtet einen Future aus der „long position", d.h. aus der Sicht des *Käufers*. Der Preisprozess aus Sicht des *Verkäufers* (der „short position") wäre dann $-S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\text{Fut}}}$.

2. Im Folgenden gelte folgende **Vereinbarung:** Wenn nicht anders angegeben, werden Preisprozesse **stets aus Sicht der „long position"** betrachtet.

3. Als Underlying werden üblicherweise Auszahlungsprofile anderer Finanzinstrumente (beispielsweise einer Aktie) herangezogen.

4. Der Ausübungszeitpunkt n eines Futures entspricht üblicherweise dem Zeithorizont des jeweils betrachteten Marktmodells.

5. Wie bereits oben erwähnt, wird bei einem Future üblicherweise der Strike $\tilde{K}$ so gewählt, dass

$$S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\text{Fut}}}(0) \;\equiv\; 0$$

gilt.

2.1.2.2 Europäische Call-Option

Bemerkung: „Europäische" Wertpapiere sind dadurch gekennzeichnet, dass eine Auszahlung ausschließlich zum letzten Handelszeitpunkt n erfolgt. „Amerikanische" Wertpapiere können Auszahlungen zu jedem beliebigen Handelszeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ realisieren. Der Handel mit Europäischen oder Amerikanischen Wertpapieren ist – selbstverständlich – nicht auf europäische oder amerikanische Handelsplätze beschränkt.

Aus **wirtschaftswissenschaftlicher Sicht** hat der *Käufer* (*long position*) einer **Europäischen Call-Option** das **Recht** (aber im Gegensatz zum Future nicht die Pflicht), ein bestimmtes Finanzinstrument (*underlying*) zu einem festgelegten Zeitpunkt (Ausübungszeitpunkt, Fälligkeit, *maturity*) zu einem bei Vertragsabschluss festgelegten Preis (Basispreis, Ausübungspreis, *exercise price, strike (price)*) zu **kaufen**. Demgegenüber hat der *Verkäufer* (*short position*) einer Europäischen Call-Option die **Pflicht**, auf Wunsch des Käufers das Finanzinstrument zum Ausübungszeitpunkt zu dem festgelegten Preis zu liefern.

Bemerkungen:

1. Der Käufer einer Call-Option wird sein Kaufrecht sicherlich nur dann ausüben, wenn der Wert des Underlyings zum Ausübungszeitpunkt *höher* ist als der festgelegte Ausübungspreis, da in diesem Fall das Underlying zum geringeren Ausübungspreis gekauft und zum höheren Marktpreis verkauft werden kann.

2. Der Preis (z. Ztpkt. 0) einer Call-Option ist stets positiv, da das Auszahlungsprofil einer Option aufgrund des Wahlrechts stets nichtnegativ ist. Eine rational nachvollziehbare Bestimmung des Preises einer Option war erstmals Anfang der 70er mit Hilfe der **Black-Scholes-Formel** möglich (siehe Kapitel „Stochastische Finanzmathematik in stetiger Zeit"). Das Problem der Preisbestimmung für eine Option ist demnach als das grundlegende **Ausgangsproblem** der modernen Finanzmathematik anzusehen.

Definition 2.3 *Eine* ***Europäische Call-Option*** *ist ein Paar* $\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{ECO}}$*, wobei* U *eine Funktion* $U:\Omega\to\mathbb{R}$ *(genannt das* ***Underlying****) und* $\tilde{K}$ *eine positive reelle Zahl (genannt der* ***Strike****) ist. Der zugehörige Preisprozess* $S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{ECO}}}$ *besitzt das* ***Auszahlungsprofil***

$$S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{ECO}}}(n,.) \;:=\; \left(U(.)-\tilde{K}\mathbf{1}\right)^{+}.$$

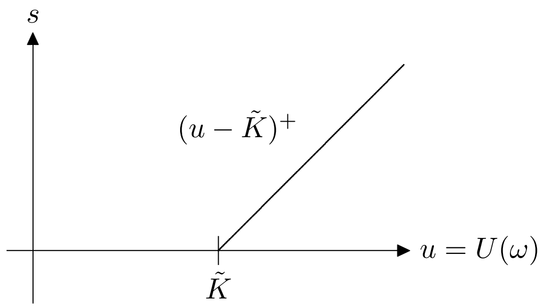


Abbildung 2.2: Auszahlungsprofil einer Europäischen Call-Option in Abhängigkeit vom Wert des Underlyings

Bemerkungen:

1. Aus praktischer Sicht realisiert der Käufer einer Call-Option erst im Fall $U(\omega)-\tilde{K} > S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{ECO}}}(0,\omega)$ Gewinn, d.h., wenn die tatsächliche Auszahlung der Option z. Ztpkt. n den Preis der Option z. Ztpkt. 0 übersteigt. Der Wert $\tilde{K}+S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{ECO}}}(0,\omega)$ wird auch als **break-even-point** bezeichnet.

2. Umgekehrt entspricht der größtmögliche Verlust aus Sicht des Käufers genau dem Preis der Option z. Ztpkt. 0 (nämlich für den Fall, dass die Option im Fall $U(\omega)\le\tilde{K}$ nicht ausgeübt wird).

3. Selbst wenn der break-even-point noch nicht erreicht sein sollte, wird der Käufer einer Call-Option sein Kaufrecht im Fall $U(\omega)>\tilde{K}$ stets ausüben, um die Kosten für den Kauf der Option ggf. wenigstens teilweise auszugleichen.

4. Eine Call-Option heißt $\begin{cases} \textbf{out of the money} & \text{falls } U(\omega) \ll \tilde{K} \\ \textbf{in the money} & \text{falls } U(\omega) \gg \tilde{K}, \\ \textbf{at the money} & \text{falls } U(\omega) \approx \tilde{K} \end{cases}$

   wobei „$\ll$“ („deutlich kleiner“), „$\gg$“ („deutlich größer“) und „$\approx$“ („ungefähr“) mathematisch nicht näher spezifiert sind.

5. Der Wert einer Option zum Zeitpunkt $t < n$ setzt sich zusammen aus dem sogenannten **inneren Wert**, der sich aus dem Wert des Preisprozesses des Underlyings z. Ztpkt. t im Bezug zum Strike $\tilde{K}$ ergibt, und dem sogenannten **Zeitwert**, der die zukünftige Möglichkeit des positiven Gewinns bewertet.

2.1.2.3 Europäische Put-Option

Bei einer Put-Option handelt es sich um eine **Verkaufsoption**, Aus **wirtschaftswissenschaftlicher Sicht** hat der *Käufer* (*long position*) einer **Europäischen Put-Option** das **Recht** (aber nicht die Pflicht), ein bestimmtes Finanzinstrument (*underlying*) zu einem festgelegten Zeitpunkt (Ausübungszeitpunkt, Fälligkeit, *maturity*) zu einem bei Vertragsabschluss festgelegten Preis (Basispreis, Ausübungspreis, *exercise price, strike (price)*) zu **verkaufen**. Demgegenüber hat der *Verkäufer* (*short position*) einer Europäischen Put-Option die **Pflicht**, auf Wunsch des Käufers das Finanzinstrument zum Ausübungszeitpunkt zu dem festgelegten Preis zu kaufen.

Bemerkung: Der Käufer einer Put-Option wird sein Verkaufsrecht sicherlich nur dann ausüben, wenn der Wert des Underlyings zum Ausübungszeitpunkt *niedriger* ist als der festgelegte Ausübungspreis. In diesem Fall wird er das Underlying zum niedrigeren Marktpreis kaufen und dem Verkäufer der Put-Option zum höheren Strike verkaufen.

Definition 2.4 *Eine **Europäische Put-Option** ist ein Paar* $\left(U, \tilde{K}\right)_{\mathrm{EPO}}$*, wobei* U *eine Funktion* $U : \Omega \to \mathbb{R}$ *(genannt das **Underlying**) und* $\tilde{K}$ *eine positive reelle Zahl (genannt der **Strike**) ist. Der zugehörige Preisprozess* $S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{EPO}}}$ *besitzt das **Auszahlungsprofil***

$$S_{\left(U,\tilde{K}\right)_{\mathrm{EPO}}}(n,.) \;:=\; \left(\tilde{K}\mathbf{1} - U(.)\right)^{+}.$$

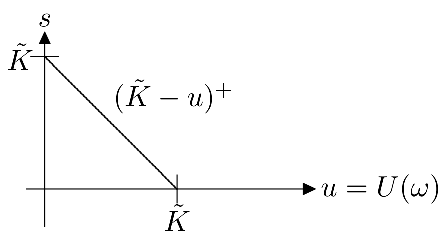


Abbildung 2.3: Auszahlungsprofil einer Europäischen Put-Option in Abhängigkeit vom Wert des Underlyings

Bemerkungen:

1. Die Bemerkungen zu Europäischen Call-Optionen gelten analog auch für Europäische Put-Optionen – jeweils von der anderen „Seite" des Strikes aus gesehen.
2. Optionen und Futures dienen nicht nur spekulativen Zwecke, sondern eignen sich insbesondere auch zur Absicherung (*hedging*) von Kursschwankungen.
3. Europäische Call- bzw. Put-Optionen werden (umgangssprachlich) auch als **Plain Vanilla Optionen** bezeichnet.
4. Durch additive Kombination der Auszahlungsprofile zweier Europäischer Optionen (Call/Put in long/short position) lassen sich weitere Auszahlungsprofile mit speziellen Eigenschaften erzeugen (sogenannte *Spreads* oder *Straddles*).

Übungsaufgaben:

1. Erläutern Sie das folgende Zitat von Serge Demoliére[3]: „Welcher Laie wird wohl je verstehen, dass der Verkäufer der Verkaufsoption bei der Ausübung der Verkaufsoption durch den Käufer der Verkaufsoption der Käufer der von dem Käufer der Verkaufsoption verkauften Wertpapiere ist."
2. Informieren Sie sich in der einschlägigen Literatur über *Spreads* und *Straddles* und untersuchen Sie deren Eigenschaften.

2.1.2.4 Asiatische Optionen

Aus **wirtschaftswissenschaftlichen Sicht** ähneln die **Asiatischen Optionen** den Europäischen Optionen, wobei das Underlying aus dem *Durchschnitt* eines Preisprozesses S zu bestimmten Zeitpunkten $\tilde{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}$ gebildet wird.

Definition 2.5 *Eine **Asiatische Call- bzw. Put-Option** ist ein Tupel $\left(S, \tilde{\mathbb{T}}, \tilde{K}\right)_{\text{AsCO}}$ bzw. $\left(S, \tilde{\mathbb{T}}, \tilde{K}\right)_{\text{AsPO}}$, wobei S ein Preisprozess, $\tilde{\mathbb{T}} \subset \mathbb{T}$ mit $\left|\tilde{\mathbb{T}}\right| < \infty$ eine Menge von Handelszeitpunkten sowie $\tilde{K}$ eine positive reelle Zahl ist. Die zugehörigen Preisprozesse $S_{\left(S,\tilde{\mathbb{T}},\tilde{K}\right)_{\text{AsCO}}}$ bzw. $S_{\left(S,\tilde{\mathbb{T}},\tilde{K}\right)_{\text{AsPO}}}$ besitzen die **Auszahlungsprofile***

$$S_{\left(S,\tilde{\mathbb{T}},\tilde{K}\right)_{\text{AsCO}}}(n,.) := \left(\frac{1}{|\tilde{\mathbb{T}}|}\sum_{t\in\tilde{\mathbb{T}}} S(t,.) - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ = S_{\left(\frac{1}{|\tilde{\mathbb{T}}|}\sum_{t\in\tilde{\mathbb{T}}} S(t,.),\tilde{K}\right)_{\text{ECO}}}(n,.) \quad \text{bzw.}$$
$$S_{\left(S,\tilde{\mathbb{T}},\tilde{K}\right)_{\text{AsPO}}}(n,.) := \left(\tilde{K}\mathbf{1} - \frac{1}{|\tilde{\mathbb{T}}|}\sum_{t\in\tilde{\mathbb{T}}} S(t,.)\right)^+ = S_{\left(\frac{1}{|\tilde{\mathbb{T}}|}\sum_{t\in\tilde{\mathbb{T}}} S(t,.),\tilde{K}\right)_{\text{EPO}}}(n,.).$$

[3] derzeitiges Vorstandsmitglied der Landesbank Berlin

2.1.2.5 Barrier-Optionen

- Auszahlungsprofile wie bei den Europäischen Optionen, wobei nur dann eine Auszahlung erfolgt, wenn der zugrunde liegende Preisprozess S eine vorgegebene Schranke $\tilde{B}$ erreicht oder nicht

  Dabei unterscheidet man folgende Varianten:

  - **Knock-out Optionen** mit den Spezialfällen **down-and-out** (d&o) bzw. **up-and-out** (u&o): Nullauszahlung, falls untere bzw. obere Schranke erreicht wird
  - **Knock-in Optionen** mit den Spezialfällen **down-and-in** (d&i) bzw. **up-and-in** (u&i): Nullauszahlung, falls untere bzw. obere Schranke *nicht* erreicht wird
  - Jeweils Ausprägungen als Call- oder Put-Option möglich

- Mathematische Beschreibung durch ein Tripel $\left(S, \tilde{B}, \tilde{K}\right)$ (zugrundeliegender Preisprozess S sowie $\tilde{B}, \tilde{K} > 0$) mit den jeweiligen Bezeichnungsindizes $\mathrm{d\&oCO}$, $\mathrm{d\&oPO}$, $\ldots$, $\mathrm{u\&iCO}$, $\mathrm{u\&iPO}$ und zugehörige Preisprozesse mit den Auszahlungsprofilen (Auswahl)[4]

$$S_{(S,\tilde{B},\tilde{K})_{\mathrm{d\&oCO}}}(n,.) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \min\limits_{t\in\mathbb{T}} S(t,.) \leq \tilde{B} \\ \left(S(n,.) - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \min\limits_{t\in\mathbb{T}} S(t,.) \leq \tilde{B} \\ S_{\left(S(n,.),\tilde{K}\right)_{\mathrm{ECO}}}(n,.) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$S_{(\bar{S},\tilde{B},\tilde{K})_{\mathrm{u\&iPO}}}(n,.) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \max\limits_{t\in\mathbb{T}} S(t,.) < \tilde{B} \\ \left(\tilde{K}\mathbf{1} - S(n,.)\right)^+ & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \max\limits_{t\in\mathbb{T}} S(t,.) < \tilde{B} \\ S_{\left(S(n,.),\tilde{K}\right)_{\mathrm{EPO}}}(n,.) & \text{sonst} \end{cases}$$

2.1.2.6 Lookback-Optionen

- Lookback-Optionen ähneln den Europäischen Optionen, wobei der (zufallsabhängige) Strike durch das Minimum (bei einem Lookback Call) bzw. das Maximum (bei einem Lookback Put) des Preisprozesses S des Underlyings bestimmt wird.

- Mathematische Beschreibung durch das Ein-Tupel $\left(S\right)_{\mathrm{LbCO}}$ bzw. $\left(S\right)_{\mathrm{LbPO}}$ (zugrundeliegender Preisprozess S) und zugehörige Preisprozesse mit den Auszahlungsprofilen

$$S_{\left(S\right)_{\mathrm{LbCO}}}(n,.) := S(n,.) - \min_{t\in\mathbb{T}} S(t,.) \quad \text{bzw.} \quad S_{\left(S\right)_{\mathrm{LbPO}}}(n,.) := \max_{t\in\mathbb{T}} S(t,.) - S(n,.)$$

[4] Dabei wird Existenz von $\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S(t,.)$ bzw. $\max\limits_{t\in\mathbb{T}} S(t,.)$ vorausgesetzt.

2.2 Einperioden-Marktmodell mit endlich vielen Zuständen

Literatur:

- Jürgen Kremer, Einführung in die Diskrete Finanzmathematik [7]
- Alison Etheridge, A Course in Financial Calculus [4]

Vereinfachungen des Modells gegenüber der Realität:

- Keine Transaktionskosten
- Keine Dividendenzahlungen
- Kauf/Verkauf von Finanzinstrumenten in beliebigen (reellwertigen) Stückzahlen möglich
- Kein Preisunterschied zwischen Kauf und Verkauf (kein *bid-ask-spread*)

2.2.1 Grundlagen

Definition 2.6 *Ein* ***Einperioden-Marktmodell mit*** $K \in \mathbb{N}$ ***Zuständen*** *(Bezeichnung:* EPM$_K$*) ist ein Tupel* $\left(n, \mathbb{T}, \Omega, S^1, \dots, S^N\right)$ *mit*

- ***Zeithorizont*** $n \in \mathbb{R}_{>0}$
- ***Menge von Handelszeitpunkten*** $\mathbb{T} = \{0, n\}$
- ***Zustandsmenge*** $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$, $K \in \mathbb{N}$
- N ***Preisprozessen*** $S^1, \dots, S^N : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *mit*

$$S^1(0,.) \equiv b_1, \ \dots, \ S^N(0,.) \equiv b_N \quad (b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R})$$

Bemerkungen:

1. Das EPM$_K$ enthält alle wesentlichen Komponenten eines Marktmodells gemäß den Bemerkungen am Anfang dieses Kapitels. In diesem speziellen Fall wird jedoch auf den Preisprozess S^0 zur Vereinfachung der kommenden Betrachtungen verzichtet. Dessen Rolle als „Diskontierungsprozess“ wird später S^1 einnehmen.
2. Die Preisprozesse sind *nicht* auf die Preisprozesse von Basiswertpapieren (Aktien und Anleihen) eingeschränkt.
3. Der konkrete Wert des Zeithorizonts n ist für die weiteren Betrachtungen nicht von Interesse.

4. Die Werte $b_1 \ldots, b_N$ sind die (auf Ω konstanten) Preise der Preisprozesse z. Ztpkt. 0. Sie lassen sich in einem Vektor

$$\boldsymbol{b} \ := \ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{R}^N$$

zusammenfassen.

5. Die Auszahlungsprofile der Preisprozesse (d.h. die Werte z. Ztpkt. n) lassen sich mittels einer $N \times K$-Matrix

$$\boldsymbol{D} \ := \ \begin{pmatrix} D_{11} & \ldots & D_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ D_{N1} & \ldots & D_{NK} \end{pmatrix} \ := \ \begin{pmatrix} S^1(n,\omega_1) & \ldots & S^1(n,\omega_K) \\ \vdots & & \vdots \\ S^N(n,\omega_1) & \ldots & S^N(n,\omega_K) \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{R}^{N\times K}$$

beschreiben.

6. Ein EPM$_K$ ist demnach ebenso durch ein Paar $\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ mit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$ und $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{N\times K}$ bestimmt.

2.2.2 Portfolio und Wert eines Portfolios

Definition 2.7 *Gegeben sei ein* EPM$_K\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ *mit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^N$ *und* $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{N\times K}$. *Dann heißt ein* N*-dimensionaler Vektor*

$$\boldsymbol{h} \ := \ \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{R}^N$$

ein ***Portfolio****. Für ein Portfolio* $\boldsymbol{h}$ *heißt*

$$V_0(\boldsymbol{h}) \ := \ \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{b} \ = \ \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot b_i \ \in \ \mathbb{R}$$

der ***Wert des Portfolios*** $\boldsymbol{h}$ ***z. Ztpkt.*** 0 *und*

$$\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \ := \ \begin{pmatrix} V_n^1(\boldsymbol{h}) \\ \vdots \\ V_n^K(\boldsymbol{h}) \end{pmatrix} \ := \ \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^1 \cdot \boldsymbol{h} \\ \vdots \\ \boldsymbol{D}^K \cdot \boldsymbol{h} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^N D_{i1} h_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^N D_{iK} h_i \end{pmatrix} \ = \ \boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h} \ \in \ \mathbb{R}^K$$

der ***Wertvektor des Portfolios*** $\boldsymbol{h}$ ***z. Ztpkt.*** n.

Bemerkungen:

1. Wirtschaftswissenschaftlich bezeichnet ein Portfolio eine Sammlung von Finanzinstrumenten, d.h., den Besitz einer bestimmten Anzahl von Finanzinstrumenten. Mathematisch von Interesse ist dabei lediglich die jeweilige „Stückzahl“ h_i $(i = 1, \ldots, N)$ des zum Preisprozess S^i gehörenden Finanzinstruments (im Folgenden kurz als „Finanzinstrument i“ bezeichnet).

2. $h_i \geq 0$ entspricht dem *Kauf* von h_i Einheiten des Finanzinstruments i z. Ztpkt. 0, $h_i < 0$ dem *Verkauf* von $-h_i$ Einheiten des Finanzinstruments i z. Ztpkt. 0.

3. Im EPM$_K$ findet keine Änderung des Portfolios statt, d.h., z. Ztpkt. n werden immer noch dieselben Anteile von Finanzinstrumenten gehalten wie z. Ztpkt. 0.

4. $V_0(\boldsymbol{h})$: Kapital, das für den Kauf des Portfolios $\boldsymbol{h}$ aufzuwenden ist

   $V_0(\boldsymbol{h}) < 0$: Kapitaleinnahme in Höhe von $-V_0(\boldsymbol{h})$ bei Zusammenstellung des Portfolios $\boldsymbol{h}$ z. Ztpkt. 0

5. $V_n^j(\boldsymbol{h})$ $(j = 1, \ldots, K)$: Wert des Portfolios $\boldsymbol{h}$ z. Ztpkt. n im Zustand ω_j (Gewinn, der im Zustand ω_j bei Verkauf des Portfolios $\boldsymbol{h}$ erzielt wird)

   $V_n^j(\boldsymbol{h}) < 0$: Zahlungsverpflichtung in Höhe von $-V_n^j(\boldsymbol{h})$ im Zustand ω_j z. Ztpkt. n

2.2.3 Arbitrage und Arbitragefreiheit

- Wirtschaftswissenschaftlich bezeichnet eine Arbitrage die Möglichkeit eines risikolosen Gewinns.

- In der Realität existieren Arbitragen üblicherweise nur kurze Zeit, da diese auf Preisunterschieden beruhen, die durch Marktmechanismen (verstärkter Kauf oder Verkauf) schnell ausgeglichen werden.

- Von einem „vernünftigen“ theoretischen Marktmodell ist zu erwarten, dass es Arbitragen ausschließt.

- Der Begriff der „Arbitragefreiheit“ wird sich im Folgenden als von entscheidender Bedeutung für die Bestimmung eines „vernünftigen“ Preises für ein Finanzinstrument herausstellen.

Definition 2.8 *Ein Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ heißt eine* ***Arbitrage*** *im* EPM$_K\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$*, falls*

$V_0(\boldsymbol{h}) \leq 0$ *und* $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) > \boldsymbol{0}^K$ *(„Arbitrage Typ I“)*

oder

$V_0(\boldsymbol{h}) < 0$ *und* $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq \boldsymbol{0}^K$, *(„Arbitrage Typ II“)*

d.h. $\boxed{\begin{pmatrix} -V_0(\boldsymbol{h}) \\ \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \end{pmatrix} > \boldsymbol{0}^{K+1},}$

gilt. Ein EPM$_K\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ *heißt* ***arbitragefrei****, falls in ihm keine Arbitrage existiert.*

Bemerkungen:

1. Zur Interpretation: Liegt eine Arbitrage Typ I vor, braucht z. Ztpkt. 0 kein Kapital zum Erwerb des Portfolios eingesetzt zu werden, und z. Ztpkt. n besteht keine Zahlungsverpflichtung, wobei in mindestens einem zukünftigen Zustand Gewinn erzielt wird.

   Bei einer Arbitrage Typ II wird z. Ztpkt. 0 eine Kapitaleinnahme beim Zusammenstellen des Portfolios realisiert, und z. Ztpkt. n besteht keine Zahlungsverpflichtung.

2. Der möglicherweise nahe liegende Gedanke, eine Arbitrage allgemeiner durch

   $$V_0(\boldsymbol{h}) \cdot \boldsymbol{1}^K \;<\; \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})$$

   zu definieren, ist jedoch nicht sinnvoll: In diesem Fall würde in jedem EPM$_K$, das eine Anleihe enthält, deren Preis (realistischerweise) geringer als der Nominalwert ist, eine Arbitrage existieren.

   Letztlich ist die Arbitragefreiheit dadurch gekennzeichnet, dass kein Preisprozess einen anderen „dominiert" (z.B. dass bei gleichem Preis ein „günstigeres" Auszahlungsprofil existiert).

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung lässt sich eine Arbitrage jedoch einfacher charakterisieren:

Lemma 2.9 *Gegeben sei ein* EPM$_K\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$*. Falls es ein Portfolio* $\boldsymbol{h}_+ \in \mathbb{R}^N$ *mit*

$$V_0(\boldsymbol{h}_+) \;>\; 0 \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}_+) \;>\; \boldsymbol{0}^K$$

gibt, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es gibt in $\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ *eine Arbitrage.*

(ii) Es gibt ein Portfolio $\tilde{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^N$ *mit*

$$V_0(\tilde{\boldsymbol{h}}) \;=\; 0 \quad \textit{und} \quad \boldsymbol{V}_n(\tilde{\boldsymbol{h}}) \;>\; \boldsymbol{0}^K.$$

Beweis: (ii) $\Longrightarrow$ (i): Offensichtlich, da in (ii) ein Spezialfall der Arbitrage Typ I vorliegt.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ eine Arbitrage. Da aus $V_0(\boldsymbol{h}) = 0$ sofort (ii) folgt, braucht lediglich $V_0(\boldsymbol{h}) < 0$ (und folglich $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq \boldsymbol{0}^K$, „Arbitrage Typ II") betrachtet zu werden.

Wegen $V_0(\boldsymbol{h}_+) > 0$ (n.V.) gibt es in diesem Fall ein $\lambda > 0$ (nämlich $\lambda := -\dfrac{V_0(\boldsymbol{h})}{V_0(\boldsymbol{h}_+)}$), für das

$$V_0(\boldsymbol{h}) + \lambda \cdot V_0(\boldsymbol{h}_+) \;=\; 0$$

gilt. Wegen

$$V_0(\boldsymbol{h}) + \lambda \cdot V_0(\boldsymbol{h}_+) \;=\; \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h} + \lambda \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h}_+ \;=\; \boldsymbol{b} \cdot \Big(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{h}_+\Big) \;=\; V_0(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{h}_+)$$

ist somit

$$V_0(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{h}_+) \;=\; 0.$$

Es verbleibt demnach,

$$\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{h}_+) \;>\; \boldsymbol{0}^K$$

zu zeigen: Wegen $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}_+) > \boldsymbol{0}^K$ und $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq \boldsymbol{0}^K$ folgt dies jedoch unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{h}_+) \;&=\; \boldsymbol{D}^T \bullet \Big(\boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{h}_+\Big) \;=\; \boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h} + \lambda \cdot \boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h}_+ \\ &=\; \underbrace{\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})}_{\geq \boldsymbol{0}^K} + \underbrace{\lambda}_{>0} \cdot \underbrace{\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}_+)}_{>\boldsymbol{0}^K} \;>\; \boldsymbol{0}^K, \end{aligned}$$

d.h., das Portfolio $\tilde{\boldsymbol{h}} := \boldsymbol{h} + \lambda \boldsymbol{h}_+$ leistet das Gewünschte. ■

Bemerkung: Die Voraussetzung von Lemma 2.9 ist insbesondere dann erfüllt, wenn $\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ ein Finanzinstrument $i \in \{1, \dots, N\}$ mit $b_i > 0$ und $\boldsymbol{D}_i > \boldsymbol{0}^K$ enthält: In diesem Fall leistet das Portfolio $\boldsymbol{h}_+ := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ mit der „1" an der i-ten Stelle das Gewünschte. Im Speziellen gilt dies, wenn ein Finanzinstrument mit streng positivem Preisprozess vorliegt.

Das folgende Lemma enthält eine für die weiteren Betrachtungen wichtige Folgerung aus der Arbitragefreiheit eines EPM_K:

Lemma 2.10 *In einem arbitragefreien* $\text{EPM}_K\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ *gilt*[5]

$$\ker \boldsymbol{D}^T \;\perp\; \boldsymbol{b}, \quad \textit{d.h.} \;\; V_0(\boldsymbol{h}) = 0 \;\; \textit{für alle} \;\; \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N \;\; \textit{mit} \;\; \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{0}^K.$$

Beweis: Indirekt: Angenommen, es gäbe ein Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ mit $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{0}^K$, aber $V_0(\boldsymbol{h}) \neq 0$. Für den Fall $V_0(\boldsymbol{h}) < 0$ wäre dann $\boldsymbol{h}$ eine Arbitrage Typ II, ansonsten wäre $-\boldsymbol{h}$ eine Arbitrage Typ II. Widerspruch! ■

Bemerkung: Die Umkehrung dieses Lemmas gilt nicht immer: Insbesondere im Fall $\ker \boldsymbol{D}^T = \{\boldsymbol{0}^N\}$ gilt stets $\ker \boldsymbol{D}^T \perp \boldsymbol{b}$, allerdings ist zum Beispiel für $\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ mit $\boldsymbol{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{D} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ das Portfolio $\boldsymbol{h} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Arbitrage Typ I.

Übungsaufgabe: Finden Sie ein weiteres Beispiel für den Fall $\ker \boldsymbol{D}^T \neq \{\boldsymbol{0}^N\}$.

[5]Zu Grundlagen der linearen Algebra siehe Abschnitt B.1.

Die folgenden beiden Sätze stellen eine erste Beziehung zwischen der Arbitragefreiheit eines EPM$_K$ $\big(\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{D}\big)$ und der Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{D}\psi = \boldsymbol{b}$ her:

Satz 2.11 *In einem arbitragefreien* EPM$_K\big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\big)$ *gilt*

$$\boldsymbol{b} \;\in\; \operatorname{Im} \boldsymbol{D}, \quad \textit{d.h., es gibt einen Vektor } \psi \in \mathbb{R}^K \;\; \textit{mit} \;\; \boldsymbol{D}\psi = \boldsymbol{b}.$$

Beweis: Aus der Arbitragefreiheit folgt gemäß Lemma 2.10 $\boldsymbol{b} \perp \ker \boldsymbol{D}^T$. Nun ist aber auch – siehe (B.1) und (B.2) –

$$\ker \boldsymbol{D}^T \;\perp\; \operatorname{Im} \boldsymbol{D} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{R}^N \;=\; \ker \boldsymbol{D}^T \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{D}.$$

Daraus folgt, dass jeder Vektor, der orthogonal zu $\ker \boldsymbol{D}^T$ ist, in $\operatorname{Im} \boldsymbol{D}$ enthalten ist, so auch $\boldsymbol{b}$.

∎

Satz 2.12 *Gegeben sei ein* EPM$_K\big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\big)$*. Gibt es einen Vektor $\psi \gg \mathbf{0}^K$, für den $\boldsymbol{D}\psi = \boldsymbol{b}$ gilt, so folgt daraus die Arbitragefreiheit von $\big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\big)$.*

Beweis: Sei $\psi \gg \mathbf{0}^K$ eine Lösung des LGS $\boldsymbol{D}\psi = \boldsymbol{b}$. Dann gilt für jedes Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} V_0(\boldsymbol{h}) \;&=\; \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h} \;=\; \boldsymbol{b}^T \bullet \boldsymbol{h} \;=\; (\boldsymbol{D} \bullet \psi)^T \bullet \boldsymbol{h} \;=\; (\psi^T \bullet \boldsymbol{D}^T) \bullet \boldsymbol{h} \\ &=\; \psi^T \bullet (\boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot (\boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}). \end{aligned}$$

Im Fall $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) > \mathbf{0}^K$ („beinahe“ Arbitrage Typ I) ergibt sich wegen $\psi \gg \mathbf{0}^K$

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \;>\; 0,$$

d.h., in diesem Fall liegt keine Arbitrage vor.
Im Fall $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq \mathbf{0}^K$ („beinahe“ Arbitrage Typ II) ergibt sich analog

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \;\geq\; 0,$$

d.h., auch in diesem Fall liegt keine Arbitrage vor.
In allen anderen Fällen für $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})$ kann offensichtlich ebenfalls keine Arbitrage vorliegen. ∎

Satz 2.13 (1. Fundamentalsatz) *Ein* EPM$_K\big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\big)$ *ist genau dann arbitragefrei, wenn eine Lösung $\psi \in \mathbb{R}^K$ des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{D}\psi = \boldsymbol{b}$ mit $\psi \gg \mathbf{0}^K$ existiert.*

Beweis: Siehe Abschnitt B.2.

Bemerkung: Ein solcher Vektor $\psi \gg \mathbf{0}^K$ heißt **Zustandspreisvektor** (*state price vector*). Interpretation erfolgt im nächsten Abschnitt.

2.2.4 Replizierbare Auszahlungsprofile

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass ein Wertvektor z. Ztpkt. n (z.B. das Auszahlungsprofil einer Option) bekannt ist, nicht aber dessen Preis z. Ztpkt. 0. Entscheidend dabei ist zunächst die Frage, ob es ein Portfolio gibt, das diesen Wertvektor „nachbilden“ kann.

Definition 2.14 *Gegeben sei ein* $\text{EPM}_K\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ *mit* $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^N$ *und* $\boldsymbol{D}\in\mathbb{R}^{N\times K}$*. Dann heißt ein* K*-dimensionaler Vektor*

$$\boldsymbol{c} \;:=\; \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_K \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^K$$

ein ***Auszahlungsprofil*** *(*claim*).*

Ein Auszahlungsprofil $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^K$ *heißt* ***replizierbar*** *(erreichbar, absicherbar,* attainable*), wenn*

$$\boldsymbol{c}\in\operatorname{Im}\boldsymbol{D}^T$$

gilt (d.h. $\exists\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^N$*, so dass* $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{h}=\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})$*).*

Ein Portfolio $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^N$*, für das*

$$\boldsymbol{c} \;=\; \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})$$

gilt, heißt ***replizierendes Portfolio*** *(*hedge*) für das Auszahlungsprofil* $\boldsymbol{c}$*.*

Die Menge

$$H(\boldsymbol{c}) \;:=\; \Big\{\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^N \mid \boldsymbol{c}=\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})\Big\}$$

wird als ***Menge der replizierenden Portfolios von*** $\boldsymbol{c}$ *bezeichnet.*

Bemerkung: Gibt es für ein Auszahlungsprofil $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^K$ ein replizierendes Portfolio $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^N$, lässt sich für dieses Portfolio stets ein Preis $V_0(\boldsymbol{h})$ z. Ztpkt. 0 angeben. Da das replizierende Portfolio allerdings nicht eindeutig bestimmt sein muss, stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen dann wenigstens der Preis von unterschiedlichen replizierenden Portfolios (selbstverständlich für dasselbe Auszahlungsprofil $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^K$!) eindeutig bestimmt ist.

Satz 2.15 *Gegeben seien ein* $\text{EPM}_K\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ *und ein replizierbares Auszahlungsprofil* $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^K$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Für alle* $\boldsymbol{h},\tilde{\boldsymbol{h}}\in H(\boldsymbol{c})$ *gilt* $V_0(\boldsymbol{h})=V_0(\tilde{\boldsymbol{h}})$*.*
2. *Es gilt* $\ker\boldsymbol{D}^T\perp\boldsymbol{b}$*.*

Beweis: Sei $\hat{\boldsymbol{h}}$ eine spezielle Lösung von $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{h}$. Dann ist auch $\hat{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{f}$ für jedes $\boldsymbol{f} \in \ker \boldsymbol{D}^T$ eine Lösung dieses LGS, da

$$\boldsymbol{D}^T \bullet (\hat{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{f}) \;=\; \boldsymbol{D}^T\hat{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{f} \;=\; \boldsymbol{D}^T\hat{\boldsymbol{h}} + \boldsymbol{0}^K \;=\; \boldsymbol{D}^T\hat{\boldsymbol{h}}$$

ist. Somit gilt für alle $\boldsymbol{h}, \tilde{\boldsymbol{h}} \in H(\boldsymbol{c})$ stets

$$\boldsymbol{h} - \tilde{\boldsymbol{h}} \in \ker \boldsymbol{D}^T.$$

Außerdem ist

$$V_0(\boldsymbol{h}) - V_0(\tilde{\boldsymbol{h}}) \;=\; \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{h} - \tilde{\boldsymbol{h}}) \;=\; 0$$

genau dann, wenn $\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{h} - \tilde{\boldsymbol{h}})$ gilt. Da $\boldsymbol{h} - \tilde{\boldsymbol{h}}$ jeder beliebige Vektor $\boldsymbol{f} \in \ker \boldsymbol{D}^T$ sein kann, folgt daraus die Behauptung. ∎

Es zeigt sich, dass insbesondere die Arbitragefreiheit hinreichend für die Eindeutigkeit des Preises eines Auszahlungsprofils ist:

Satz 2.16 („Law of One Price") *Es seien $\left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\right)$ ein arbitragefreies* EPM$_K$ *mit Zustandspreisvektor $\psi \gg \boldsymbol{0}^K$ sowie $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^K$ ein replizierbares Auszahlungsprofil. Dann gilt:*

1. *Sind sowohl $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ als auch $\tilde{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^N$ replizierende Portfolios von $\boldsymbol{c}$, so ist*

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; V_0(\tilde{\boldsymbol{h}}).$$

2. *Für jedes Portfolio $\boldsymbol{h} \in H(\boldsymbol{c})$ gilt*

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{c}.$$

Bezeichnung: $c_0(\boldsymbol{c}) := \psi \cdot \boldsymbol{c}$ ***(„Preis des Auszahlungsprofils c")***

3. *Das erweiterte* EPM$_K$ $\left(\tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{D}}\right)$ *mit*

$$\tilde{\boldsymbol{b}} \;:=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ c_0(\boldsymbol{c}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \text{und} \quad \tilde{\boldsymbol{D}} \;:=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{c}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times K}$$

ist ebenfalls arbitragefrei.

Beweis: „1." ist eine direkte Folgerung aus Lemma 2.10 und Satz 2.15.
Zu 2.: Wegen $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{D}\psi$ und $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})$ ergibt sich

$$\begin{aligned} V_0(\boldsymbol{h}) &= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{h} \;=\; \boldsymbol{D}\psi \cdot \boldsymbol{h} \;=\; (\boldsymbol{D} \bullet \psi)^T \bullet \boldsymbol{h} \\ &= (\psi^T \bullet \boldsymbol{D}^T) \bullet \boldsymbol{h} \;=\; \psi \cdot (\boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{c}. \end{aligned}$$

Zu 3.: Wegen $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{D}\psi$ und $c_0(\boldsymbol{c}) = \psi\boldsymbol{c}$ ergibt sich sofort

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{c}^T \end{pmatrix} \bullet \psi \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{D} \bullet \psi \\ \boldsymbol{c}^T \bullet \psi \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \cdot \psi \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ c_0(\boldsymbol{c}) \end{pmatrix},$$

d.h., $\psi \gg \mathbf{0}^K$ ist auch der Zustandspreisvektor des erweiterten EPM$_K$ $\left(\tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{D}}\right)$. Daraus folgt gemäß Satz 2.13 die Arbitragefreiheit von $\left(\tilde{\boldsymbol{b}}, \tilde{\boldsymbol{D}}\right)$. ∎

Bemerkungen:

1. Aus Aussage 2. ergibt sich insbesondere, dass der Preis eines replizierbaren Auszahlungsprofils in einem arbitragefreien EPM$_K$ ohne Kenntnis des replizierenden Portfolios lediglich mit Hilfe eines Zustandspreisvektors $\psi \gg \mathbf{0}^K$ bestimmt werden kann.

2. Mit Hilfe des Preises $c_0(\boldsymbol{c})$ wird das Auszahlungsprofil $\boldsymbol{c}$ zu einem Preisprozess S^{N+1} mit

   $$S^{N+1}(0,.) \equiv c_0(\boldsymbol{c}) \quad \text{und} \quad S^{N+1}(n,.) = \boldsymbol{c}$$

   vervollständigt. Eine Aufnahme dieses Preisprozesses in das EPM$_K$ ist „unschädlich" für die Arbitragefreiheit.

3. Der Preis $c_0(\boldsymbol{c})$ eines Auszahlungsprofils wird auch als **fairer Preis** bezeichnet.

4. Die Preisformel $c_0(\boldsymbol{c}) = \psi \cdot \boldsymbol{c}$ ermöglicht eine unmittelbare **Interpretation des Zustandspreisvektors** ψ: Da sich der faire Preis als Skalarprodukt aus dem Auszahlungsprofil und dem Zustandspreisvektor ergibt, geben die Komponenten des Zustandspreisvektors somit an, mit welchem Gewicht die Komponenten eines Auszahlungsprofils (d.h. die jeweiligen Auszahlungen für die Zustände $\omega_1, \ldots, \omega_K$) in den Preis dieses Auszahlungsprofils eingehen. Speziell für die Auszahlungsprofile

   $$\boldsymbol{c}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{c}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; \boldsymbol{c}^{(K)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (d.h., $\boldsymbol{c}^{(j)}$ beschreibt eine Auszahlung in Höhe von 1 im Zustand ω_j, ansonsten eine Null-Auszahlung) ergibt sich (Arbitragefreiheit vorausgesetzt) für $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_K)^T$

   $$c_0(\boldsymbol{c}^{(j)}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{c}^{(j)} \;=\; \psi_j \quad (j = 1, \ldots, K).$$

2.2.5 Vollständigkeit

Definition 2.17 *Ein* EPM$_K\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ *heißt* ***vollständig*** (complete)*, falls jedes Auszahlungsprofil replizierbar ist, d.h., falls*

$$\operatorname{Im}\boldsymbol{D}^T \;=\; \mathbb{R}^K$$

gilt bzw. $\boldsymbol{D}^T$ *surjektiv ist.*

Satz 2.18 (2. Fundamentalsatz) *Ein arbitragefreies* EPM$_K\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ *ist genau dann vollständig, wenn der Zustandspreisvektor* $\psi\in\mathbb{R}^K$ *(d.h. die Lösung des Gleichungssystems* $\boldsymbol{D}\psi=\boldsymbol{b}$ *mit* $\psi\gg\boldsymbol{0}^K$*) eindeutig bestimmt ist.*

Beweis: Nach Definition ist $\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ genau dann vollständig, wenn $\operatorname{Im}\boldsymbol{D}^T=\mathbb{R}^K$ gilt. Da allgemein

$$\operatorname{rg}\boldsymbol{D} \;=\; \operatorname{rg}\boldsymbol{D}^T \;=\; \dim\operatorname{Im}\boldsymbol{D}^T$$

gilt, ist die Vollständigkeit somit gleichbedeutend mit

$$\operatorname{rg}\boldsymbol{D} \;=\; K,$$

d.h., $\boldsymbol{D}$ besitzt vollen Spaltenrang. Dies wiederum ist gleichbedeutend mit der eindeutigen Lösbarkeit des Gleichungssystems $\boldsymbol{D}\psi=\boldsymbol{b}$ unter der Voraussetzung, dass überhaupt eine Lösung existiert. Diese Voraussetzung ist gemäß Satz 2.13 durch die Arbitragefreiheit gegeben, die sogar die Existenz eines Zustandspreisvektors $\psi\gg\boldsymbol{0}^K$ impliziert. ■

Bemerkung: Aus obigem Beweis ist ersichtlich, dass die Vollständigkeit des EPM$_K\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ äquivalent ist zu $\operatorname{rg}\boldsymbol{D}=K$. In einem vollständigen EPM$_K$ muss daher stets $N\geq K$ („Es gibt mindestens ebenso viele Finanzinstrumente wie Zustände“) gelten, da andernfalls $\operatorname{rg}\boldsymbol{D}\leq N<K$ wäre.

2.2.6 Einperioden-Binomialmodell

Ein Beispiel für ein sehr einfaches EPM$_K$ ist das sogenannte Ein-Perioden-Binomialmodell:

Definition 2.19 *Ein* EPM$_2$ $\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ *heißt ein* ***Einperioden-Binomialmodell*** *mit den reellen Parametern* $d>0$, $u>d$, $r>-1$ *und* $s_0>0$*, falls*

$$\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big) \;=\; \left(\begin{pmatrix}1\\ s_0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1+r & 1+r\\ d\cdot s_0 & u\cdot s_0\end{pmatrix}\right)$$

ist.

Bemerkungen:

1. Ein Einperioden-Binomialmodell besteht aus $N = 2$ Finanzinstrumenten und $K = 2$ Zuständen.
2. Das Finanzinstrument 1 ist eine Anleihe mit Preis 1 z. Ztpkt. 0 und dem konstanten Auszahlungprofil $(1 + r) \cdot \mathbf{1}^2$ z. Ztpkt. n.
3. r kann als Zinssatz interpretiert werden.
4. Finanzinstrument 2 ist eine Aktie mit Preis $s_0 > 0$ z. Ztpkt. 0 und den Werten $d \cdot s_0$ im Zustand ω_1 bzw. $u \cdot s_0$ im Zustand ω_2 mit $u > d > 0$ z. Ztpkt. n.
5. „u" steht für „up" und „d" für „down".

Satz 2.20 *Ein Einperioden-Binomialmodell mit den Parametern d, u, r und s_0 ist genau dann arbitragefrei, wenn*

$$u \;>\; 1+r \;>\; d$$

gilt. In diesem Fall ist es auch vollständig.

Beweis: Wegen

$$\det \boldsymbol{D} \;=\; (1+r) \cdot u \cdot s_0 - (1+r) \cdot d \cdot s_0 \;=\; s_0 \cdot (1+r) \cdot (u-d) \;>\; 0$$

ist das Gleichungssystem $\boldsymbol{D}\psi = \boldsymbol{b}$ stets eindeutig lösbar und besitzt die Lösung (Anwendung der Cramer'schen Regel)

$$\begin{aligned}
\psi \;&=\; \frac{1}{\det \boldsymbol{D}} \cdot \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1+r \\ s_0 & u \cdot s_0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1+r & 1 \\ d \cdot s_0 & s_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{1}{s_0 \cdot (1+r) \cdot (u-d)} \begin{pmatrix} u \cdot s_0 - s_0 \cdot (1+r) \\ (1+r) \cdot s_0 - d \cdot s_0 \end{pmatrix} \\
&=\; \frac{1}{(1+r) \cdot (u-d)} \begin{pmatrix} u - (1+r) \\ (1+r) - d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Arbitragefreiheit des Einperioden-Binomialmodells ist gemäß Satz 2.13 gleichbedeutend mit $\psi \gg \mathbf{0}^2$. Wegen $(1+r) \cdot (u-d) > 0$ ist dies jedoch genau dann der Fall, wenn $u > 1 + r$ und

$d < 1 + r$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung ψ ist das Einperioden-Binomialmodell in diesem Fall gemäß Satz 2.18 auch vollständig. ■

Bemerkung: In den Bedingungen für die Arbitragefreiheit in einem Binomimalmodell spiegelt sich das „Wesen der Arbitragefreiheit" wider: Der Wert der Aktie z. Ztpkt. n (o.B.d.A. wird $s_0 = 1$ angenommen) muss – zustandsabhängig – sowohl größer als auch kleiner als der Wert $1 + r$ der Anleihe z. Ztpkt. n werden „dürfen", ansonsten würde ein Finanzinstrument das andere von der Wertentwicklung her „dominieren".

Beispiel: Einperioden-Binomialmodell mit $d = 0.9$, $u = 1.1$, $r = 0.05$ und $s_0 = 100$:

$$\Longrightarrow \quad \left(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 \\ 90 & 110 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \psi = \frac{1}{(1+r)\cdot(u-d)} \begin{pmatrix} u-(1+r) \\ (1+r)-d \end{pmatrix} = \frac{1}{0.21} \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/21 \\ 5/7 \end{pmatrix}$$

(siehe Beweis von Satz 2.20)

- Europäische Call-Option $\left(U, \tilde{K}\right)_{\mathrm{ECO}} = \left(S^2(n,.), 100\right)_{\mathrm{ECO}}$:

  Auszahlungsprofil $\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \left(90 - \tilde{K}\right)^+ \\ \left(110 - \tilde{K}\right)^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

  $$\Longrightarrow \quad \text{Preis} \quad c_0(\boldsymbol{c}) = \psi \cdot \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5/21 \\ 5/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{50}{7} \approx \underline{\underline{7.14}}$$

- Europäische Put-Option $\left(U, \tilde{K}\right)_{\mathrm{EPO}} = \left(S^2(n,.), 100\right)_{\mathrm{EPO}}$:

  Auszahlungsprofil $\quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \left(\tilde{K} - 90\right)^+ \\ \left(\tilde{K} - 110\right)^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $$\Longrightarrow \quad \text{Preis} \quad c_0(\boldsymbol{c}) = \psi \cdot \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5/21 \\ 5/7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{50}{21} \approx \underline{\underline{2.38}}$$

2.2.7 Wahrscheinlichkeitstheoretische Betrachtung und risikoneutrales Maß

Gemäß Definition 2.6 ist ein $\text{EPM}_K\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ ein Tupel $\Big(n, \mathbb{T}, \Omega, S^1, \ldots, S^N\Big)$ mit

- Zeithorizont $n \in \mathbb{R}_{>0}$
- Menge von Handelszeitpunkten $\mathbb{T} = \{0, n\}$
- Zustandsmenge $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$, $K \in \mathbb{N}$
- N Preisprozessen $S^1, \ldots, S^N : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$.

Es gilt

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} S^1(0, \omega_j) \\ \vdots \\ S^N(0, \omega_j) \end{pmatrix} \quad (j = 1, \ldots, K) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} S^1(n, \omega_1) & \ldots & S^1(n, \omega_K) \\ \vdots & & \vdots \\ S^N(n, \omega_1) & \ldots & S^N(n, \omega_K) \end{pmatrix}.$$

Notationen:

- $S_t^i \;:=\; S^i(t, .)$ für $t \in \mathbb{T}$ und $i = 1, \ldots, N$
- $\boldsymbol{S}_t \;:=\; \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix}$ – $\mathbb{R}^N$-wertiger Preisvektor z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$

Jetzt: Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den einzelnen Zuständen $\omega_1, \ldots, \omega_K \in \Omega$ durch Einführung eines Wahrscheinlichkeitsraumes $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ mit

- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathbb{P}\Big(\{\omega\}\Big) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$

  Interpretation: $\mathbb{P}\Big(\{\omega\}\Big)$ – Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Zustandes $\omega \in \Omega$ (empirisch oder subjektiv)

  Bezeichnung: Physisches Maß (*market measure, physical m., empirical m., natural m., actual m.*)

  Wird *nicht* zur Preisbestimmung verwendet!

Bemerkungen:

1. Die Preisprozesse $S^1, \ldots, S^N$ sind nun stochastische Prozesse.
2. Die Preisvektoren $\boldsymbol{S}_0$ und $\boldsymbol{S}_n$ sind zufällige $\mathbb{R}^N$-wertige Vektoren, wobei $\boldsymbol{S}_0$ auf Ω konstant ist.

3. Der Preis

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{S}_0$$

des Portfolios $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ z. Ztpkt. 0 ist eine auf Ω konstante Zufallsgröße.

4. Der Wert

$$V_n(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{S}_n$$

des Portfolios $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ z. Ztpkt. n ist eine Zufallsgröße, d.h., für $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ ist $V_n(\boldsymbol{h}) : \Omega \to \mathbb{R}$. Zwischen $V_n(\boldsymbol{h})$ und dem bisherigen Wertvektor $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \in \mathbb{R}^K$ besteht der Zusammenhang

$$\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \;=\; \begin{pmatrix} V_n(\boldsymbol{h})(\omega_1) \\ \vdots \\ V_n(\boldsymbol{h})(\omega_K) \end{pmatrix}$$

5. Eine **Arbitrage** ist nun charakterisiert durch

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;\leq\; 0 \quad \text{und} \quad V_n(\boldsymbol{h}) \geq 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(V_n(\boldsymbol{h}) > V_0(\boldsymbol{h})\Big) > 0,$$

d.h., für wenigstens ein $\omega \in \Omega$ gilt $V_n(\boldsymbol{h})(\omega) > V_0(\boldsymbol{h})$. Später in allgemeineren Modellen wird für eine Arbitrage $\mathbb{P}\Big(V_n(\boldsymbol{h}) > 0\Big) > 0$ gefordert werden. Dies entspricht dann lediglich der „Arbitrage Typ I“ aus Definition 2.8, aber nicht mehr der „Arbitrage Typ II“.

6. Ein **Auszahlungsprofil** ist nun eine Zufallsgröße $C : \Omega \to \mathbb{R}$ (bisher $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^K$).

7. Existenz eines Zustandspreisvektors $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_K)^T \gg \mathbf{0}^K$

$\Longrightarrow$ Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q} : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit

$$\mathbb{Q}(\{\omega_j\}) \;:=\; \frac{\psi_j}{d} \quad (j = 1, \ldots, K) \;\; \text{mit} \;\; d \;:=\; \sum_{j=1}^{K} \psi_j \tag{2.1}$$

Bezeichnung: Risikoneutrales Maß (später auch: Äquivalentes Martingalmaß) (*risk-neutral measure, equivalent martingale m., fictitious m., artificial m.*)

8. **Preis des Auszahlungsprofils** C:

$$c_0(C) \;:=\; d \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C) \;=\; d \cdot \sum_{j=1}^{K} C(\omega_j) \cdot \mathbb{Q}\Big(\{\omega_j\}\Big) \;=\; \sum_{j=1}^{K} \psi_j \cdot C(\omega_j) \tag{2.2}$$

9. Der Wert $d > 0$ kann als **Diskontfaktor** interpretiert werden, da d gleich dem Preis einer Anleihe mit Nominalwert 1 (d.h. konstante Auszahlung in Höhe von 1 z. Ztpkt. n) ist.

10. Der Preis eines Auszahlungsprofils in einem arbitragefreien EPM_K ist demnach der diskontierte Erwartungswert des Auszahlungsprofils bezüglich dem risikoneutralen Maß.

Beispiel: Obiges Einperioden-Binomialmodell mit $d = 0.9$, $u = 1.1$, $r = 0.05$ und $s_0 = 100$ besitzt den Zustandspreisvektor $\psi = \begin{pmatrix} 5/21 \\ 5/7 \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow \quad d \ = \ \psi_1 + \psi_2 \ = \ \underline{\underline{20/21}}$$

$\Longrightarrow$ Risikoneutrales Maß $\mathbb{Q} : 2^\Omega \to [0,1]$ mit

$$\mathbb{Q}\Big(\{\omega_1\}\Big) = \frac{\psi_1}{d} = \frac{5/21}{20/21} = \frac{1}{\underline{\underline{4}}} \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}\Big(\{\omega_2\}\Big) = \frac{\psi_2}{d} = \frac{5/7}{20/21} = \frac{3}{\underline{\underline{4}}}$$

- Europäische Call-Option $\Big(U, \tilde{K}\Big)_{\text{ECO}} = \Big(S_n^2, 100\Big)_{\text{ECO}}$:

  Auszahlungsprofil $\quad C := C(\omega) \ = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 10 & \text{für } \omega = \omega_2 \end{cases}$

  $$\Longrightarrow \quad \text{Preis} \quad c_0(C) \ = \ d \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C) \ = \ 20/21 \cdot (1/4 \cdot 0 + 3/4 \cdot 10) \ = \ \frac{50}{7} \ \approx \ \underline{\underline{7.14}}$$

- Europäische Put-Option $\Big(U, \tilde{K}\Big)_{\text{EPO}} = \Big(S_n^2, 100\Big)_{\text{EPO}}$:

  Auszahlungsprofil $\quad P := P(\omega) \ = \begin{cases} 10 & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 0 & \text{für } \omega = \omega_2 \end{cases}$

  $$\Longrightarrow \quad \text{Preis} \quad c_0(P) \ = \ d \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(P) \ = \ 20/21 \cdot (1/4 \cdot 10 + 3/4 \cdot 0) \ = \ \frac{50}{21} \ \approx \ \underline{\underline{2.38}}$$

2.2.8 Put-Call-Parität

Satz 2.21 *Gegeben seien ein arbitragefreies* $\text{EPM}_K\Big(n, \mathbb{T}, \Omega, S^1, \ldots, S^N\Big)$ *sowie die replizierbaren Auszahlungsprofile* C *bzw.* P *einer Europäischen Call- bzw. Put-Option mit demselben Underlying* S_n^i $(i \in \{1, \ldots, N\})$ *und Strike* $\tilde{K} \in \mathbb{R}_{0+}$. *Dann gilt für die Preise* $c_0(C)$ *bzw.* $c_0(P)$ *dieser Optionen die sogenannte* ***Put-Call-Parität***

$$c_0(C) - c_0(P) \ = \ S_0^i - d \cdot \tilde{K},$$

wobei d *der Diskontfaktor gemäß (2.1) ist.*

Beweis: Für die Auszahlungprofile C bzw. P gilt

$$C \ = \ \Big(S_n^i - \tilde{K}\mathbf{1}\Big)^+ \quad \text{bzw.} \quad P \ = \ \Big(\tilde{K}\mathbf{1} - S_n^i\Big)^+.$$

Offensichtlich ist (siehe auch Abbildungen 2.2 und 2.3)

$$C - P \ = \ S_n^i - \tilde{K}\mathbf{1}. \tag{2.3}$$

Aufgrund der Arbitragefreiheit des EPM_K existiert ein Zustandspreisvektor und somit ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}$ sowie ein Diskontfaktor $d > 0$. Erwartungswertbildung und Multiplikation mit d in (2.3) führt zu

$$d \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C) - d \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(P) \;=\; d \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_n^i) - d \cdot \tilde{K} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbf{1}).$$

Dies ist aber gemäß (2.2) gerade

$$c_0(C) - c_0(P) \;=\; S_0^i - d \cdot \tilde{K}$$

(die konstanten Zufallsvariablen werden hierbei als reelle Zahlen betrachtet). ■

Beispiel: Siehe oben mit $c_0(C) = 50/7$, $c_0(P) = 50/21$, $S_0^2 = 100$, $\tilde{K} = 100$ und $d = 20/21$:

$$c_0(C) - c_0(P) \;=\; 50/7 - 50/21 \;=\; 100/21 \;=\; 100 \cdot (1 - 20/21) \;=\; S_0^2 - d \cdot \tilde{K}$$

Bemerkung: Mit Hilfe der Put-Call-Parität lässt sich der Preis einer Put-Option aus dem Preis einer Call-Option (und umgekehrt) berechnen, falls beide dasselbe Underlying und denselben Strike besitzen. Beide Preise stimmen offensichtlich überein, falls $\tilde{K} = \dfrac{S_0^i}{d}$ gilt.

2.2.9 Diskontiertes Einperiodenmarktmodell

Definition 2.22 *Gegeben sei ein* $\text{EPM}_K\Big(n, \mathbb{T}, \Omega, S^1, \ldots, S^N\Big)$ *bzw.* $\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ *mit* $S^1 > 0$, *d.h.* $S_t^1(\omega) > 0$ *für alle* $t \in \mathbb{T}$ *und* $\omega \in \Omega$ *(der Preisprozess* S^1 *ist streng positiv), bzw.* $b_1 > 0$ *und* $D_{11}, \ldots, D_{1K} > 0$. *Dann heißt das* $\text{EPM}_K\Big(n, \mathbb{T}, \Omega, \underset{\sim}{S}^1, \ldots, \underset{\sim}{S}^N\Big)$ *bzw.* $\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{b}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\Big)$ *mit*

$$\underset{\sim}{S}^i \;:=\; \frac{S^i}{S^1}, \quad \text{d.h.} \quad \underset{\sim}{S}_t^i(\omega) \;:=\; \frac{S_t^i(\omega)}{S_t^1(\omega)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T} \text{ und } \omega \in \Omega, \qquad \text{bzw.}$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{b}} \;:=\; \frac{1}{b_1}\boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}^j \;:=\; \frac{1}{D_{1j}}\boldsymbol{D}^j \quad (j = 1, \ldots, K)$$

das ***dazugehörige diskontierte Einperiodenmarktmodell****, das Finanzinstrument* 1 ***Numéraire*** *und der dazugehörige Preisprozess* S^1 ***Diskontierungsprozess****.*

Bemerkung: In einem diskontierten EPM_K gilt $\underset{\sim}{S}^1 \equiv 1$ bzw. $\underset{\sim}{b}_1 = \underset{\sim}{D}_{11} = \ldots = \underset{\sim}{D}_{1K} = 1$.

Lemma 2.23 *Gegeben sei ein* $\text{EPM}_K\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ *mit dazugehörigem diskontierten* $\text{EPM}_K\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{b}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\Big)$. *Dann gilt:*

1. *Besitzt* $\Big(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{D}\Big)$ *einen Zustandspreisvektor* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_K) \gg \mathbf{0}^K$, *dann besitzt auch* $\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{b}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\Big)$ *einen Zustandspreisvektor* $\underset{\sim}{\psi} = (\underset{\sim}{\psi}_1, \ldots, \underset{\sim}{\psi}_K) \gg \mathbf{0}^K$ *mit*

$$\underset{\sim}{\psi}_j \;=\; \psi_j \cdot \frac{D_{1j}}{b_1} \quad (j = 1, \ldots, K).$$

2. *Es gilt* $\operatorname{rg} \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} \;=\; \operatorname{rg} \boldsymbol{D}$.

3. *Ist das dazugehörige diskontierte* EPM$_K$ *arbitragefrei, so gilt für den Diskontfaktor*

$$\underset{\sim}{d} \;=\; 1.$$

Beweis: Zu 1.: Der Zustandspreisvektor $\psi \gg \mathbf{0}^K$ ist eine Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{D}\psi = \boldsymbol{b}$. Da es ein dazugehöriges diskontiertes EPM$_K$ gibt, muss demnach $b_1, D_{11}, \ldots, D_{1K} > 0$ gelten. Für $i = 1, \ldots, N$ ergibt sich daher

$$\sum_{j=1}^{K} D_{ij} \cdot \psi_j \;=\; b_i \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^{K} \frac{D_{ij}}{D_{1j}} \cdot \Big(\psi_j \cdot D_{1j}\Big) \;=\; b_i$$

$$\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^{K} \underbrace{\frac{D_{ij}}{D_{1j}}}_{=\underset{\sim}{D}_{ij}} \cdot \underbrace{\left(\psi_j \cdot \frac{D_{1j}}{b_1}\right)}_{=\underset{\sim}{\psi}_j} \;=\; \underbrace{\frac{b_i}{b_1}}_{=\underset{\sim}{b}_i}.$$

Somit gilt für $\underset{\sim}{\psi}$ zum einen $\underset{\sim}{\psi} \gg \mathbf{0}^K$, zum anderen ist $\underset{\sim}{\psi}$ eine Lösung des Gleichungssystems $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\underset{\sim}{\psi} = \underset{\sim}{\boldsymbol{b}}$, also ein Zustandspreisvektor für das diskontierte EPM$_K$.

Zu 2.: Die Spalten von $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ ergeben sich aus den Spalten von $\boldsymbol{D}$ durch Multiplikation mit einer positiven reellen Zahl. Dies verändert den Spaltenrang und somit den Rang der gesamten Matrix nicht.

Zu 3.: Da das diskontierte EPM$_K$ arbitragefrei ist, gibt es einen Zustandspreisvektor $\underset{\sim}{\psi} \gg \mathbf{0}^K$, aus dem sich – analog zu den Betrachtungen für ein nicht diskontiertes EPM$_K$ – ein risikoloses Maß $\underset{\sim}{\mathbb{Q}}$ sowie ein Diskontfaktor $\underset{\sim}{d}$ konstruieren lässt, so dass für jedes in $\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{b}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{D}}\Big)$ replizierbare Auszahlungsprofil $\underset{\sim}{C}$

$$c_0(\underset{\sim}{C}) \;=\; \underset{\sim}{d} \cdot \mathrm{E}^{\underset{\sim}{\mathbb{Q}}}(\underset{\sim}{C}) \tag{2.4}$$

gilt. Insbesondere für $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{S}_n^1 \equiv 1$ ergibt sich aufgrund der Arbitragefreiheit $c_0(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{S}_0^1 = 1$ und folglich $\underset{\sim}{d} = 1$. ∎

Aus den Aussagen 1. und 2. dieses Lemmas ergeben sich unmittelbar die beiden folgenden Sätze:

Satz 2.24 *Ein* EPM$_K$ *ist genau dann arbitragefrei, wenn das dazugehörige diskontierte* EPM$_K$ *arbitragefrei ist.*

Satz 2.25 *Ein* EPM$_K$ *ist genau dann vollständig, wenn das dazugehörige diskontierte* EPM$_K$ *vollständig ist.*

2.3 Einperioden-Marktmodell mit allgemeinem Zustandsraum

Literatur:

- Hans Föllmer und Alexander Schied, Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time [5]

Es gelten weiterhin – wie beim EPM$_K$ – folgende **Vereinfachungen** des Modells gegenüber der Realität:

- Keine Transaktionskosten
- Keine Dividendenzahlungen
- Kauf/Verkauf von Finanzinstrumenten in beliebigen (reellwertigen) Stückzahlen möglich
- Kein Preisunterschied zwischen Kauf und Verkauf (kein *bid-ask-spread*)

2.3.1 Grundlagen

Definition 2.26 *Ein* ***Einperioden-Marktmodell*** *(mit allgemeinem Zustandsraum) (Bezeichnung:* EPM*) ist ein Tupel* $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, \ldots, S^N\Big)$ *mit*

- ***Zeithorizont*** $n \in \mathbb{R}_{>0}$
- ***Menge von Handelszeitpunkten*** $\mathbb{T} = \{0, n\}$
- ***Wahrscheinlichkeitsraum*** $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ *mit*
  - *nichtleerer* ***Zustandsmenge*** Ω
  - *σ-Algebra $\mathcal{F}$, die die* ***verfügbare Information*** *bzw.* ***Gesamtheit aller beobachtbaren Ereignisse zum Zeitpunkt*** *n beschreibt*
  - *Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, das die (empirischen oder subjektiven) Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten eines Ereignisses $F \in \mathcal{F}$ beschreibt („**physisches Maß**")*
- $N + 1$ ***nichtnegativen Preisprozessen*** $S^0, \ldots, S^N : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}_{0+}$ *mit*
  - $S^i(0, .)$ *konstant* $(i = 0, \ldots, N)$ *und*
  - $S^i(n, .)$ *$\mathcal{F}$-messbar* $(i = 0, \ldots, N)$

  sowie

  - $S^0(., .) > 0.$

Bemerkungen:

1. Gegenüber dem EPM$_K$ ist dieses Modell in Bezug auf den Zustandsraum Ω allgemeiner, in Bezug auf die Preisprozesse, für die hier Nichtnegativität gefordert wird, allerdings nicht. Dessen ungeachtet besteht natürlich die Möglichkeit, Auszahlungsprofile in ihren Positiv- und Negativteil aufzuspalten und diese als zwei eigenständige Prozesse dem Modell hinzuzufügen.

2. Die Preisprozesse sind aufgrund der Messbarkeitseigenschaft **stochastische Prozesse** auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$.

3. Das EPM enthält (im Unterschied zum EPM$_K$) $N+1$ (und nicht nur N) Finanzinstrumente. Das Finanzinstrument 0 ist von Anfang an gegenüber den übrigen Finanzinstrumenten durch die Positivität herausgehoben und besitzt die Funktion eines **Numéraires** bzw. der zugehörige (streng positive!) Preisprozess S^0 die Funktion eines **Diskontierungsprozesses**.

   Ein einfacher Diskontierungsprozess ist beispielsweise

   $$S^0(0,.) \;\equiv\; 1 \qquad \text{und} \qquad S^0(n,.) \;\equiv\; 1+r$$

   mit „Zinssatz“ $r > -1$ (wobei lediglich $r \geq 0$ wirtschaftlich sinnvoll ist).

4. Die Nichtnegativität sichert (zusammen mit der Messbarkeitseigenschaft) die Existenz der Integrale $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(S^0(n,.)\Big), \ldots, \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(S^N(n,.)\Big)$. Diese können allerdings den Wert $+\infty$ annehmen.

Bezeichnungen:

- $S_t^i \;:=\; S^i(t,.)$ für $t \in \mathbb{T}$ und $i = 0, \ldots, N$ (s.o.)

- $\boldsymbol{S}_t \;:=\; \begin{pmatrix} S_t^0 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix}$ – $\mathbb{R}^{N+1}$-wertiger (zufälliger) Preisvektor z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$

- $\boldsymbol{S}_t^{-0} \;:=\; \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix}$ – $\mathbb{R}^{N}$-wertiger (zufälliger) Preisvektor z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$

  (ohne Diskontierungsprozess!)

- $\underset{\sim}{S}^i \;:=\; \dfrac{S^i}{S^0}$ – diskontierter Preisprozess für $i = 0, \ldots, N$

- $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \;:=\; \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_t^0 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{S}_t^N \end{pmatrix}$ – $\mathbb{R}^{N+1}$-wertiger diskontierter (zufälliger) Preisvektor z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$

- $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t^{-0} := \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_t^1 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{S}_t^N \end{pmatrix}$ – $\mathbb{R}^N$-wertiger diskontierter (zufälliger) Preisvektor z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$

Bemerkung: Da die Zufallsgrößen $S_0^0, \ldots, S_0^N$ bzw. $\underset{\sim}{S}_0^0, \ldots, \underset{\sim}{S}_0^N$ konstant sind, werden sie im Folgenden – wo zweckmäßig – als (nichtnegative) reelle Zahlen betrachtet.

2.3.2 Portfolio und Arbitrage

Definition 2.27 *Gegeben sei ein* EPM $\left(n, \mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right), S^0, \ldots, S^N\right)$. *Dann heißt ein* $N+1$-*dimensionaler Vektor*

$$\boldsymbol{h} := \begin{pmatrix} h_0 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+1}$$

ein ***Portfolio*** *und ein* N-*dimensionaler Vektor*

$$\boldsymbol{h}^{-0} := \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N}$$

das (ggf. dazugehörige) ***verkürzte Portfolio****.*
Für ein Portfolio (bzw. verkürztes Portfolio) $\boldsymbol{h}$ *bzw.* $\boldsymbol{h}^{-0}$ *heißt*

$$V_t(\boldsymbol{h}) := \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{S}_t \qquad \textit{bzw.} \qquad V_t^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) := \boldsymbol{h}^{-0} \cdot \boldsymbol{S}_t^{-0}$$

der ***Wert des Portfolios (bzw. verkürzten Portfolios)*** $\boldsymbol{h}$ *bzw.* $\boldsymbol{h}^{-0}$ ***z. Ztpkt.*** $t \in \mathbb{T}$. *Die dazugehörigen diskontierte Werte sind*

$$\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{h}) := \boldsymbol{h} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \qquad \textit{bzw.} \qquad \underset{\sim}{V}_t^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) := \boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t^{-0}.$$

Bemerkung: Für ein Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ sowie dessen dazugehöriges verkürztes Portfolio $\boldsymbol{h}^{-0} \in \mathbb{R}^N$ gilt für $t \in \mathbb{T}$

$$V_t(\boldsymbol{h}) = V_t^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0 \cdot S_t^0 \qquad \text{und} \qquad \underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{h}) = \underset{\sim}{V}_t^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0 \tag{2.5}$$

sowie

$$\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{h}) = \frac{V_t(\boldsymbol{h})}{S_t^0} \qquad \text{und} \qquad \underset{\sim}{V}_t^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) = \frac{V_t^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0})}{S_t^0}.$$

Definition 2.28 *Ein Portfolio* $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ *heißt* ***Arbitrage*** *im* EPM, *falls*

$$V_0(\boldsymbol{h}) \leq 0, \quad V_n(\boldsymbol{h}) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(V_n(\boldsymbol{h}) > 0\Big) > 0 \tag{2.6}$$

gilt. Ein EPM *heißt* ***arbitragefrei****, falls in ihm keine Arbitrage existiert.*

Bemerkungen:

1. Eigenschaft (2.6) ist aufgrund der strengen Positivität des Diskontierungsprozesses äquivalent zu

$$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \leq 0, \quad \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) > 0\Big) > 0. \tag{2.7}$$

2. Der Begriff der Arbitrage im EPM ist konsistent mit dem Begriff „Arbitrage Typ I" gemäß Definition 2.8 im EPM$_K$, nicht jedoch mit dem Begriff „Arbitrage Typ II" im EPM$_K$. Allerdings existiert wegen des Numéraires und Lemma 2.9 im EPM zu einer „Arbitrage Typ I" immer auch eine „Arbitrage Typ II", so dass der Begriff der Arbitrage*freiheit* konsistent mit demjenigen im EPM$_K$ ist.

Aus folgendem Lemma ist ersichtlich, dass sich eine Arbitrage auch allein mit Hilfe eines verkürzten Portfolios charakterisieren lässt.

Lemma 2.29 *In einem* EPM *gibt es genau dann eine Arbitrage, wenn es ein verkürztes Portfolio* $\boldsymbol{h}^{-0} \in \mathbb{R}^N$ *gibt mit*

$$\underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \;\geq\; \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) > \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0})\Big) > 0. \tag{2.8}$$

Beweis: $\Longrightarrow$: Sei $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ eine Arbitrage. Somit gilt gemäß (2.7)

$$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \leq 0, \quad \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) > 0\Big) > 0.$$

Wegen (2.5) erhält man für das Portlio $\boldsymbol{h}$ und dessen dazugehöriges verkürztes Portfolio $\boldsymbol{h}^{-0} \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{array}{llll} \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) = \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0 \;\leq\; 0 & \Longrightarrow & \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \;\leq\; -h_0 & \text{und} \\ \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) = \underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0 \;\geq\; 0 \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.} & \Longrightarrow & \underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \;\geq\; -h_0 & \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{array}$$

und folglich zunächst

$$\underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \;\geq\; \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.}.$$

Weiter ergibt sich wegen $\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \leq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \;>\; \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0})\Big) &= \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0 \;>\; \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \;>\; \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h})\Big) \end{aligned}$$

$$\geq \ \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \ > \ 0\Big) \ > \ 0 \quad \text{n.V..}$$

$\Longleftarrow$: Sei nun $\boldsymbol{h}^{-0} \in \mathbb{R}^N$ ein verkürztes Portfolio mit den Eigenschaften (2.8). Dieses lässt sich durch

$$h_0 \ := \ -\underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0})$$

zu einem (nicht verkürzten) Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ ergänzen. Dieses Portfolio ist aber eine Arbitrage, da zum einen

$$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \ = \ \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0 \ = \ \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) - \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) \ = \ 0$$

und zum anderen

$$\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \ = \ \underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) + h_0 \ = \ \underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) - \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0})$$

gilt. Letzter Ausdruck ist n.V. $\mathbb{P}$-f.s. nichtnegativ und mit positiver Wahrscheinlichkeit positiv. ■

Bemerkung: Anhand von Lemma 2.29 lässt sich außerdem das „Wesen der Arbitrage“ treffend charakterisieren: In einem diskontierten Modell ist der Wert des (diskontierten) Diskontierungsprozesses sowohl zum Zeitpunkt 0 als auch zum Zeitpunkt n konstant Eins. Somit stellt jedes aus den übrigen Finanzinstrumenten gebildete Portfolio, das mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Wertzuwachs ohne das Risiko eines Verlusts erfährt, eine Arbitrage dar, da dieses Portfolio die Wertentwicklung des Diskontierungsprozesses dominiert.

Wie im EPM$_K$ wird sich zeigen, dass die Arbitragefreiheit in enger Verbindung zu einem sogenannten risikoneutralen Maß steht, das im Folgenden definiert wird.

Definition 2.30 *Gegeben sei ein* EPM $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, \ldots, S^N\Big)$. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{Q}$ *auf* $\Big(\Omega, \mathcal{F}\Big)$ *heißt* ***risikoneutrales Maß****, falls es folgende Eigenschaften besitzt:*

1. $\mathbb{Q}$ *ist äquivalent zu* $\mathbb{P}$*, d.h.*

$$\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \ \ \textit{und} \ \ \mathbb{P} \ll \mathbb{Q}^6.$$

2. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big) \ = \ \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0$*, d.h.*

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_n^i}{S_n^0}\right) \ = \ \frac{S_0^i}{S_0^0} \quad \textit{für } i = 0, \ldots, N. \tag{2.9}$$

[6] Für alle $F \in \mathcal{F}$ gilt $\mathbb{P}(F) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(F) = 0$.

Bemerkungen:

1. Die Äquivalenz der Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ war im EPM$_K$ natürlicherweise gegeben, da dort $\mathbb{P}$ auf *allen* Elementarereignissen $\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ eine positive Wahrscheinlichkeit besaß. Dies wird im EPM nicht vorausgesetzt. $\mathbb{P}$ braucht nicht einmal für Elementarereignisse definiert zu sein (nämlich falls diese nicht zur σ-Algebra $\mathcal{F}$ gehören).

2. Aufgrund der Äquivalenz der Maße $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ ist jede Arbitrage bezüglich $\mathbb{P}$ auch eine Arbitrage bezüglich $\mathbb{Q}$ (und umgekehrt), da bei der Definition der Arbitrage lediglich die Nullmengen von $\mathbb{P}$ eine Rolle spielen.

3. Die Existenz des Erwartungswertes $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big)$ (ggf. mit Wert $+\infty$ in einzelnen Komponenten) ist durch die Nichtnegativität und Messbarkeit der Preisprozesse gesichert. Aus Eigenschaft (2.9) folgt allerdings auch insbesondere, dass der Erwartungswert $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big)$ endlich ist, d.h., $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n$ ist $\mathbb{Q}$-integrierbar.

4. Die charakterisierende Eigenschaft des risikoneutralen Maßes, dass der erwartete diskontierte zukünftige Wert eines Portfolios gleich dem diskontierten heutigen Wert dieses Portfolio ist, zeigt gewissermaßen die „Neutralität“ bzw. „Fairness“ dieses Maßes. Diese Eigenschaft war bereits im EPM$_K$ in (2.4) erkennbar.

Satz 2.31 (1. Fundamentalsatz) *Ein* EPM $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, \ldots, S^N\Big)$ *ist genau dann arbitragefrei, wenn ein risikoneutrales Maß existiert. In diesem Fall gibt es ein risikoneutrales Maß, das eine beschränkte Dichte bezüglich* $\mathbb{P}$ *besitzt.*

Beweis: $\Longleftarrow$: Nach Voraussetzung existiere ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}$. Angenommen, es gebe im EPM eine Arbitrage $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$. Für diese gilt – gemäß obiger Bemerkung – nicht nur bezüglich $\mathbb{P}$, sondern auch bezüglich $\mathbb{Q}$

$$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \leq 0, \quad \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq 0 \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) > 0\Big) > 0.$$

Da $\mathbb{Q}$ ein risikoneutrales Maß ist, ergibt sich

$$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \sum_{i=0}^{N} h_i \cdot \underset{\sim}{S}_0^i \;=\; \sum_{i=0}^{N} h_i \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}_n^i\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\sum_{i=0}^{N} h_i \cdot \underset{\sim}{S}_n^i\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})\Big).$$

Insbesondere ist also $\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})$ $\mathbb{Q}$-integrierbar und es gilt (da $\boldsymbol{h}$ als Arbitrage angenommen wurde und somit $\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \leq 0$ ist)

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})\Big) \;\leq\; 0.$$

Nun ist aber auch $\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \geq 0$ $\mathbb{Q}$-f.s. und $\mathbb{Q}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) > 0\Big) > 0$. Daraus wiederum folgt

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})\Big) \;>\; 0.$$

Widerspruch!

$\Longrightarrow$: Siehe Anhang B.6

■

Bemerkungen:

1. Satz 2.31 gilt auch unter der allgemeineren Annahme, dass der Preisvektor $\boldsymbol{S}_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie die Portfolios $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ *nicht* konstant, sondern zufällig und messbar bezüglich einer σ-Algebra $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ sind (obiger Satz stellt dann einen Spezialfall für den Fall $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$ dar). Allerdings sind die dazugehörigen Überlegungen um ein Vielfaches aufwändiger, siehe Föllmer/Schied [5]. Eine solche allgemeinere Aussage für ein EPM wird jedoch im Rahmen des Mehrperioden-Marktmodells benötigt.

2. Satz 2.31 gilt *nicht* immer, wenn anstatt einer *endlichen* Anzahl von Preisprozessen eine abzählbar unendliche Anzahl $S^0, S^1, \ldots$ verwendet wird, wie das folgende Beispiel zeigt:

   Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Für die Preisprozesse $S^0, S^1, \ldots$ gelte

$$\begin{aligned} S^0 &\equiv 1 && \text{(d.h., die diskontierten stimmen mit den undiskontierten Preisprozessen überein),} \\ S_0^1 = S_0^2 = \ldots &= 1 && \text{(d.h., die Preise zum Zeitpunkt } 0 \text{ sind gleich Eins),} \\ S_n^i(\omega) &:= \begin{cases} 0 & \omega = i \\ 2 & \omega = i+1 \quad (i = 1, 2, \ldots) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

   Die Preisprozesse zum Zeitpunkt n lassen sich demnach als unendlich-dimensionale Vektoren der Form

$$S_n^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad S_n^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad S_n^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

   darstellen. Für ein Portfolio $\boldsymbol{h} = (h_0, h_1, h_2, \ldots)^T \in \mathbb{R}^\infty$ ist dann

$$V_0(\boldsymbol{h}) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot S_0^i = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \quad \text{sowie} \tag{2.10}$$

$$V_n(\boldsymbol{h})(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \cdot S_n^i(\omega) = \begin{cases} V_0(\boldsymbol{h}) - h_1 & \text{für } \omega = 1 \\ V_0(\boldsymbol{h}) - h_\omega + h_{\omega-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (\omega \in \Omega).$$

Zunächst wird gezeigt, dass dieses Modell arbitragefrei ist. Eine notwendige Bedingung für eine Arbitrage $\boldsymbol{h}$ ist

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;\leq\; 0 \qquad \text{und} \qquad V_n(\boldsymbol{h}) \;\geq\; 0$$

(wegen $S^0 \;\equiv\; 1$ genügt es, die undiskontierten Werte zu betrachten; außerdem braucht $V_n(\boldsymbol{h}) \geq 0$ nicht $\mathbb{P}$-f.s. zu gelten, da alle Elementarereignisse n.V. positive Wahrscheinlichkeiten besitzen).

Ist $\sum\limits_{i=0}^{\infty} h_i = \infty$ bzw. $-\infty$, ergibt sich wegen (2.10) sofort $V_0(\boldsymbol{h}) = V_n(\boldsymbol{h}) = \infty$ bzw. $-\infty$, so dass in diesem Fall die notwendige Bedingung niemals erfüllt sein kann. O.B.d.A. wird deswegen

$$\left|\sum_{i=0}^{\infty} h_i\right| \;<\; \infty$$

angenommen. Aus (2.10) ergibt sich dann

$$V_n(\boldsymbol{h})(\omega) - V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \begin{cases} -h_1 & \text{für } \omega = 1 \\ -h_\omega + h_{\omega-1} & \text{sonst} \end{cases} \qquad (\omega \in \Omega).$$

Aus der notwendigen Bedingung folgt $V_n(\boldsymbol{h}) - V_0(\boldsymbol{h}) \geq 0$ und somit

$$h_1 \;\leq\; 0 \qquad \text{sowie} \qquad h_\omega \;\leq\; h_{\omega-1} \quad \text{für } \omega > 1,$$

also $0 \;\geq\; h_1 \;\geq\; h_2 \;\geq\; \ldots$. Da $\sum\limits_{i=0}^{\infty} h_i$ als konvergent vorausgesetzt wurde, muss demnach $h_0, h_1, \ldots$ eine Nullfolge sein. Dies ist nur für das Portfolio $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}^\infty$ erfüllbar, das aber keine Arbitrage ist. Demnach ist das Modell arbitragefrei.

In diesem Modell gibt es aber kein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{S}_n) = \boldsymbol{S}_0 = \boldsymbol{1}^\infty$, denn für $i > 1$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_n^i) \;&=\; \sum_{\omega=1}^{\infty} S_n^i(\omega) \cdot \mathbb{Q}(\{\omega\}) \;=\; \sum_{\omega=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\{\omega\}) + \mathbb{Q}(\{i+1\}) - \mathbb{Q}(\{i\}) \\ &=\; 1 + \mathbb{Q}(\{i+1\}) - \mathbb{Q}(\{i\}). \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_n^i) = S_0^i = 1$ folgt daraus

$$\mathbb{Q}(\{i+1\}) \;=\; \mathbb{Q}(\{i\})$$

für $i > 1$. Da aber $\mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ vorausgesetzt wurde, würde daraus

$$\mathbb{Q}(\Omega) \;=\; \sum_{\omega=1}^{\infty} \mathbb{Q}(\{\omega\}) \;=\; \infty$$

folgen, d.h., $\mathbb{Q}$ wäre kein Wahrscheinlichkeitsmaß. Widerspruch!

2.3.3 Replizierbarkeit und Vollständigkeit

Definition 2.32 *Gegeben sei ein* EPM $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, \ldots, S^N\Big)$. *Dann heißt eine reellwertige Zufallsgröße C auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ ein **Auszahlungsprofil** (im* EPM*) und die Zufallsgröße*

$$\underset{\sim}{C} \ := \ \frac{C}{S_n^0}$$

*das dazugehörige **diskontierte Auszahlungsprofil**.*

*Ein Auszahlungsprofil C heißt **replizierbar**, wenn es ein Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ gibt, so dass*

$$C \ = \ V_n(\boldsymbol{h}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \text{bzw.} \qquad \underset{\sim}{C} \ = \ \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

*gilt. Ein solches Portfolio heißt **replizierendes Portfolio** für das Auszahlungsprofil C.*

Die Menge

$$H(C) \ := \ \Big\{\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1} \mid C = V_n(\boldsymbol{h}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\Big\}$$

*wird als **Menge der replizierenden Portfolios von** C bezeichnet.*

Satz 2.33 („Law of One Price") *Es seien $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, \ldots, S^N\Big)$ ein arbitragefreies* EPM *sowie C ein replizierbares Auszahlungsprofil. Dann gilt:*

1. *Sind sowohl $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ als auch $\tilde{\boldsymbol{h}} \in \mathbb{R}^{N+1}$ replizierende Portfolios von C, so ist*

$$V_0(\boldsymbol{h}) \ = \ V_0(\tilde{\boldsymbol{h}}).$$

2. *Unabhängig von der speziellen Wahl eines risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ gilt für jedes Portfolio $\boldsymbol{h} \in H(C)$*

$$V_0(\boldsymbol{h}) \ = \ S_0^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C}).$$

Bezeichnung: $c_0(C) := S_0^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C})$ *(**„Preis des Auszahlungsprofils** C")*

3. *Das erweiterte* EPM $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, \ldots, S^N, S^{N+1}\Big)$ *mit*

$$S_0^{N+1} \ := \ c_0(C) \quad \text{und} \quad S_n^{N+1} \ := \ C$$

ist ebenfalls arbitragefrei.

Beweis: Zu 2.: Die Arbitragefreiheit impliziert die Existenz eines risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$, für das gemäß Definition

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big) \ = \ \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0$$

gilt. Insbesondere ist $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big)$ endlich. Für jedes Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ gilt daher zum einen

$$\boldsymbol{h} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\boldsymbol{h} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})\Big),$$

zum anderen

$$\boldsymbol{h} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big) \;=\; \boldsymbol{h} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0 \;=\; \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}),$$

also

$$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})\Big). \tag{2.11}$$

Insbesondere ist demnach $\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})$ für jedes $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$ $\mathbb{Q}$-integrierbar.
Ist nun $\boldsymbol{h}$ ein replizierendes Portfolio für das Auszahlungsprofil C, d.h. gilt

$$C \;=\; V_n(\boldsymbol{h}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \text{bzw.} \qquad \underset{\sim}{C} \;=\; \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

so folgt daraus die $\mathbb{Q}$-Integrierbarkeit von $\underset{\sim}{C}$ sowie

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C}\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}) \qquad \text{und somit} \qquad V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; S_0^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C}\Big).$$

Diese Überlegungen gelten unabhängig von der speziellen Wahl des risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$.

Zu 1.: Wegen 2. gilt für jedes replizierende Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; S_0^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C})$$

unabhängig von der speziellen Wahl von $\boldsymbol{h}$.

Zu 3.: Für die ersten $N+1$ Preisprozesse gilt

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}{}_n^i\Big) \;=\; \underset{\sim}{S}{}_0^i \qquad (i = 0, \ldots, N).$$

Für den $N+2$-ten Preisprozess S^{N+1} gilt wegen 2.

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}{}_n^{N+1}\Big) \cdot S_0^0 \;=\; c_0(C) \;=\; S_0^{N+1},$$

also ebenfalls

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}{}_n^{N+1}\Big) \;=\; \underset{\sim}{S}{}_0^{N+1}.$$

Somit ist $\mathbb{Q}$ auch für das erweiterte EPM ein risikoneutrales Maß und das erweiterte EPM gemäß Satz 2.31 arbitragefrei. ■

Bemerkung: Die $\mathbb{Q}$-Integrierbarkeit von C (oder wenigstens die Existenz des Integrals $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C)$ – ggf. mit Wert ∞) ist nicht immer gesichert, da aus der Existenz eines risikolosen Maßes $\mathbb{Q}$ zwar die Endlichkeit von $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\Big)$, nicht aber die Endlichkeit von $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\boldsymbol{S}_n\Big)$ folgt.

Definition 2.34 *Ein* EPM *heißt* ***vollständig****, falls jedes Auszahlungsprofil replizierbar ist.*

Satz 2.35 (2. Fundamentalsatz) *Ein arbitragefreies* EPM *ist genau dann vollständig, wenn das risikoneutrale Maß eindeutig bestimmt ist. In diesem Fall ist* $\dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \leq N+1$.

Beweis: $\Longrightarrow$: Die vorausgesetzte Arbitragefreiheit sichert die Existenz eines risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$. Ist das EPM darüber hinaus noch vollständig, ist jedes Auszahlungsprofil C replizierbar, also insbesondere auch das Auszahlungsprofil $C = \mathbb{1}_A \cdot S_n^0$ für ein beliebiges $A \in \mathcal{F}$. Für jedes risikoneutrale Maß $\mathbb{Q}$ ergibt sich zum einen

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C}) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A) \;=\; \mathbb{Q}(A),$$

zum anderen gemäß Satz 2.33

$$\mathrm{E}^{Q}(\underset{\sim}{C}) \;=\; \frac{c_0(C)}{S_0^0}$$

und somit

$$\mathbb{Q}(A) \;=\; \frac{c_0(C)}{S_0^0}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit des Preises $c_0(C)$ ergibt sich daraus die Eindeutigkeit des risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$, da die Funktionswerte $\mathbb{Q}(A)$ (für ein beliebiges, aber festes $A \in \mathcal{F}$) nicht von der speziellen Wahl des risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$ abhängen.

$\Longleftarrow$: Siehe Anhang B.7 ■

Bemerkung: Die Eigenschaft $\dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \leq N+1$ kann dahingehend interpretiert werden, dass – analog zum EPM$_K$ – in einem arbitragefreien und vollständigen EPM die „Feinkörnigkeit“ des Zustandsraums Ω nicht größer als die Anzahl $N+1$ der Finanzinstrumente im Modell ist.

2.4 Allgemeines Mehrperioden-Marktmodell

Es gelten weiterhin – wie beim EPM – folgende **Vereinfachungen** des Modells gegenüber der Realität:

- Keine Transaktionskosten
- Keine Dividendenzahlungen
- Kauf/Verkauf von Finanzinstrumenten in beliebigen (reellwertigen) Stückzahlen möglich
- Kein Preisunterschied zwischen Kauf und Verkauf (kein *bid-ask-spread*)

2.4.1 Grundlagen

Verallgemeinerung gegenüber dem Einperioden-Marktmodell:

- Betrachtung von $n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ **Handelszeitpunkten** $t = 0, 1, \ldots, n$
- Wie im EPM sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$ gegeben. Jetzt:

  Beschreibung des (zeitlichen) Informationsverlaufs (bzw. des Informationszuwachses) in den Handelszeitpunkten $t = 0, \ldots, n$ mit Hilfe einer (zeitdiskreten) **Filtration** $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\ldots,n}$, d.h. einer Folge $\mathcal{F}_0, \ldots, \mathcal{F}_n$ von Unter-σ- Algebren von $\mathcal{F}$ mit

  $$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}.$$

  Alternative Bezeichnung: $\mathcal{F}_t$ – Menge der z. Ztpkt. $t \in \{0, \ldots, n\}$ beobachtbaren Ereignisse (*observable events*)

Bemerkung: Die σ-Algebra $\mathcal{F}_0$ der z. Ztpkt. 0 beobachtbaren Ereignisse ist in Verbindung mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ durch folgende Eigenschaft ausgezeichnet.

Annahme: Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ist auf $\mathcal{F}_0$ **trivial**, d.h.

$$\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_0.$$

Bemerkungen:

1. $\quad\mathbb{P}$ ist auf $\mathcal{F}_0$ trivial.
   $\iff$ Ω ist ein Atom von $\Big(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}\Big)$.
   $\iff$ Alle $\mathcal{F}_0$-messbaren Zufallsgrößen sind $\mathbb{P}$-fast sicher konstant.
2. Auf der trivialen σ-Algebra $\Big\{\emptyset, \Omega\Big\}$ sind alle Wahrscheinlichkeitsmaße trivial.
3. Ist X eine $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsgröße und $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_0$ trivial, so ist X integrierbar und es gilt $X = \mathrm{E}X$ $\mathbb{P}$-f.s. .

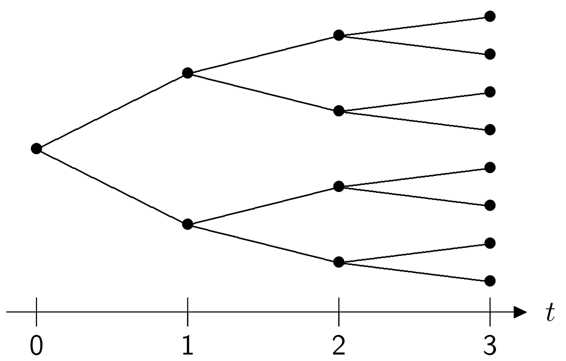
4. Ist X eine integrierbare Zufallsgröße auf $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$, so gilt

$$\mathrm{E}\Big(X \mid \mathcal{F}_0\Big) = \mathrm{E}X \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{2.12}$$

für jede Unter-σ-Algebra $\mathcal{F}_0$, auf der $\mathbb{P}$ trivial ist.

Definition 2.36 *Ein Quadrupel $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n},\, \mathbb{P}\Big)$ mit obigen Eigenschaften ($\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n}$ ist eine Filtration und $\mathbb{P}$ ist trivial auf $\mathcal{F}_0$) heißt (zeitdiskreter)* ***filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum****.*

Beispiel: Periodenanzahl $n = 3$, in jeder Periode sollen sich jeweils 2 neue „Entwicklungsmöglichkeiten“ ergeben:



- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}^3 = \Big\{(\tilde\omega_1, \tilde\omega_2, \tilde\omega_3) \mid \tilde\omega_1, \tilde\omega_2, \tilde\omega_3 \in \{\omega_1, \omega_2\}\Big\}$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{F}_1 = \Big\{\emptyset, \Omega, \underbrace{\{(\omega_1,\omega_1,\omega_1),(\omega_1,\omega_1,\omega_2), (\omega_1,\omega_2,\omega_1),(\omega_1,\omega_2,\omega_2)\}}_{=:\,F_1}, \underbrace{\{(\omega_2,\omega_1,\omega_1),(\omega_2,\omega_1,\omega_2), (\omega_2,\omega_2,\omega_1),(\omega_2,\omega_2,\omega_2)\}}_{=:\,F_2}\Big\}$

  $= \sigma(F_1, F_2)$

  (F_1 – 1. Komponente ist ω_1, F_2 – 1. Komponente ist ω_2)
- $\mathcal{F}_2 = \sigma\Big(\overbrace{\Big\{(\omega_1,\omega_1,\omega_1),(\omega_1,\omega_1,\omega_2)\Big\}}^{=:\,F_{1,1}}, \overbrace{\Big\{(\omega_1,\omega_2,\omega_1),(\omega_1,\omega_2,\omega_2)\Big\}}^{=:\,F_{1,2}}, \underbrace{\Big\{(\omega_2,\omega_1,\omega_1),(\omega_2,\omega_1,\omega_2)\Big\}}_{=:\,F_{2,1}}, \underbrace{\Big\{(\omega_2,\omega_2,\omega_1),(\omega_2,\omega_2,\omega_2)\Big\}}_{=:\,F_{2,2}}\Big)$

  ($F_{i,j}$ – 1. Komponente ist ω_i, 2. Komponente ist ω_j)
- $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}$

Definition 2.37 *Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n}, \mathbb{P}\right)$*. Ein stochastischer Prozess* $\left(X_t\right)_{t=0,\ldots,n}$ *auf* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ *heißt* ***adaptiert*** *an die Filtration* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n}$*, wenn* X_t $\mathcal{F}_t$*-messbar für alle* $t \in \{0, \ldots, n\}$ *ist.*

Beispiel: Gegeben sei der filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum aus obigem Beispiel. Für einen an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,3}$ adaptierten stochastischen Prozess $\left(X_t\right)_{t=0,\ldots,3}$ gilt dann

- $X_0 = \mathrm{const}$
- $X_1(\omega) = f_i$ für $\omega \in F_i$ $(i = 1, 2,\ f_1, f_2 \in \mathbb{R})$
  (d.h., X_1 ist jeweils konstant auf F_1 und F_2)
- $X_2(\omega) = f_{i,j}$ für $\omega \in F_{i,j}$ $(i, j = 1, 2,\ f_{i,j} \in \mathbb{R})$
- X_3 beliebig

Definition 2.38 *Ein Mehrperioden-Marktmodell (*MPM*) ist ein Tupel* $\left(n, \mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n}, \mathbb{P}\right), S^0, \ldots, S^N\right)$ *mit*

- ***Zeithorizont*** $n \in \mathbb{N}$
- ***Menge von Handelszeitpunkten*** $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, n\}$
- ***filtriertem Wahrscheinlichkeitsraum*** $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n}, \mathbb{P}\right)$ *mit* $\mathbb{P}$ *trivial auf* $\mathcal{F}_0$
- $N + 1$ ***nichtnegativen, an*** $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n}$ ***adaptierten Preisprozessen***

$$S^0, \ldots, S^N : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}_{0+} \qquad \textit{mit} \qquad S^0(.,.) \ > \ 0.$$

Bemerkungen:

1. Da $\mathbb{P}$ trivial auf $\mathcal{F}_0$ ist, sind sämtliche Preise z. Ztpkt. 0 $\mathbb{P}$-f.s. konstant.

2. Der Zeithorizont n gibt – im Unterschied zum EPM – keinen *realen* Zeitpunkt an, sondern ist als *Index* eines realen Zeitpunkts zu interpretieren. Dies ermöglicht es, den *realen* Endzeitpunkt zu fixieren, während die Anzahl an Handelszeitpunkten $n+1$ variieren (und für asymptotische Betrachtungen sogar gegen Unendlich gehen) kann. Für $n = 1$ und $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}$ ergibt sich dann als Spezialfall ein EPM.

3. Das Finanzinstrument 0 besitzt – wie beim EPM – die Funktion eines **Numéraires** bzw. der dazugehörige (streng positive) Preisprozess S^0 die Funktion eines **Diskontierungsprozesses**. Ein einfacher Diskontierungsprozess ist beispielsweise

$$S_t^0 = (1 + r)^t \qquad \text{mit} \ \ r > 0 \quad \text{und} \quad t \in \{0, \ldots, n\}.$$

Bezeichnungen (analog zum EPM für $t \in \{0, \dots, n\}$ und $i \in \{0, \dots, N\}$):

- $S_t^i := S^i(t,.)$, $\quad \boldsymbol{S}_t := \begin{pmatrix} S_t^0 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{S}_t^{-0} := \begin{pmatrix} S_t^1 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix}$

- $\underset{\sim}{S}^i := \dfrac{S^i}{S^0}$, $\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t := \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_t^0 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{S}_t^N \end{pmatrix}$, $\quad \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t^{-0} := \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_t^1 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{S}_t^N \end{pmatrix}$

2.4.2 Portfolio, Handelsstrategie, Arbitrage

Definition 2.39 *Gegeben sei ein* MPM $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \big(\mathcal{F}_t\big)_{t=0,\dots,n}, \mathbb{P}\Big), S^0, \dots, S^N\Big)$.

- *Dann heißt eine $\mathcal{F}_t$-messbare $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige Zufallsgröße $\boldsymbol{H}$* ***Portfolio z. Ztpkt.*** $t \in \{0, \dots, n\}$.

- *Ein an $\big(\mathcal{F}_t\big)_{t=0,\dots,n-1}$ (man beachte $n-1$ anstatt n!) adaptierter $\mathbb{R}^{N+1}$-wertiger stochastischer Prozess $\overline{\boldsymbol{H}} = \big(\boldsymbol{H}_t\big)_{t=0,\dots,n-1}$ (auch hier $n-1$!) heißt* ***Handelsstrategie****.*

- *Das – analog zum* EPM *– zu einem Portfolio $\boldsymbol{H}$ z. Ztpkt. $t \in \{0, \dots, n\}$ dazugehörige* ***verkürzte Portfolio z. Ztpkt.*** *t $\boldsymbol{H}^{-0}$ ist eine $\mathcal{F}_t$-messbare $\mathbb{R}^N$-wertige Zufallsgröße.*

- *Die zu einer Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \big(\boldsymbol{H}_t\big)_{t=0,\dots,n-1}$ gehörige* ***verkürzte Handelsstrategie*** *ist ein an $\big(\mathcal{F}_t\big)_{t=0,\dots,n-1}$ adaptierter $\mathbb{R}^N$-wertiger stochastischer Prozess $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0} = \big(\boldsymbol{H}_t^{-0}\big)_{t=0,\dots,n-1}$.*

Bemerkungen:

- Ist $\overline{\boldsymbol{H}} = \big(\boldsymbol{H}_t\big)_{t=0,\dots,n-1}$ eine Handelsstrategie, so sind $\boldsymbol{H}_t$ Portfolios z. Ztpkt. $t = 0, \dots, n-1$.

- Für $n = 1$ werden die Bezeichnungen Portfolio und Handelsstrategie synonym verwendet.

Definition 2.40 *Für ein Portfolio (bzw. verkürztes Portfolio) $\boldsymbol{H} = (H^0, H^1, \dots, H^N)^T$ bzw. $\boldsymbol{H}^{-0} = (H^1, \dots, H^N)^T$ z. Ztpkt. $t \in \{0, \dots, n\}$ heißt*

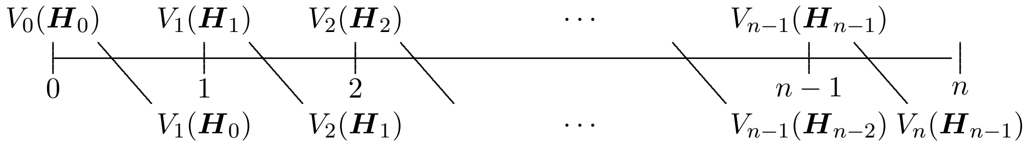
$$V_t(\boldsymbol{H}) := \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{S}_t = \sum_{i=0}^{N} H^i \cdot S_t^i \quad \text{bzw.} \quad V_t^{-0}(\boldsymbol{H}^{-0}) := \boldsymbol{H}^{-0} \cdot \boldsymbol{S}_t^{-0} = \sum_{i=1}^{N} H^i \cdot S_t^i$$

der ***Wert des Portfolios (bzw. verkürzten Portfolios)*** *$\boldsymbol{H}$ bzw. $\boldsymbol{H}^{-0}$* ***z. Ztpkt.*** *t.*
Die dazugehörigen diskontierten Werte sind

$$\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}) := \frac{V_t(\boldsymbol{H})}{S_t^0} = \sum_{i=0}^{N} H^i \cdot \underset{\sim}{S}_t^i \quad \text{bzw.} \quad \underset{\sim}{V}_t^{-0}(\boldsymbol{H}^{-0}) := \frac{V_t^{-0}(\boldsymbol{H})}{S_t^0} = \sum_{i=1}^{N} H^i \cdot \underset{\sim}{S}_t^i.$$

Bemerkungen:

- Graphische Veranschaulichung der Wertänderung für eine gegebene Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_0, \ldots, \boldsymbol{H}_{n-1}\Big)$:



- Die Portfolios können zu den Handelszeitpunkten $t = 0, \ldots, n-1$ zunächst beliebig verändert werden. Es ist jedoch „vernünftig" zu fordern, dass diese Veränderungen den *Wert* des Portfolios unverändert lassen, d.h., es sollte weder Geld „von außen" zugeführt bzw. „nach außen" abgeführt werden. Mit anderen Worten: Die Portfolios sollen lediglich „umgeschichtet" werden. Diese Eigenschaft wird in der folgenden Definition ausgedrückt.

Definition 2.41 *Eine Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t=0,\ldots,n-1}$ *heißt* ***selbstfinanzierend****, falls*

$$V_t\Big(\boldsymbol{H}_{t-1}\Big) \;=\; V_t\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{für } t = 1, \ldots, n-1 \tag{2.13}$$

gilt.

Bemerkung: Eigenschaft (2.13) ist äquivalent zu

$$\underset{\sim}{V}_t\Big(\boldsymbol{H}_{t-1}\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_t\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{für } t = 1, \ldots, n-1.$$

Definition 2.42 *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t=0,\ldots,n-1}$ *heißt* ***Arbitrage*** *im* MPM*, falls*

$$V_0(\boldsymbol{H}_0) \le 0,\ V_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \ge 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(V_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) > 0\Big) > 0 \tag{2.14}$$

gilt. Ein MPM *heißt* ***arbitragefrei****, falls in ihm keine Arbitrage existiert.*

Bemerkungen:

- Eigenschaft (2.14) ist äquivalent zu

$$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) \le 0,\ \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \ge 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) > 0\Big) > 0. \tag{2.15}$$

- Obige Definition von Arbitrage im MPM ist konsistent mit derjenigen im EPM.

Analog zum EPM lässt sich auch im MPM eine Arbitrage mit Hilfe einer verkürzten Handelsstrategie charakterisieren.

Lemma 2.43 *Die folgenden Aussagen sind in einem Mehrperioden-Marktmodell* $\mathcal{M} = \Big(n,\ \mathbb{T},\ \Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \big(\mathcal{F}_t\big)_{t=0,\dots,n},\ \mathbb{P}\Big),\ S^0,\ \dots,\ S^N\Big)$ *äquivalent:*

(a) $\mathcal{M}$ *ist nicht arbitragefrei.*

(b) *Es gibt einen Zeitpunkt* $t \in \{0, \dots, n-1\}$ *und ein verkürztes Portfolio* $\boldsymbol{H}^{-0}$ *z. Ztpkt.* t*, so dass*

$$\underset{\sim}{V}{}^{-0}_{t+1}(\boldsymbol{H}^{-0}) \geq \underset{\sim}{V}{}^{-0}_{t}(\boldsymbol{H}^{-0}) \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}{}^{-0}_{t+1}(\boldsymbol{H}^{-0}) > \underset{\sim}{V}{}^{-0}_{t}(\boldsymbol{H}^{-0})\Big) > 0 \quad (2.16)$$

gilt („Ein-Perioden-Arbitrage").

(c) *Es gibt einen Zeitpunkt* $t \in \{0, \dots, n-1\}$ *und ein beschränktes verkürztes Portfolio* $\boldsymbol{H}^{-0}$ *z. Ztpkt.* t*, so dass (2.16) gilt.*

(d) *Es gibt eine Arbitrage* $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{H}_1, \dots, \boldsymbol{H}_{n-1}\Big)$ *in* $\mathcal{M}$ *mit* $\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) = 0$*, deren dazugehörige verkürzte Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0}$ *beschränkt ist.*

Beweis: Siehe Anhang B.8

Bemerkung: Die Eigenschaft der Arbitragefreiheit wird im Folgenden – in Verallgemeinerung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.3.2 – mit Hilfe eines risikoneutralen Maßes (bzw. äquivalenten Martingalmaßes) $\mathbb{Q}$ auf $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\Big)$ charakterisiert werden.

Definition 2.44 *Ein stochastischer Prozess* $X = \Big(X_t\Big)_{t=0,\dots,n}$ *auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n}, \mathbb{Q}\Big)$ *heißt (*$\mathbb{Q}$*-)**Martingal** bezüglich* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n}$*, falls er folgende Eigenschaften besitzt:*

1. X *ist adaptiert an* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n}$.
2. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(|X_t|) < \infty$ *für alle* $t = 0, \dots, n$.
3. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ $\mathbb{Q}$*-f.s. für alle* $s < t,\ s, t \in \{0, \dots, n\}$.

Bemerkungen:

- Zur Einführung in bedingte Erwartungen siehe Anhang B.9
- Ein Martingal ist die mathematische Beschreibung eines „fairen Spiels".

Definition 2.45 *Gegeben sei ein Mehrperioden-Marktmodell* $\Big(n,\ \mathbb{T},\ \Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n},\ \mathbb{P}\Big),\ S^0,\ \dots,\ S^N\Big)$*. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{Q}$ *auf* $\Big(\Omega, \mathcal{F}\Big)$ *heißt* ***äquivalentes Martingalmaß****, falls es folgende Eigenschaften besitzt:*

1. *$\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$.*

2. *Der $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige diskontierte Preisvektorprozess $\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right)_{t=0,\ldots,n}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal, d.h.*

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_t^i}{S_t^0} \mid \mathcal{F}_s\right) = \frac{S_s^i}{S_s^0} \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } s < t, \;\; s,t \in \{0,\ldots,n\},\, i \in \{0,\ldots,N\}.$$

Bemerkungen:

1. Ein äquivalentes Martingalmaß ist – ebenso wie das physische Maß $\mathbb{P}$ – trivial auf $\mathcal{F}_0$.

2. Im EPM gilt gemäß (2.11) für jedes Portfolio $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1}$

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h})\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{h}).$$

Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen gibt es auch im MPM eine analoge Aussage für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 2.46 *Gegeben seien eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{n-1}\Big)$ mit $\mathbb{P}$-f.s. beschränkter dazugehöriger verkürzter Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0}$ sowie ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Dann gilt*

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})\Big) = \underset{\sim}{V}_0\Big(\boldsymbol{H}_0\Big) \quad \mathbb{Q}\text{-f.s. .}$$

Beweis: Allgemein gilt mit $\boldsymbol{H}_t := (H_t^0, \ldots, H_t^N)^T$ für $t \in \{0,\ldots,n-1\}$

$$\begin{aligned}
& \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \\
= \;& \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) + \sum_{t=0}^{n-2}\Big(\underset{\sim}{V}_{t+1}(\boldsymbol{H}_{t+1}) - \underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)\Big) + \Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) - \underset{\sim}{V}_{n-1}(\boldsymbol{H}_{n-1})\Big) \\
& \text{(„Teleskopsumme“)} \\
= \;& \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) + \sum_{t=0}^{n-1}\Big(\underset{\sim}{V}_{t+1}(\boldsymbol{H}_t) - \underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)\Big) \quad \text{(selbstfinanzierend)} \\
= \;& \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) + \sum_{t=0}^{n-1}\boldsymbol{H}_t \cdot (\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t) \\
= \;& \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) + \sum_{t=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{N} H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i).
\end{aligned}$$

Wegen $\underset{\sim}{S}_t^0 = 1$ für $t = 0,\ldots,n$ kann der Summand für $i = 0$ weggelassen werden. Somit ist

$$\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \;=\; \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) + \sum_{t=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N} H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i) \quad \mathbb{Q}\text{-f.s. .} \tag{2.17}$$

Sei $i \in \{1,\ldots,N\}$.

- Für $t \in \{0, \ldots, n\}$ ist $\underset{\sim}{S}_t^i \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$, da $\mathbb{Q}$ als äquivalentes Martingalmaß vorausgesetzt wurde und folglich $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}|\underset{\sim}{S}_t^i| < \infty$ gilt.

- Für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ ist gemäß Voraussetzung $H_t^i \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{Q})$.

- Demnach ist $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big|H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i)\Big| < \infty$ für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ (siehe Abschnitt B.4.6), und gemäß Eigenschaft 7 von bedingten Erwartungen (siehe Abschnitt B.9) gilt aufgrund der $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von H_t^i

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i) \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad = \quad H_t^i \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \tag{2.18}$$

- Da $\Big(\underset{\sim}{S}_t^i\Big)_{t=0,\ldots,n}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$ ist, gilt

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}_{t+1}^i \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad = \quad \underset{\sim}{S}_t^i \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für } t \in \{0, \ldots, n-1\}$$

und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad = \quad 0 \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für } t \in \{0, \ldots, n-1\},$$

also – wegen (2.18) –

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i) \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad = \quad 0 \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für } t \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

- Wegen Eigenschaft 5 von bedingten Erwartungen ergibt sich demnach für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i) \mid \mathcal{F}_0\Big) \quad &= \quad \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i) \mid \mathcal{F}_t\Big) \mid \mathcal{F}_0\Big) \\ &= \quad 0 \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}\ . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aus (2.17) ergibt sich mit (2.19) sowie den Eigenschaften 4 und 1 von bedingten Erwartungen

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_0\Big) \\ = \quad & \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) \mid \mathcal{F}_0\Big) + \sum_{t=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(H_t^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{t+1}^i - \underset{\sim}{S}_t^i) \mid \mathcal{F}_0\Big) \\ = \quad & \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

und schließlich wegen (2.12)

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})\Big) \quad = \quad \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}\ .$$

■

Satz 2.47 (1. Fundamentalsatz) *Ein Mehrperioden-Marktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert. In diesem Fall gibt es ein äquivalentes Martingalmaß, das eine beschränkte Dichte bezüglich $\mathbb{P}$ besitzt.*

Beweis: $\Longleftarrow$: Indirekt: Angenommen, es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$, aber das Modell ist nicht arbitragefrei. Gemäß Lemma 2.43 existiert dann eine Arbitrage $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_0,\ \boldsymbol{H}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{H}_{n-1}\Big)$ mit $\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) = 0$, deren dazugehörige verkürzte Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0}$ beschränkt ist. Gemäß Lemma 2.46 wäre dann

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_0\Big(\boldsymbol{H}_0\Big) \;=\; 0. \tag{2.20}$$

Da aber $\overline{\boldsymbol{H}}$ eine Arbitrage ist, gilt

$$\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) > 0\Big) > 0,$$

was aufgrund der Äquivalenz von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ gleichbedeutend ist mit

$$\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \geq 0 \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) > 0\Big) > 0.$$

Daraus folgt aber

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})\Big) \;>\; 0,$$

was ein Widerspruch zu (2.20) ist.

$\Longrightarrow$: Siehe Anhang B.10

■

2.4.3 Replizierbarkeit und Vollständigkeit

Definition 2.48 *Eine Zufallsgröße C auf $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\Big)$ heißt* ***Europäisches Auszahlungsprofil****. Ein Europäisches Auszahlungsprofil C heißt* ***Derivat****, wenn es messbar ist bezüglich der von den Preisprozessen $S^0, \ldots, S^N$ erzeugten σ-Algebra. Die dazugehörige Zufallsgröße*

$$\underset{\sim}{C} \;:=\; \frac{C}{S_n^0}$$

heißt ***diskontiertes Europäisches Auszahlungsprofil****.*

Bemerkung: „Europäische Wertpapiere" sind dadurch gekennzeichnet, dass eine Auszahlung ausschließlich am Ende der Laufzeit (hier: Handelszeitpunkt n) erfolgt. „Amerikanische Wertpapiere" können Auszahlungen zu jedem beliebigen Handelszeitpunkt $t = 1, \ldots, n$ realisieren.

Definition 2.49 *Ein Europäisches Auszahlungsprofil C heißt* ***replizierbar****, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t=0,\dots,n-1}$ existiert, so dass*

$$V_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) = C \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{2.21}$$

gilt. Eine solche Handelsstrategie heißt ***replizierende Handelsstrategie****.*

Bemerkungen:

1. Eigenschaft (2.21) ist gleichbedeutend mit

   $$\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) = \underset{\sim}{C} \quad \mathbb{P}\text{-f.s. .}$$

2. Die Eigenschaft der Replizierbarkeit ist im MPM nicht „stark“ genug, um ein „Law of One Price“ analog zum EPM zu liefern. Deswegen wird im Folgenden die dafür erforderliche Eigenschaft der starken Replizierbarkeit eingeführt.

Definition 2.50 *Ein Europäisches Auszahlungsprofil C heißt* ***stark replizierbar****, wenn*

(a) sowohl sein Positivteil $C^+ := \Big(C\Big)^+$ als auch sein Negativteil $C^- := \Big(-C\Big)^+$ replizierbar sind

oder

(b) es eine C replizierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t=0,\dots,n-1}$ gibt, so dass die dazugehörige verkürzte Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0} = \Big(\boldsymbol{H}_t^{-0}\Big)_{t=0,\dots,n-1}$ $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt ist.

Bemerkungen:

- Aus der Replizierbarkeit von C folgt nicht immer die Replizierbarkeit von C^+ und C^-: Sei beispielsweise $N = 1$ sowie $S_n^0 \equiv 1$ und

  $$S_n^1(\omega) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 0 & \text{für } \omega = \omega_2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

  für zwei ausgewählte $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\} \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(\{\omega_1\}), \mathbb{P}(\{\omega_2\}) > 0$. Dann ist

  $$C(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = \omega_1 \\ -1 & \text{für } \omega = \omega_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wegen $C = S_n^1 - S_n^0$ replizierbar, aber weder

$$C^+(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 0 & \text{für } \omega = \omega_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{noch} \quad C^-(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = \omega_1 \\ 1 & \text{für } \omega = \omega_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(jede Handelsstrategie erzeugt Vielfache von S_n^1 plus einer Konstanten).

Sind andererseits sowohl C^+ als auch C^- replizierbar mit den dazugehörigen replizierenden Handelsstrategien $\overline{\boldsymbol{H}}^+$ bzw. $\overline{\boldsymbol{H}}^-$, so ist $\overline{\boldsymbol{H}} := \overline{\boldsymbol{H}}^+ - \overline{\boldsymbol{H}}^-$ („−" „punktweise") die replizierende Handelsstrategie für $C = C^+ - C^-$.

- Hinreichend für die starke Replizierbarkeit im Sinne von (b) ist beispielsweise die Endlichkeit des Grundraums Ω, da dann jedes Portfolio $\boldsymbol{H} = \left(H^0, \ldots, H^N\right)^T$ durch $\max\limits_{\omega\in\Omega, i\in\{0,\ldots,N\}} \left|H^i(\omega)\right|$ beschränkt ist.
- Das Portfolio $\boldsymbol{H}_0$ ist aufgrund der $\mathcal{F}_0$-Messbarkeit $\mathbb{P}$-f.s. konstant und somit $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt, weswegen dies nicht explizit gefordert werden müsste.
- Die angegebenen Eigenschaften sind hinreichend für die Integrierbarkeit der diskontierten Werte $\left(\underset{\sim}{V}_1(\boldsymbol{H}_1),\ \ldots,\ \underset{\sim}{V}_{n-1}(\boldsymbol{H}_{n-1}),\ \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})\right)$ bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$.

Unter Verwendung der starken Replizierbarkeit kann Lemma 2.46 verallgemeinert werden:

Lemma 2.51 *Es seien $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß, C ein stark replizierbares Europäisches Auszahlungsprofil und $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ die dazugehörige replizierende Handelsstrategie. Dann ist der Prozess $\underset{\sim}{V} = \left(\underset{\sim}{V}_t\right)_{t=0,\ldots,n} := \left(\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0), \ldots, \underset{\sim}{V}_{n-1}(\boldsymbol{H}_{n-1}), \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})\right)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal bezüglich $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n}$.*

Beweis: Siehe Anhang B.11

Satz 2.52 („Law of One Price") *Gegeben seien ein arbitragefreies* MPM *sowie ein stark replizierbares Europäisches Auszahlungsprofil C. Dann gilt:*

1. *Sind sowohl $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ als auch $\overline{\tilde{\boldsymbol{H}}} = \left(\tilde{\boldsymbol{H}}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ replizierende Handelsstrategien von C, so ist $V_0(\boldsymbol{H}_0) = V_0(\tilde{\boldsymbol{H}}_0)$ $\mathbb{Q}$-f.s. .*

   Bezeichnung: $c_0(C) := \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(V_0(\boldsymbol{H}_0)\right)$ *(„Preis des Europäischen Auszahlungsprofils C")*
2. *Unabhängig von der speziellen Wahl eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ gilt*

$$c_0(C) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_0^0) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C}).$$

3. *Das erweiterte* MPM $\left(n, \mathbb{T}, \left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\dots,n},\, \mathbb{P}\right),\, S^0,\, \dots,\, S^N,\, S^{N+1}\right)$ *mit*

$$S_0^{N+1} := c_0(C) \quad \textit{und} \quad S_t^{N+1} := S_t^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\right) \quad (t = 1, \dots, n)$$

ist ebenfalls arbitragefrei.

Beweis: Zu 1.: Mit Lemma 2.51 ergibt sich:

1. $\underset{\sim}{C}$ ist $\mathbb{Q}$-integrierbar, da C replizierbar und $\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})$ integrierbar ist (aufgrund der $\mathbb{Q}$-Martingaleigenschaft von $\left(\underset{\sim}{V}_t\right)_{t=0,\dots,n}$).
2. Es ist

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_t\right) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\right) \;=\; \underset{\sim}{V}_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für $t \in \{0, \dots, n-1\}$, also insbesondere

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_0\right) \;=\; \underset{\sim}{V}_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C}\right) \;=\; \underset{\sim}{V}_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\ . \tag{2.22}$$

Da der Erwartungswert $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C}\right)$ nur von dem Auszahlungsprofil $\underset{\sim}{C}$, nicht aber von der speziell gewählten replizierenden Handelsstrategie abhängt, ist somit Aussage 1 von Satz 2.52 gezeigt.

Zu 2. – Teil 1: Die Existenz des „undiskontierten“ Erwartungswertes $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C)$ ist im Allgemeinen nicht gesichert. Es gilt allerdings (siehe (2.22))

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(V_0(\boldsymbol{H}_0) \mid \mathcal{F}_0\right) \;&=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_0^0 \cdot \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) \mid \mathcal{F}_0\right) \;=\; S_0^0 \cdot \underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) \\ &=\; S_0^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C}\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\end{aligned}$$

Die Bildung des unbedingten Erwartungswertes auf beiden Seiten führt zu

$$c_0(C) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(V_0(\boldsymbol{H}_0)) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_0^0) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C}\right).$$

Zu 3.: Ist $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß in einem arbitragefreien MPM $\left(n, \mathbb{T},\, \left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\dots,n},\, S^0,\, \dots,\, S^N\right)\right.$ und C ein stark replizierbares Europäisches Auszahlungsprofil, so ist $\mathbb{Q}$ auch in dem erweiterten MPM $\left(n, \mathbb{T},\, \left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\dots,n},\, \mathbb{P}\right),\, S^0,\, \dots,\, S^N,\, S^{N+1}\right)$ mit

$$S_0^{N+1} := c_0(C) \quad \text{und} \quad S_t^{N+1} := S_t^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\right) \quad (t = 1, \dots, n)$$

ein äquivalentes Martingalmaß, da der diskontierte Prozess $\left(\underset{\sim}{S}_t^{N+1}\right)_{t=0,\ldots,n}$ mit $\underset{\sim}{S}_0^{N+1} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C}\right)$ ($\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C}\right) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_0\right)$ $\mathbb{P}$-f.s.) und $\underset{\sim}{S}_t^{N+1} = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\right)$, $t \in \{1, \ldots, n\}$, gemäß Lemma 2.51 ebenfalls ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist. Damit ist Aussage 3 von Satz 2.52 gezeigt.

Zu 2. – Teil 2: Der Preis $c_0(C) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_0^0) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C})$ eines stark replizierbaren Europäischen Auszahlungsprofils C ist eindeutig bestimmt und hängt insbesondere nicht von der konkreten Wahl des äquivalenten Martingalmaßes ab, denn jeder andere Preis führt zu einer Arbitrage, wie folgende Überlegungen zeigen:

- **Fall 1:** Seien $\hat{c} > c_0(C)$ ein anderer Preis für das Auszahlungsprofil C und der $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige Prozess $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ eine replizierende Handelsstrategie für C im nicht erweiterten MPM.

- Die $\mathbb{R}^{N+2}$-wertige selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}^{>} = \left(\boldsymbol{H}_t^{>}\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ im erweiterten MPM, definiert für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ durch

$$\boldsymbol{H}_t^{>} := \begin{pmatrix} H_t^0 \\ H_t^1 \\ \vdots \\ H_t^N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{\hat{c} - c_0(C)}{S_0^0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(Idee: „Billig kaufen, teuer verkaufen“, d.h., kaufe zum Zeitpunkt 0 die replizierende Handelsstrategie zum Preis $c_0(C)$, verkaufe Finanzinstrument $N+1$ zum Preis $\hat{c}$ und lege die Differenz in dem Numéraire an), ist eine Arbitrage im erweiterten MPM:

Der Wert von $\boldsymbol{H}_0^{>}$ im erweiterten MPM zum Zeitpunkt 0 ist wegen $c_0(C) = V_0\left(\boldsymbol{H}_0\right)$ $\mathbb{P}$-f.s.

$$V_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) - \hat{c} + S_0^0 \cdot \frac{\hat{c} - c_0(C)}{S_0^0} \;=\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\ .$$

Der Wert von $\boldsymbol{H}_{n-1}^{>}$ im erweiterten MPM zum Zeitpunkt n ist wegen $S_n^{N+1} = V_n\left(\boldsymbol{H}_{n-1}\right)$ $\mathbb{P}$-f.s. und der Positivität des Numéraires

$$V_n\left(\boldsymbol{H}_{n-1}\right) - S_n^{N+1} + S_n^0 \cdot \frac{\hat{c} - c_0(C)}{S_0^0} \;=\; \frac{S_n^0}{S_0^0} \cdot \left(\hat{c} - c_0(C)\right) \;>\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\ .$$

- **Fall 2:** Sei nun $\hat{c} < c_0(C)$ ein anderer Preis für das Auszahlungsprofil C. In diesem Fall ist die Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}^{<} = \left(\boldsymbol{H}_t^{<}\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ im erweiterten Marktmodell, definiert für

$t \in \{0, \ldots, n-1\}$ durch

$$\boldsymbol{H}_t^< := \begin{pmatrix} -H_t^0 \\ -H_t^1 \\ \vdots \\ -H_t^N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{c_0(C) - \hat{c}}{S_0^0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Idee: Verkaufe zum Zeitpunkt 0 die replizierende Handelsstrategie zum Preis $c_0(C)$, kaufe Finanzinstrument $N+1$ zum Preis $\hat{c}$ und lege die Differenz in dem Numéraire an), eine Arbitrage im erweiterten MPM.

Damit ist Aussage 2 von Satz 2.52 gezeigt. ■

Bemerkung: Ist C $\mathcal{F}_n$-messbar, so ist $S_n^{N+1} = S_n^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{C}{S_n^0} \mid \mathcal{F}_n\right) = C$. Allerdings ist C aufgrund der Replizierbarkeit „$\mathbb{P}$-f.s. $\mathcal{F}_n$-messbar", so dass allgemein $S_n^{N+1} = C$ $\mathbb{P}$-f.s. gilt.

Lemma 2.53 *Hängt in einem arbitragefreien* MPM *der Preis* $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C})$ *eines diskontierten Europäischen Auszahlungsprofils* $\underset{\sim}{C}$ *nicht von der speziellen Wahl des äquivalenten Martingalmaßes* $\mathbb{Q}$ *ab, so ist das Europäische Auszahlungsprofil* C *replizierbar.*

Ohne Beweis.

Definition 2.54 *Ein* MPM *heißt* ***vollständig****, falls jedes Europäische Auszahlungsprofil replizierbar ist.*

Bemerkung: Sind alle Europäische Auszahlungsprofile replizierbar, so sind es auch die jeweiligen Positiv- und Negativteile, d.h., in einem vollständigen Mehrperioden-Marktmodell sind alle Europäischen Auszahlungsprofile stark replizierbar.

Lemma 2.55 *Ein arbitragefreies Mehrperioden-Marktmodell ist vollständig, wenn jedes* $\mathbb{P}$*-f.s. beschränkte diskontierte Europäische Auszahlungsprofil replizierbar ist.*

Ohne Beweis.

Satz 2.56 (2. Fundamentalsatz:) *Ein arbitragefreies* MPM *ist genau dann vollständig, wenn das äqivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt ist.*

Beweis: $\Longrightarrow$: Analog zum Beweis von Lemma 2.35 im EPM.

$\Longleftarrow$: Ist $\mathbb{Q}$ ein eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß, so existiert für jedes $\mathbb{P}$*-f.s. beschränkte* diskontierte Europäische Auszahlungsprofil $\underset{\sim}{C}$ der Preis $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C})$ und dieser ist eindeutig bestimmt. Gemäß Lemma 2.53 ist $\underset{\sim}{C}$ dann replizierbar und gemäß Lemma 2.55 ist das arbitragefreie MPM vollständig. ■

Bemerkung: Es lässt sich außerdem zeigen, dass in einem arbitragefreien MPM die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ äquivalent dazu ist, dass *jedes* $\mathbb{Q}$-Martingal $\underset{\sim}{M} = \left(\underset{\sim}{M}_t\right)_{t=0,\ldots,n}$ dargestellt werden kann als

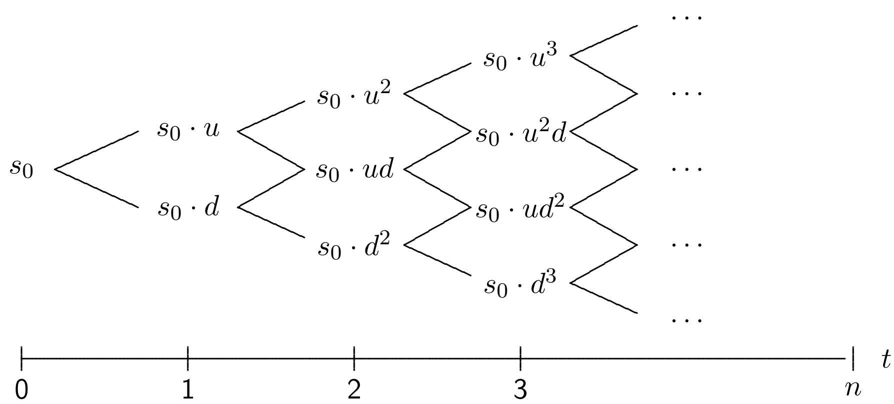
$$\underset{\sim}{M}_t \;=\; \underset{\sim}{M}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \boldsymbol{H}_s \cdot (\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{s+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_s) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{für } t \in \{1, \ldots, n\} \tag{2.23}$$

(siehe dazu auch (B.27)), wobei $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ eine Handelsstrategie ist. Dies ist die diskrete Version des sogenannten **Martingaldarstellungssatzes**, der sich – bei geeigneter Definition eines „diskreten stochastischen Integrals“ – auch als „$\underset{\sim}{M}_t = \underset{\sim}{M}_0 + \int_0^{t-1} \boldsymbol{H}_s \,\mathrm{d}\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_s$“ schreiben lässt.

2.5 Mehrperioden-Binomialmodell

Spezialfall eines Mehrperioden-Marktmodells mit folgenden **Annahmen:**

- 2 Wertpapiere, d.h. $N = 1$
- Das Numéraire ist nichtzufällig und bestimmt durch einen Zinssatz $r > -1$.
- Die Wertentwicklung des Wertpapiers 1 erfolgt, ausgehend von einem Startwert $s_0 > 0$ und bestimmt durch zwei Faktoren u („up") und d („down") mit $u > d > 0$, gemäß folgenden Pfaden:



Definition 2.57 Ein MPM $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\ldots,n}, \mathbb{P}\Big), S^0, S^1\Big)$ mit zwei Finanzprodukten heißt (Mehrperioden-)Binomialmodell oder CRR- (Cox-Ross-Rubinstein-) Modell[7] mit n Perioden, wenn es – in Abhängigkeit von den Parametern d, u, r und s_0 mit $r > -1$, $u > d > 0$ und $s_0 > 0$ – folgende Eigenschaften besitzt:

- $\Omega = \{u, d\}^n$
- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $\mathcal{F}_0 = \{0, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_t = \sigma\Big(\Big\{F_{\omega_1,\ldots,\omega_t} \in \mathcal{F} : \omega_1, \ldots, \omega_t \in \{u, d\}\Big\}\Big)$

  mit $F_{\omega_1,\ldots,\omega_t} := \Big\{(\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_t, \ldots, \tilde{\omega}_n) \in \Omega : \tilde{\omega}_s = \omega_s \ \forall s = 1, \ldots, t\Big\}$ für alle $t = 1, \ldots, n$
- $\mathbb{P}\Big(\{\omega\}\Big) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$
- $S_t^0 \equiv (1 + r)^t$ für alle $t = 0, \ldots, n$
- $S_0^1 \equiv s_0, \qquad S_t^1(\omega_1, \ldots, \omega_t, \ldots \omega_n) = \begin{cases} u \cdot S_{t-1}^1(\omega_1, \ldots, \omega_n) & \text{für } \omega_t = u \\ d \cdot S_{t-1}^1(\omega_1, \ldots, \omega_n) & \text{für } \omega_t = d \end{cases}$

  $$= \omega_t \cdot S_{t-1}^1(\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad \text{für alle } t = 1, \ldots, n$$

[7] Cox, J., Ross, S., Rubinstein, M., Option pricing: a simplified approach, J. Financial Economics 7 (1979), 229-263

Bezeichnung: $\Big(n, d, u, r, s_0\Big)$

Bemerkungen:

- Es gilt $\mathcal{F}_t = \sigma\Big(S_0^1, \ldots, S_t^1\Big)$ für alle $t = 0, \ldots, n$ sowie $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$.
- Zum Zeitpunkt $t = 1, \ldots, n$ nimmt S_t^1 genau $t + 1$ verschiedene Werte an, und zwar ist für $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$

$$S_t^1(\omega_1, \ldots, \omega_t, \ldots, \omega_n) \;=\; s_0 \cdot \prod_{s=1}^{t} \omega_s \;=\; s_0 \cdot u^{k(t)} \cdot d^{t-k(t)} \text{ mit } k(t) := \Big|\Big\{s \in \{1, \ldots, t\} : \omega_s = u\Big\}\Big|.$$

Satz 2.58 *Ein CRR-Modell* $\Big(n, d, u, r, s_0\Big)$ *ist genau dann arbitragefrei, wenn*

$$d \;<\; 1 + r \;<\; u$$

gilt. In diesem Fall ist das CRR-Modell vollständig und das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ *besitzt folgende Eigenschaften:*

1. *Die Quotienten* $\dfrac{S_{t+1}^1}{S_t^1}$, $t = 0, \ldots, n-1$, *sind stochastisch unabhängig bezüglich* $\mathbb{Q}$.
2. *Das Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{Q}$ *ist bestimmt durch den Parameter* $q := \dfrac{1 + r - d}{u - d}$ *und es gilt*

$$\mathbb{Q}\left(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\right) \;=\; q \quad \text{für alle } t = 0, \ldots, n-1 \tag{2.24}$$

sowie

$$\mathbb{Q}\Big(\Big\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\Big\}\Big) \;=\; q^{|\{t:\omega_t = u\}|} \cdot (1-q)^{|\{t:\omega_t = d\}|}. \tag{2.25}$$

Beweis: Siehe Anhang B.12

2.5.1 Preise von Europäischen Auszahlungsprofilen im CRR-Modell

Bemerkungen:

- Wegen $\mathcal{F} = \mathcal{F}_n = \sigma\Big(S_0^1, \ldots, S_n^1\Big)$ ist jedes Europäische Auszahlungsprofil C im CRR-Modell ein Derivat. Für das zugehörige diskontierte Europäische Auszahlungsprofil $\underset{\sim}{C}$ gilt

$$\underset{\sim}{C} \;=\; \frac{C}{(1+r)^n}$$

- Aufgrund der Endlichkeit des Zustandsraums Ω ist jede Zufallsgröße im CRR-Modell integrierbar.

- Wegen $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gibt es – außer der leeren Menge – keine $\mathbb{P}$-Nullmengen. Somit gelten insbesondere Beziehungen zwischen bedingten Erwartungen nicht nur $\mathbb{P}$-f.s., sondern sogar punktweise für alle $\omega \in \Omega$.

- In einem arbitragefreien CRR-Modell mit dem (eindeutig bestimmten) äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist der Preis eines Europäischen Auszahlungsprofils C

$$c_0(C) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_0^0) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C}\Big) \;=\; \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C)}{(1+r)^n}.$$

Der dazugehörige diskontierte Preisprozess $\underset{\sim}{V}^C = \Big(\underset{\sim}{V}{}_0^C, \dots, \underset{\sim}{V}{}_n^C\Big)$ mit

$$\underset{\sim}{V}{}_t^C \;:=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad (t = 0, \dots, n)$$

ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal. Speziell ergibt sich

$$\underset{\sim}{V}{}_t^C \;=\; \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big)}{(1+r)^n} \quad (t = 0, \dots, n)$$

bzw. für den undiskontierten Preisprozess $V^C = \Big(V_0^C, \dots, V_n^C\Big)$

$$V_t^C \;=\; \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big)}{(1+r)^{n-t}} \quad (t = 0, \dots, n)$$

und somit

$$\underset{\sim}{V}{}_n^C \;=\; \underset{\sim}{C}, \quad V_n^C \;=\; C \quad \text{und} \quad \underset{\sim}{V}{}_0^C \;=\; V_0^C = c_0(C).$$

- Wegen (2.25) ist mit $q = \dfrac{1+r-d}{u-d}$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C) &= \int C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \\ &= \sum_{(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega} C(\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot \mathbb{Q}\Big(\Big\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\Big\}\Big) \\ &= \sum_{(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\Omega} C(\omega_1, \dots, \omega_n) \cdot q^{|\{t:\omega_t=u\}|} \cdot (1-q)^{|\{t:\omega_t=d\}|} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Damit ist es möglich, den Preis jedes Europäischen Auszahlungsprofils C zu bestimmen.

- Hängt das Europäische Auszahlungsprofil C lediglich von S_n^1 und nicht von der gesamten „Vorgeschichte“ $S_0^1, \dots, S_{n-1}^1$ ab (beispielsweise wie bei den „einfachen“ Europäischen Call- und Put-Optionen), kann C ebenso wie S_n^1 lediglich $n+1$ verschiedene Werte $C_0, \dots, C_n$ – in Abhängigkeit von der Anzahl der „up“-Bewegungen – annehmen, d.h.

$$C(\omega_1, \dots, \omega_n) = C_k \quad \text{für} \quad k = \Big|\{t : \omega_t = u\}\Big|.$$

Da es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene Pfade gibt, bei denen genau k „up"-Bewegungen auftreten, vereinfacht sich in diesem Fall die Formel (2.26) zu

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k \cdot \binom{n}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{n-k}. \tag{2.27}$$

Lemma 2.59 *Gegeben seien ein arbitragefreies CRR-Modell mit dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und ein Europäisches Auszahlungsprofil C. Der (diskontierte) Preisprozess $\underset{\sim}{V}^C$ bzw. V^C – und somit der Preis $c_0(C) = \dfrac{\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C)}{(1+r)^n} = \underset{\sim}{V}{}_0^C = V_0^C$ – lässt sich folgendermaßen rekursiv bestimmen: Für $t = n-1, n-2, \ldots, 0$ ist*

$$\underset{\sim}{V}{}_t^C(\omega) \;=\; q \cdot \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C(\omega_{t+1}^u) + (1-q) \cdot \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C(\omega_{t+1}^d) \quad \textit{mit} \quad q \;=\; \frac{1+r-d}{u-d} \tag{2.28}$$

$$\textit{bzw.}\quad V_t^C(\omega) \;=\; \frac{q \cdot V_{t+1}^C(\omega_{t+1}^u) + (1-q) \cdot V_{t+1}^C(\omega_{t+1}^d)}{1+r} \tag{2.29}$$

für alle $\omega \in \Omega$, wobei sich ω_{t+1}^u bzw. ω_{t+1}^u jeweils dadurch ergeben, dass bei $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ die $t+1$-te Komponente gleich u bzw. d gesetzt wird, d.h.

$$\omega_{t+1}^u \;:=\; (\omega_1, \ldots, \omega_t, u, \omega_{t+2}, \ldots, \omega_n) \quad \textit{bzw.} \quad \omega_{t+1}^d \;:=\; (\omega_1, \ldots, \omega_t, d, \omega_{t+2}, \ldots, \omega_n).$$

Die Initialisierung erfolgt durch $\underset{\sim}{V}{}_n^C = \underset{\sim}{C}$ bzw. $V_n^C = C$.

Beweis: Aufgrund der Martingaleigenschaft von $\left(\underset{\sim}{V}{}_0^C, \ldots, \underset{\sim}{V}{}_n^C\right)$ ist

$$\underset{\sim}{V}{}_t^C \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad (t = 0, \ldots, n-1),$$

d.h.

$$\int_A \underset{\sim}{V}{}_t^C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \;=\; \int_A \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_t.$$

Da die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ von den Mengen $F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}$ mit $\omega_1, \ldots, \omega_t \in \{u, d\}$ erzeugt wird (siehe Definition 2.57), ist $\underset{\sim}{V}{}_t^C$ auf den Mengen $F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}$ konstant. Somit gilt für eine beliebige, aber feste Menge $F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}$

$$\int_{F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}} \underset{\sim}{V}{}_t^C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \;=\; \underset{\sim}{V}{}_t^C(\omega_1, \ldots, \omega_t, u, \ldots, u) \cdot \mathbb{Q}\Big(F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}\Big). \tag{2.30}$$

Die Zufallsgröße $\underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C$ ist auf den Mengen $F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,u}$ bzw. $F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,d}$ konstant. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}} \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \;&=\; \int_{F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,u} \cup F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,d}} \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \;=\; \int_{F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,u}} \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} + \int_{F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,d}} \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \\ &=\; \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C(\omega_1, \ldots, \omega_t, u, \ldots, u) \cdot \mathbb{Q}\Big(F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,u}\Big) + \underset{\sim}{V}{}_{t+1}^C(\omega_1, \ldots, \omega_t, d, \ldots, d) \cdot \mathbb{Q}\Big(F_{\omega_1,\ldots,\omega_t,d}\Big),\end{aligned}$$

woraus wegen (2.25)

$$\begin{aligned} & \int\limits_{F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}} \underset{\sim}{V}^C_{t+1}\, \mathrm{d}\mathbb{Q} && (2.31) \\ = \ & \mathbb{Q}\Big(F_{\omega_1,\ldots,\omega_t}\Big) \cdot \Big(q \cdot \underset{\sim}{V}^C_{t+1}(\omega_1,\ldots,\omega_t,u,\ldots,u) + (1-q)\cdot \underset{\sim}{V}^C_{t+1}(\omega_1,\ldots,\omega_t,d,\ldots,d)\Big) \end{aligned}$$

folgt. Aus (2.30) und (2.31) ergibt sich (2.28) und daraus unmittelbar (2.29). ■

Lemma 2.60 *Gegeben seien ein arbitragefreies CRR-Modell mit dem äquivalenten Martingalmaß* $\mathbb{Q}$ *und ein Europäisches Auszahlungsprofil* C *mit dem (diskontierten) Preisprozess* $\underset{\sim}{V}^C$ *bzw.* V^C*. Die replizierende Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t=0,\ldots,n-1}$ *mit* $\boldsymbol{H}_t = \Big(H_t^0, H_t^1\Big)^T$ *ist bestimmt durch*

$$H_t^1 = \frac{\underset{\sim}{V}^C_{t+1} - \underset{\sim}{V}^C_t}{\underset{\sim}{S}^1_{t+1} - \underset{\sim}{S}^1_t} = \frac{V^C_{t+1} - V^C_t \cdot (1+r)}{S^1_{t+1} - S^1_t \cdot (1+r)} \qquad \textit{und} \tag{2.32}$$

$$H_t^0 = \underset{\sim}{V}^C_t - H_t^1 \cdot \underset{\sim}{S}^1_t = \frac{V_t^C - H_t^1 \cdot S_t^1}{(1+r)^t} \qquad (t = 0,\ldots,n-1). \tag{2.33}$$

Beweis: Für eine replizierende (und damit auch selbstfinanzierende) Handelsstrategie gilt allgemein wegen $\underset{\sim}{S}^1_0 = \ldots = \underset{\sim}{S}^1_n = 1$

$$\underset{\sim}{V}^C_{t+1} - \underset{\sim}{V}^C_t = \boldsymbol{H}_t \cdot \Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\Big) = H_t^1 \cdot \Big(\underset{\sim}{S}^1_{t+1} - \underset{\sim}{S}^1_t\Big)$$

für $t = 0,\ldots,n-1$, woraus unmittelbar

$$H_t^1 = \frac{\underset{\sim}{V}^C_{t+1} - \underset{\sim}{V}^C_t}{\underset{\sim}{S}^1_{t+1} - \underset{\sim}{S}^1_t} = \frac{\frac{V^C_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} - \frac{V^C_t}{(1+r)^t}}{\frac{S^1_{t+1}}{(1+r)^{t+1}} - \frac{S^1_t}{(1+r)^t}} = \frac{V^C_{t+1} - V^C_t \cdot (1+r)}{S^1_{t+1} - S^1_t \cdot (1+r)}$$

folgt. Es ist allerdings zu zeigen, dass dieser Ausdruck $\mathcal{F}_t$-messbar ist trotz der auftretenden $\mathcal{F}_{t+1}$-messbaren Zufallsgrößen.
Für $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \Omega$ ist wegen (2.29)

$$\frac{V^C_{t+1}(\omega) - V^C_t(\omega)\cdot(1+r)}{S^1_{t+1}(\omega) - S^1_t(\omega)\cdot(1+r)} = \frac{V^C_{t+1}(\omega) - \Big(q\cdot V^C_{t+1}(\omega^u_{t+1}) + (1-q)\cdot V^C_{t+1}(\omega^d_{t+1})\Big)}{\omega_{t+1}\cdot S^1_t(\omega) - S^1_t(\omega)\cdot(1+r)}.$$

Für $\omega = \omega^u_{t+1}$ ergibt sich daraus

$$\frac{V^C_{t+1}(\omega^u_{t+1}) - \Big(q\cdot V^C_{t+1}(\omega^u_{t+1}) + (1-q)\cdot V^C_{t+1}(\omega^d_{t+1})\Big)}{u\cdot S^1_t(\omega^u_{t+1}) - S^1_t(\omega^u_{t+1})\cdot(1+r)} = \frac{1-q}{u-(1+r)}\cdot\frac{V^C_{t+1}(\omega^u_{t+1}) - V^C_{t+1}(\omega^d_{t+1})}{S^1_t(\omega)},$$

für $\omega = \omega^d_{t+1}$

$$\frac{V^C_{t+1}(\omega^d_{t+1}) - \Big(q\cdot V^C_{t+1}(\omega^u_{t+1}) + (1-q)\cdot V^C_{t+1}(\omega^d_{t+1})\Big)}{d\cdot S^1_t(\omega^d_{t+1}) - S^1_t(\omega^d_{t+1})\cdot(1+r)} = \frac{-q}{d-(1+r)}\cdot\frac{V^C_{t+1}(\omega^u_{t+1}) - V^C_{t+1}(\omega^d_{t+1})}{S^1_t(\omega)}.$$

Wegen $q = \dfrac{1+r-d}{u-d}$ erhält man zum einen

$$\frac{1-q}{u-(1+r)} \;=\; \frac{u-d-(1+r)+d}{(u-d)\Big(u-(1+r)\Big)} \;=\; \frac{1}{u-d},$$

zum anderen

$$\frac{-q}{d-(1+r)} \;=\; \frac{d-(1+r)}{(u-d)\Big(d-(1+r)\Big)} \;=\; \frac{1}{u-d},$$

so dass sich in beiden Fällen

$$\frac{V_{t+1}^C(\omega) - V_t^C(\omega)\cdot(1+r)}{S_{t+1}^1(\omega) - S_t^1(\omega)\cdot(1+r)} \;=\; \frac{V_{t+1}^C(\omega_{t+1}^u) - V_{t+1}^C(\omega_{t+1}^d)}{S_t^1(\omega)\cdot(u-d)}$$

ergibt. Da sowohl $V_{t+1}^C(\omega_{t+1}^u)$ als auch $V_{t+1}^C(\omega_{t+1}^d)$ lediglich von $(\omega_1,\ldots,\omega_t)$ abhängen, ist der Ausdruck

$$\frac{V_{t+1}^C - V_t^C\cdot(1+r)}{S_{t+1}^1 - S_t^1\cdot(1+r)} \;=\; H_t^1$$

somit $\mathcal{F}_t$-messbar.
Die Behauptung (2.33) folgt direkt aus

$$\underset{\sim}{V}_t^C \;=\; \boldsymbol{H}_t\cdot\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \;=\; H_t^0\cdot\underset{\sim}{S}_t^0 + H_t^1\cdot\underset{\sim}{S}_t^1 \;=\; H_t^0 + H_t^1\cdot\underset{\sim}{S}_t^1.$$

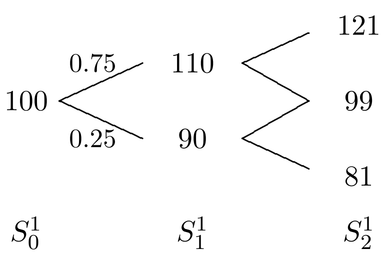
■

Bemerkung: Der Ausdruck $H_t^1 = \frac{\underset{\sim}{V}_{t+1}^C - \underset{\sim}{V}_t^C}{\underset{\sim}{S}_{t+1}^1 - \underset{\sim}{S}_t^1}$ kann als „diskrete Ableitung“ des diskontierten Wertes eines Auszahlungsprofils nach dem einzigen im CRR-Modell enthaltenen „echt stochastischen“ Wertpapier verstanden werden. Eine wie hier auf einer Ableitung basierende replizierende Handelsstrategie wird auch als **Delta Hedge** bezeichnet.

Beispiel: CRR-Modell $(n,d,u,r,s_0) = (2, 0.9, 1.1, 0.05, 100)$

$$\Longrightarrow \quad q \;=\; \frac{1+r-d}{u-d} \;=\; \frac{1.05-0.9}{0.2} \;=\; 0.75$$

(Wahrscheinlichkeit einer „up“-Bewegung unter dem risikoneutralen Maß)
Wertentwicklung von S^1:



- Europäische Call-Option $(S_2^1, 100)_{\mathrm{ECO}}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 21 \\ & & ? & \nearrow & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ ? & & & & 0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & ? & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & 0 \\ c_0(C) & & V_1^C & & C \end{array}$$

Rekursive Berechnung ($t = 1$):

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 21 \\ & & 15 & \nearrow & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ ? & & & & 0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 0 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & 0 \end{array} \qquad \frac{q \cdot C(u,u) + (1-q) \cdot C(u,d)}{1+r} = \frac{0.75 \cdot 21 + 0.25 \cdot 0}{1.05} = 15$$

$t = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 21 \\ & & 15 & \nearrow & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathbf{10.71} & & & & 0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 0 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & 0 \end{array}$$

- Europäische Put-Option $(S_2^1, 100)_{\mathrm{EPO}}$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 0 \\ & & 0.24 & \nearrow & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathbf{1.42} & & & & 1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 5.24 & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & 19 \end{array}$$

- Asiatische Call-Option $\Big(S^1, \{1, 2\}, 100\Big)_{\mathrm{AsCO}}$ (Auszahlung pfadabhängig!):

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 15.5 \quad \frac{121+110}{2} = 115.5 \\ & & 12.14 & \nearrow & \\ & \nearrow & & \searrow & 4.5 \quad \frac{99+110}{2} = 104.5 \\ \mathbf{8.67} & & & & \\ & \searrow & & \nearrow & 0 \quad \frac{99+90}{2} = 94.5 \\ & & 0 & & \\ & & & \searrow & 0 \quad \frac{99+81}{2} = 90 \end{array}$$

- Barrier Optionen: Up-and-out Put-Option $\left(S^1, 105, 100\right)_{\text{u\&oPO}}$:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & 0 & \\
 & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & 0 & \text{Obere Schranke überschritten!} \\
\mathbf{1.25} \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \\
 & & 1 & \\
 & 5.24 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & 19 &
\end{tikzcd}
$$

- Lookback Call-Option $\left(S^1\right)_{\text{LbCO}}$:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & 21 & \min : 100 \\
 & 15 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & 0 & \min : 99 \\
\mathbf{12.25} \arrow[uur] \arrow[ddr] & & & \\
 & & 9 & \min : 90 \\
 & 6.43 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & 0 & \min : 81
\end{tikzcd}
$$

2.5.2 Konvergenzeigenschaften des CRR-Modells

Wird ein *Endzeitpunkt* $T > 0$ fest vorgegeben und die Periodenanzahl n des CRR-Modells erhöht, lässt sich zeigen, dass unter bestimmten Annahmen die Verteilung von S_n^1 gegen eine logarithmische Normalverteilung konvergiert. Dies kann auch für die Herleitung expliziter Bewertungsformeln (beispielsweise die „Black-Scholes-Formel“) für bestimmte Finanzprodukte verwendet werden.

Definition 2.61 Für die Parameter $T > 0$ (Endzeitpunkt), $\hat{r} > -1$ (Zinssatz) und $\sigma > \sqrt{T} \cdot \left|\ln(1+\hat{r})\right|$ (Volatilität) sei eine Folge von CRR-Modellen

$$\left(n, d^{(n)}, u^{(n)}, r^{(n)}, s_0\right)_{n=1,2,\ldots}$$

mit

- $r^{(n)} := (1+\hat{r})^{T/n} - 1$
- $u^{(n)} := \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}}$ und
- $d^{(n)} := \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}$

(Bezeichnung: Folge konvergierender CRR-Modelle) gegeben. Die dazugehörigen Preisprozesse werden mit $S^{(n)0}$ und $S^{(n)1}$ bezeichnet.

Lemma 2.62 Für eine Folge konvergierender CRR-Modelle gemäß Definition 2.61 gilt

1. $S_n^{(n)0} = (1+\hat{r})^T$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., die Diskontierungsprozesse besitzen in allen betrachteten CRR-Modelle zum Endzeitpunkt denselben Wert.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ ist jedes CRR-Modell $\left(n, d^{(n)}, u^{(n)}, r^{(n)}, s_0\right)$ arbitragefrei.

Beweis:

1. Wegen $S_t^{(n)0} = \left(1 + r^{(n)}\right)^t$ und $1 + r^{(n)} = (1 + \hat{r})^{T/n}$ ist

$$S_n^{(n)0} \;=\; \left(1 + r^{(n)}\right)^n \;=\; \left((1 + \hat{r})^{T/n}\right)^n \;=\; (1 + \hat{r})^T .$$

2. Wegen Satz 2.58 genügt es,

$$u^{(n)} \;>\; 1 + r^{(n)} \;>\; d^{(n)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Zunächst erhält man

$$\begin{array}{lrcccl} & u^{(n)} & > & 1 + r^{(n)} & > & d^{(n)} \\ \Longleftrightarrow & e^{\sigma\sqrt{T/n}} & > & (1+\hat{r})^{T/n} & > & e^{-\sigma\sqrt{T/n}} \\ \Longleftrightarrow & \sigma \cdot \sqrt{T/n} & > & \frac{T}{n} \cdot \ln(1+\hat{r}) & > & -\sigma \cdot \sqrt{T/n} \\ \Longleftrightarrow & \multicolumn{5}{c}{\sigma \;>\; \sqrt{T/n} \cdot \ln(1+\hat{r}) \;>\; -\sigma} \\ \Longleftrightarrow & \multicolumn{5}{l}{\sigma \;>\; \sqrt{T/n} \cdot \ln(1+\hat{r}) \quad \wedge \quad \sigma \;>\; -\sqrt{T/n} \cdot \ln(1+\hat{r})} \\ \Longleftrightarrow & \multicolumn{5}{l}{\sigma \;>\; \begin{cases} \sqrt{T/n} \cdot \ln(1+\hat{r}) & \text{für } \ln(1+\hat{r}) \geq 0 \\ -\sqrt{T/n} \cdot \ln(1+\hat{r}) & \text{für } \ln(1+\hat{r}) < 0 \end{cases}} \\ \Longleftrightarrow & \multicolumn{5}{l}{\sigma \;>\; \sqrt{T/n} \cdot \left|\ln(1+\hat{r})\right|} \end{array}$$

Aus $\sigma > \sqrt{T} \cdot \left|\ln(1+\hat{r})\right|$ folgt $\sigma > \sqrt{T/n} \cdot \left|\ln(1+\hat{r})\right|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit die Behauptung. ■

Lemma 2.63 Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{Q}^{(n)}$ das äquivalente Martingalmaß für das CRR-Modell $\left(n, d^{(n)}, u^{(n)}, r^{(n)}, s_0\right)$, das bestimmt ist durch den Parameter

$$q^{(n)} := \frac{1 + r^{(n)} - d^{(n)}}{u^{(n)} - d^{(n)}}$$

(siehe Satz 2.58). Dann gilt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} q^{(n)} = \dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^{(n)}}\left(\ln S_n^{(n)1}\right) = \ln s_0 + T \cdot \left(\ln(1+\hat{r}) - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Var}^{\mathbb{Q}^{(n)}}\left(\ln S_n^{(n)1}\right) = \sigma^2 \cdot T$

Beweis:

1. Mit $x := \sqrt{T/n}$ und der Regel von Bernoulli-de l'Hospital erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} q^{(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+r^{(n)}-d^{(n)}}{u^{(n)}-d^{(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\hat{r})^{T/n} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}} \\
&= \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1+\hat{r})^{x^2} - \mathrm{e}^{-\sigma x}}{\mathrm{e}^{\sigma x} - \mathrm{e}^{-\sigma x}} \\
&= \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1+\hat{r})^{x^2}\ln(1+\hat{r})2x + \sigma\mathrm{e}^{-\sigma x}}{\sigma\mathrm{e}^{\sigma x} + \sigma\mathrm{e}^{-\sigma x}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Wegen $S_n^{(n)1} = s_0 \cdot \prod_{t=1}^{n} \frac{S_t^{(n)1}}{S_{t-1}^{(n)1}}$ ist

$$\ln S_n^{(n)1} = \ln s_0 + \sum_{t=1}^{n} \ln \frac{S_t^{(n)1}}{S_{t-1}^{(n)1}}$$

Da die Quotienten $\frac{S_t^{(n)1}}{S_{t-1}^{(n)1}}$ für $t = 1, \ldots, n$ identisch zweipunktverteilt sind, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}^{(n)}}\left(\ln \frac{S_t^{(n)1}}{S_{t-1}^{(n)1}}\right) &= q^{(n)} \cdot \ln u^{(n)} + \left(1-q^{(n)}\right) \cdot \ln d^{(n)} \\
&= q^{(n)} \cdot \ln u^{(n)} + \left(1-q^{(n)}\right) \cdot \frac{1}{\ln u^{(n)}} \\
&= q^{(n)} \cdot \ln u^{(n)} - \left(1-q^{(n)}\right) \cdot \ln u^{(n)} \\
&= \ln u^{(n)} \cdot \left(2q^{(n)} - 1\right)
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}^{(n)}}\left(\ln S_n^{(n)1}\right) = \ln s_0 + n \cdot \ln u^{(n)} \cdot \left(2q^{(n)} - 1\right).$$

Weiter erhält man

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln u^{(n)} \cdot \left(2q^{(n)} - 1\right) \\
= &\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}} \cdot \left(2 \cdot \frac{1+r^{(n)}-d^{(n)}}{u^{(n)}-d^{(n)}} - 1\right) \\
= &\lim_{x\downarrow 0} \frac{T}{x^2} \cdot \sigma x \cdot \left(2 \cdot \frac{(1+\hat{r})^{x^2} - \mathrm{e}^{-\sigma x}}{\mathrm{e}^{\sigma x} - \mathrm{e}^{-\sigma x}} - 1\right) \\
= &\lim_{x\downarrow 0} \frac{T\sigma}{x} \cdot \frac{2(1+\hat{r})^{x^2} - \mathrm{e}^{-\sigma x} - \mathrm{e}^{\sigma x}}{\mathrm{e}^{\sigma x} - \mathrm{e}^{-\sigma x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T\sigma \cdot \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1+\hat{r})^{x^2} - \cosh(\sigma x)}{x \cdot \sinh(\sigma x)} \\
&= T\sigma \cdot \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1+\hat{r})^{x^2} \ln(1+\hat{r}) 2x - \sigma \sinh(\sigma x)}{x\sigma \cdot \cosh(\sigma x) + \sinh(\sigma x)} \\
&= T\sigma \cdot \lim_{x\downarrow 0} \frac{(1+\hat{r})^{x^2} \ln(1+\hat{r}) \Big(4x^2 \ln(1+\hat{r}) + 2\Big) - \sigma^2 \cosh(\sigma x)}{x\sigma^2 \cdot \sinh(\sigma x) + 2\sigma \cdot \cosh(\sigma x)} \\
&= T\sigma \cdot \frac{2\ln(1+\hat{r}) - \sigma^2}{2\sigma} \\
&= T \cdot \left(\ln(1+\hat{r}) - \frac{\sigma^2}{2} \right)
\end{aligned}$$

und somit die gewünschte Aussage.

3. Wegen

$$\ln \frac{S_t^{(n)1}}{S_{t-1}^{(n)1}} = \ln d^{(n)} + \Big(\ln u^{(n)} - \ln d^{(n)} \Big) \cdot \mathbb{1}_{\{S_t^{(n)1}/S_{t-1}^{(n)1} = u^{(n)}\}}$$

ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}^{\mathbb{Q}^{(n)}} \left(\ln \frac{S_t^{(n)1}}{S_{t-1}^{(n)1}} \right) &= \Big(\ln u^{(n)} - \ln d^{(n)} \Big)^2 \cdot q^{(n)} \cdot \Big(1 - q^{(n)}\Big) \\
&= \Big(2 \ln u^{(n)} \Big)^2 \cdot q^{(n)} \cdot \Big(1 - q^{(n)}\Big) \\
&= 4 \Big(\ln u^{(n)} \Big)^2 \cdot q^{(n)} \cdot \Big(1 - q^{(n)}\Big)
\end{aligned}$$

und somit – wegen der Unabhängigkeit der Quotienten –

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}^{\mathbb{Q}^{(n)}} \Big(\ln S_n^{(n)1} \Big) &= 4n \cdot \Big(\ln u^{(n)} \Big)^2 \cdot q^{(n)} \cdot \Big(1 - q^{(n)}\Big) \\
&= 4n \cdot \Big(\ln \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}} \Big)^2 \cdot q^{(n)} \cdot \Big(1 - q^{(n)}\Big) \\
&= 4\sigma^2 T \cdot q^{(n)} \cdot \Big(1 - q^{(n)}\Big).
\end{aligned}$$

Es ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}^{\mathbb{Q}^{(n)}} \Big(\ln S_n^{(n)1} \Big) &= \lim_{n\to\infty} 4\sigma^2 T \cdot q^{(n)} \cdot \Big(1 - q^{(n)}\Big) \\
&= 4\sigma^2 T \lim_{n\to\infty} q^{(n)} \lim_{n\to\infty} \Big(1 - q^{(n)}\Big) \;=\; \sigma^2 T.
\end{aligned}$$

■

Satz 2.64 Die Verteilungen von $\ln S_n^{(n)1}$ konvergieren unter $\mathbb{Q}^{(n)}$ für $n \to \infty$ schwach gegen eine Normalverteilung mit den Parametern $\ln s_0 + T \cdot \left(\ln(1+\hat{r}) - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)$ und $\sigma\sqrt{T}$, d.h., die Verteilungen von $S_n^{(n)1}$ konvergieren gegen eine logarithmische Normalverteilung, also gegen die Verteilung von

$$s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_T + T\cdot\left(\ln\left(1+\hat{r}\right)-\frac{\sigma^2}{2}\right)},$$

wobei W_T eine Normalverteilung mit Parametern 0 und $\sqrt{T}$ besitzt.

Beweis: Die Aussage ergibt sich als Verallgemeinerung des zentralen Grenzwertsatzes. Die Parameter erhält man aus Lemma 2.63. ■

Bemerkung: Wird anstatt eines diskreten Zinssatzes $\hat{r}$ ein stetiger Zinssatz $\tilde{r}$ verwendet (d.h. $\mathrm{e}^{\tilde{r}} = 1 + \hat{r}$), ergibt sich als Grenzverteilung die Verteilung von $s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_T + T\cdot\left(\tilde{r}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}$.

Kapitel 3

Stochastische Finanzmathematik in stetiger Zeit: Das Black-Scholes-Modell

Literatur:

- Alison Etheridge, A Course in Financial Calculus [4]
- Albrecht Irle, Finanzmathematik [6]
- René L. Schilling und Lothar Partzsch, Brownian Motion [9]

3.1 Grundlegendes zum Black-Scholes-Modell

Es gelten weiterhin – wie beim MPM – folgende **Vereinfachungen** des Modells gegenüber der Realität:

- Keine Transaktionskosten
- Keine Dividendenzahlungen
- Kauf/Verkauf von Finanzinstrumenten in beliebigen (reellwertigen) Stückzahlen möglich
- Kein Preisunterschied zwischen Kauf und Verkauf (kein *bid-ask-spread*)

Definition 3.1 *Ein* ***Black-Scholes-Modell*** *ist ein Tupel* $\left(\mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right), S^0, S^1\right)$*, das durch die Parameter* T, r, σ, μ *und* s_0 *bestimmt ist, mit*

- *Zeithorizont* $T > 0$
- *stetige Zinsrate* $r > 0$

- *Volatilität* $\sigma > 0$
- *Drift* $\mu \in \mathbb{R}$
- *Startwert* $s_0 > 0$

sowie

- *Handelszeitraum* $\mathbb{T} = [0, T]$
- *Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$
- *Preisprozess einer Anleihe* $S_t^0 \equiv \mathrm{e}^{rt}$, $t \in \mathbb{T}$
- *Preisprozess einer Aktie* $S_t^1 = s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t}$,

wobei $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ein Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ *ist.*

Bemerkungen:

1. Analog zum zeitdiskreten Mehrperiodenmodell sollen im Folgenden Begriffe wie

   - (selbstfinanzierende) Handelsstrategie
   - Arbitrage
   - Replizierbarkeit
   - Vollständigkeit
   - Äquivalentes Martingalmaß

   definiert und deren Zusammenhänge untereinander untersucht werden.

   Es wird sich zeigen, dass der Begriff der „selbstfinanzierenden Handelsstrategie“ und die damit zusammenhängenden Begriffe Arbitrage, Replizierbarkeit und Vollständigkeit prinzipiell schwieriger zu handhaben sind als im zeitdiskreten Modell.

   Deswegen wird zunächst der Begriff des „Äquivalenten Martingalmaßes“ und dessen Bedeutung für die Festsetzung eines fairen Preises ausgesuchter Finanzprodukte untersucht werden.

2. Grundlegend für die Eigenschaften des Black-Scholes-Modells sind die Eigenschaften des Wienerprozesses, auf den im Folgenden als erstes eingegangen werden wird.

3. Der Preisprozess der Aktie ist Lösung der stochastischen Differentialgleichung

   $$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t \tag{3.1}$$

   (wird später mit Mitteln der stochastischen Analysis gezeigt).

   Diese Differentialgleichung kann aber bereits jetzt durch folgende Überlegungen motiviert werden:

- Zweidimensionale Taylor-Formel für eine unendlich oft (partiell) differenzierbare Funktion $S : U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $(x,t), (x_0, t_0) \in U$:

$$\begin{aligned} S(x,t) &= S(x_0,t_0) + S_x(x_0,t_0) \cdot (x - x_0) + S_t(x_0,t_0) \cdot (t - t_0) + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot \Big(S_{xx}(x_0,t_0) \cdot (x-x_0)^2 + 2 \cdot S_{xt}(x_0,t_0) \cdot (x-x_0) \cdot (t-t_0) + \\ &\qquad S_{tt}(x_0,t_0) \cdot (t-t_0)^2 \Big) + \frac{1}{3!} \cdot \Big(S_{xxx}(x_0,t_0) \cdot (x-x_0)^3 + \ldots \end{aligned}$$

- Abbruch nach der 2. partiellen Ableitung S_{xx}:

$$\begin{aligned} S(x,t) &\approx S(x_0,t_0) + S_x(x_0,t_0) \cdot (x - x_0) + S_t(x_0,t_0) \cdot (t - t_0) + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot S_{xx}(x_0,t_0) \cdot (x-x_0)^2 \end{aligned}$$

- Alternative Schreibweise mit $x := x + \Delta x$, $t := t + \Delta t$, $x_0 := x$ und $t_0 := t$ $\Big(\Delta x, \Delta t > 0, (x + \Delta x, t + \Delta t) \in U\Big)$:

$$\begin{aligned} S(x+\Delta x, t+\Delta t) &\approx S(x,t) + S_x(x,t) \cdot \Delta x + S_t(x,t) \cdot \Delta t + \\ &\quad \frac{1}{2} \cdot S_{xx}(x,t) \cdot \Delta^2 x \end{aligned}$$

- Anwendung auf $S(x,t) := s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma x - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t}$ (damit ist $S(W_t, t) = S_t^1$) mit $S_x = \sigma \cdot S$, $S_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot S$ und $S_{xx} = \sigma^2 \cdot S$:

$$\begin{aligned} S(x+\Delta x, t+\Delta t) &\approx S(x,t) + \sigma \cdot S(x,t) \cdot \Delta x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot S(x,t) \cdot \Delta t + \\ &\quad \frac{\sigma^2}{2} \cdot S(x,t) \cdot \Delta^2 x \end{aligned}$$

- Mit $\Delta S(x,t) := S(x+\Delta x, t+\Delta t) - S(x,t)$ ergibt sich

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \sigma \Delta x + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \frac{\sigma^2}{2} \Delta^2 x$$

- Mit $x := W_t$ und $\Delta x := \Delta W_t := W_{t+\Delta t} - W_t$ erhält man weiter formal

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \sigma \Delta W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \frac{\sigma^2}{2} \Delta^2 W_t$$

und wegen $\mathrm{E}\Big(\Delta^2 W_t\Big) = \mathrm{Var}\left(W_{t+\Delta t} - W_t\right) = \Delta t$ (Erläuterung siehe unten)

$$\frac{\Delta S}{S} \approx \sigma \Delta W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \frac{\sigma^2}{2} \Delta t = \mu \Delta t + \sigma \Delta W_t,$$

was strukturell der stochastischen Differentialgleichung (3.1) entspricht.

3.1.1 Der Wienerprozess

Definition 3.2 *Sei $\mathbb{T} = [0, T]$ bzw. $\mathbb{T} = [0, \infty)$. Ein stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ heißt ein **Wienerprozess** (im Zeitintervall $\mathbb{T}$), falls er folgende Eigenschaften besitzt:*

(a) $W_0(\omega) = 0$ *für alle* $\omega \in \Omega$

(b) Für eine beliebige Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $(n \in \mathbb{N}, t_n \in \mathbb{T})$ *sind die Zufallsgrößen*

$$W_{t_1} - W_{t_0},\; W_{t_2} - W_{t_1},\; \ldots,\; W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

unabhängig.

(c) Für beliebige $s, t \in \mathbb{T}$ *mit* $s < t$ *ist*

$$W_t - W_s \;\sim\; \mathrm{N}(0, t - s),$$

d.h., $W_t - W_s$ *ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz* $t - s$*.*

(d) $t \mapsto W_t(\omega)$ *ist stetig für alle* $\omega \in \Omega$*, d.h.,* W *besitzt stetige Pfade.*

Bemerkungen:

1. Der Namensgeber des Wienerprozesses ist der amerikanische Mathematiker Norbert Wiener (1894-1964). Ihm gelang 1923 der erste Existenzbeweis für diesen Prozess.

2. Der Wienerprozess wird oft auch als **Brown'sche Bewegung** bezeichnet (wobei dann üblicherweise die Bezeichnung B_t anstatt W_t verwendet wird). 1827 beobachtete der schottische Botaniker Robert Brown die irregulären „zitternden“ Bewegungen von Pflanzenpollen in einem Wassertropfen, die durch Stöße der Wassermoleküle erzeugt werden. Bekannt wurde der Wienerprozess durch eine Arbeit von Einstein 1905, wobei er von Bachelier bereits 1900 in seiner Arbeit über Finanzmärkte verwendet wurde.

3. Die Zufallsgrößen $W_t - W_s$ $(t, s \in \mathbb{T}, s < t)$ werden auch als **Zuwächse** bezeichnet. Diese Zuwächse sind gemäß (b) nicht nur unabhängig, sondern gemäß (c) auch **stationär**, d.h., die Zuwächse hängen nur von der Differenz $t - s$ und nicht von den konkreten Werten für t und s ab. Bezeichnung:

   $$W_t - W_s \;\sim\; W_{t+h} - W_{s+h}$$

   für $t, s, t+h, s+h \in \mathbb{T}$. Somit ist der Wienerprozess ein **Lévy-Prozess** (Paul Lévy: französischer Mathematiker, 1886-1971), d.h., ein Prozess mit unabhängigen, stationären Zuwächsen, dessen Pfade rechtsseitig stetig sind und linksseitige Limites besitzen („càdlàg“).

4. W_t ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t (siehe (c) mit $s = 0$).

5. Die Verteilung des Zuwachses $W_t - W_s$ $(t, s \in \mathbb{T}, s < t)$ besitzt die Dichte

$$p_{t-s}: \; x \;\mapsto\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}.$$

6. Für beliebige $t, s \in \mathbb{T}$ (es muss nicht notwendigerweise $s < t$ gelten) erhält man für die Kovarianz von W_t und W_s

$$\operatorname{cov}(W_s, W_t) = \min(s, t),$$

denn für den Fall $s \leq t$ erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(W_s, W_t) &= \mathrm{E}\Big((W_s - \mathrm{E}W_s) \cdot (W_t - \mathrm{E}W_t)\Big) = \mathrm{E}\Big(W_s \cdot W_t\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(W_s \cdot (W_t - W_s)\Big) + \mathrm{E}W_s^2 \overset{\text{unabh.}}{=} \mathrm{E}W_s \cdot \mathrm{E}(W_t - W_s) + \operatorname{Var}(W_s) \\
&= 0 \cdot 0 + s,
\end{aligned}$$

für den Fall $s > t$ analog $\operatorname{cov}(W_s, W_t) = t$.

Der n-dimensionale Vektor $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ mit $0 < t_1 < \ldots < t_n$ und $t_n \in \mathbb{T}$ besitzt demnach eine n-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $\mathbf{0}^n$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{K} = (K_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit $K_{ij} = \min(t_i, t_j)$. Die dazugehörige Dichte ist demnach

$$f_{(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})}: \; (x_1, \ldots, x_n) \;\mapsto\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \det \boldsymbol{K}}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1, \ldots, x_n)^T \cdot \boldsymbol{K}^{-1} \cdot (x_1, \ldots, x_n)}$$

Ein Wienerprozess ist somit ein **Gaußprozess** (d.h. ein stochastischer Prozess, dessen endlichdimensionale Verteilungen (mehrdimensionale) Normalverteilungen sind) mit der Mittelwertfunktion $t \mapsto \mathrm{E}W_t = 0$ und der Kovarianzfunktion $(s, t) \mapsto \operatorname{cov}(W_s, W_t) = \min(s, t)$ $(s, t \in \mathbb{T})$.

7. Alternativ kann zur Bestimmung der endlichdimensionalen Verteilungen von W man von der Verteilung des n-dimensionalen Vektors der Zuwächse $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ mit $0 < t_1 < \ldots < t_n$ ausgehen, dessen Kovarianzmatrix eine Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$ mit den Elementen $t_i - t_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n,\; t_0 := 0)$ ist und dessen Verteilung somit die Dichte

$$f_{(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})}: \; (x_1, \ldots, x_n) \;\mapsto\; \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{t_i - t_{i-1}}}$$

besitzt. Die lineare Transformation mittels der $n \times n$-Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

führt dann zu

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}^T.$$

8. Ein Wienerprozess ist ein **Markovprozess** (Andrej Markov: russischer Mathematiker, 1856-1922), d.h., ein Prozess mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(W_t \in B \mid W_u, u \leq s) = \mathbb{P}(W_t \in B \mid W_s) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

für $B \in \mathcal{B}$ und $s, t \in \mathbb{T}$, $s \leq t$ („gedächtnisloser Prozess"). Darüber hinaus ist er homogen, d.h., die Übergangsdichte

$$p(s,t,x,y) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}} \qquad \left(\text{„} \; \mathbb{P}(W_t = y \mid W_s = x)\text{"}\right)$$

mit $s, t \in \mathbb{T}$, $s < t$, $x, y \in \mathbb{R}$ hängt lediglich von der Differenz $t - s$ und nicht von den konkreten Werten von s und t ab (dies entspricht der Stationarität der Zuwächse). Die Dichte der Verteilung des Vektors $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ mit $0 < t_1 < \ldots < t_n$ und $t_n \in \mathbb{T}$ lässt sich dann auch als Produkt der Übergangsdichten

$$\begin{aligned} f_{(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})} : \; (x_1, \ldots, x_n) \;&\mapsto\; \prod_{i=1}^{n} p(t_{i-1}, t_i, x_{i-1}, x_i) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit $t_0 = 0$ und $x_0 := 0$ angeben. Diese Dichte unterscheidet sich von der Dichte der Zuwächse lediglich in dem Ausdrücken „$(x_i - x_{i-1})^2$" anstatt „x_i^2" im Exponenten.

9. Es gibt mehrere Existenzbeweise für den Wienerprozess (siehe Vorlesung „Stochastische Prozesse"):

   - Satz von Kolmogorov: „Kanonische Konstruktion" eines stochastischen Prozesses, dessen endlichdimensionale Verteilungen bekannt sind
   - Lévy-Ciesielski-Darstellung mit Hilfe geeigneter Reihendarstellungen (Zbigniew Ciesielski: polnischer Mathematiker, *1934)
   - Lévys Polygon-Approximation
   - Wiener-Ansatz über trigonometrischen Reihen

- Donskers Invarianzprinzip (Monroe D. Donsker: amerikanischer Mathematiker, 1925-1991): Approximation durch stückweise lineare Pfade (theoretische Grundlage für Simulationen, s.u.)

Lemma 3.3 *Der Wienerprozess $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ besitzt folgende sogenannte* ***Invarianzeigenschaften:***

1. $(-W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein Wienerprozess („Spiegelungsinvarianz").*
2. $(c \cdot W_{t/c^2})_{t\in\tilde{\mathbb{T}}}$ *mit* $\tilde{\mathbb{T}} = \begin{cases} [0,\infty) & \text{für } \mathbb{T} = [0,\infty) \\ [0, c^2 \cdot T] & \text{für } \mathbb{T} = [0,T] \end{cases}$ *ist ein Wienerprozess für alle* $c > 0$ *(„Skaleninvarianz").*
3. $(t \cdot W_{1/t})_{t\in\mathbb{T}}$ *mit* $t \cdot W_{1/t} := 0$ *für* $t = 0$ *und* $\mathbb{T} = [0,\infty)$ *ist ein Wienerprozess („Projektionsinvarianz").*
4. $(W_{T-t} - W_T)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist für* $\mathbb{T} = [0,T]$ *ein Wienerprozess („Invarianz bei Zeitumkehr").*
5. $(W_{t+c} - W_c)_{t\in\tilde{\mathbb{T}}}$ *mit* $\tilde{\mathbb{T}} = \begin{cases} [0,\infty) & \text{für } \mathbb{T} = [0,\infty) \\ [0, T-c] & \text{für } \mathbb{T} = [0,T] \end{cases}$ *ist ein Wienerprozess für* $c \in \mathbb{T}$ *(„Erneuerungseigenschaft").*

Beweis: Siehe Vorlesung „Stochastische Prozesse"

Lemma 3.4 *Die Pfade* $t \mapsto W_t(\omega)$ *eines Wienerprozesses* $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *sind für* $\mathbb{P}$*-fast alle* $\omega \in \Omega$ *nirgendwo differenzierbar.*

Beweis: siehe Anhang C.1

Bemerkung: Aufgrund der Nichtdifferenzierbarkeit der Pfade des Wienerprozesses ist ein auf den Wienerprozess aufbauendes Differentialkalkül (wie für die stochastische Differentialgleichung (3.1) benötigt) problematisch. Tatsächlich wird sich zeigen, dass stochastische Differentialgleichungen wie (3.1) lediglich eine *Schreibweise* für stochastische *Integral*gleichungen sind.

Weitere „pathologische" Eigenschaften des Wienerprozesses:

- Fast alle Pfade sind Hölder-stetig für $\alpha < 1/2$, aber nicht für $\alpha = 1/2$, insbesondere sind sie nicht Lipschitz-stetig (d.h. Hölder-stetig für $\alpha = 1$).
- Fast alle Pfade sind nirgends monoton.
- Die lokalen Maxima fast aller Pfade liegen dicht.
- Jede reelle Zahl wird fast sicher unendlich oft erreicht. Außerdem wird fast sicher immer wieder zur Null zurückgekehrt.

3.1.2 Simulation eines Wienerprozesses und einer geometrischen Brown'schen Bewegung

- Zur Simulation des Pfades eines Wienerprozesses $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ wird eine Folge $Z_1, Z_2, \ldots$ von unabhängigen und identisch standardnormalverteilten Zufallsgrößen benötigt. Die Erzeugung entsprechender Zufallszahlen wird in Abschnitt C.2 beschrieben.

- Für $t \in \mathbb{T}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt allgemein

  $$W_t \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(W_{\frac{i}{n}\cdot t} - W_{\frac{i-1}{n}\cdot t} \right)$$

  („Teleskopsumme"). Da die Zufallsgrößen $\left(W_{\frac{i}{n}\cdot t} - W_{\frac{i-1}{n}\cdot t} \right)$ unabhängig und identisch normalverteilt sind mit Erwartungswert Null und Varianz t/n, gilt demnach bei Verwendung einer Folge $Z_1, Z_2, \ldots$ von unabhängigen und standardnormalverteilen Zufallsgrößen

  $$W_t \;\sim\; \sqrt{t/n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i \qquad \text{bzw.} \qquad W_{\frac{i}{n}\cdot t} \;\sim\; W_{\frac{i-1}{n}\cdot t} + \sqrt{t/n} \cdot Z_i$$

  Mit $\delta := \delta(t,n) := t/n$ erhält man somit für $i = 1, \ldots, n$

  $$W_{i\cdot\delta} \;\sim\; W_{(i-1)\cdot\delta} + \sqrt{\delta} \cdot Z_i.$$

- Wird nun zwischen den „Zwischenpunkten"

  $$0,\; \sqrt{\delta}\cdot Z_1,\; \sqrt{\delta}\cdot(Z_1 + Z_2),\; \ldots,\; \sqrt{\delta}\cdot\sum_{i=1}^{n} Z_i$$

  linear interpoliert und geht $n \to \infty$, so lässt sich zeigen, dass diese Pfade gegen die Pfade eines Wienerprozesses konvergieren (Donskers Invarianzprinzip).

- Zur Simulation der Pfade des Preisprozesses der Aktie $(S_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ im Black-Scholes-Modell mit

  $$S_t^1 \;=\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

  kann nun die Simulation eines solchen Wienerprozesses verwendet werden. Mit obigen Bezeichnungen ist

  $$\begin{aligned} S_t^1 \;\sim\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{(\mu-\sigma^2/2)\cdot t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{\delta}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i} \;&=\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{(\mu-\sigma^2/2)\cdot t} \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{\delta}\cdot Z_i} \\ &=\; s_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{\delta}\cdot Z_i + \delta\cdot(\mu-\sigma^2/2)} \end{aligned}$$

  bzw.

  $$S_{i\cdot\delta}^1 \;\sim\; S_{(i-1)\cdot\delta}^1 \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{\delta}\cdot Z_i + \delta\cdot(\mu-\sigma^2/2)}$$

- Aufgrund der multiplikativen Konstruktion wird der Preisprozess der Aktie $(S_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ auch als **geometrische Brown'sche Bewegung** mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$, Volatilität $\sigma > 0$ und Startwert $s_0 > 0$ bezeichnet.
- Die üblicherweise verwendete Zeiteinheit ist „Jahre".

3.1.3 Martingaleigenschaften des Wienerprozesses

Definition 3.5 *Es sei* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \big(\mathcal{F}_t\big)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\Big)$ *ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, d.h.,* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ *ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *eine Filtration, d.h. eine Familie von Unter-*σ*-Algebren* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ *für* $t \in \mathbb{T}$ *mit*

$$\mathcal{F}_s \ \subset \ \mathcal{F}_t \qquad \text{für } s < t,\ s,t \in \mathbb{T}.$$

Dann heißt ein stochastischer Prozess $X = \Big(X_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *auf diesem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum ein (*$\mathbb{P}$*-)**Martingal** bezüglich* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$*, falls er folgende Eigenschaften besitzt:*

1. X *ist adaptiert an* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$*, d.h.* X_t *ist* $\mathcal{F}_t$*-messbar für alle* $t \in \mathbb{T}$.
2. $\mathrm{E}(|X_t|) < \infty$ *für alle* $t \in \mathbb{T}$.
3. $\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ $\mathbb{P}$*-f.s. für alle* $s < t,\ \ s,t \in \mathbb{T}$.

Bemerkungen:

1. Ein Martingal ist die mathematische Beschreibung eines „fairen Spiels": Wird die Filtration als die zeitliche Entwicklung der zur Verfügung stehenden Information interpretiert, besagt Eigenschaft 3., dass die beste „Vorhersage" des zukünftigen Wertes des betrachteten Prozesses der derzeitige Zustand des Prozesses selbst ist, dass also „im Mittel" keine Verbesserung oder Verschlechterung des derzeitigen Zustands zu erwarten ist.
2. Insbesondere gilt für ein Martingal $X = \Big(X_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ aufgrund der „Tower property" (siehe Anhang B.9)
$$\mathrm{E}X_t \ = \ \mathrm{E}\Big(X_t \mid \{0,\Omega\}\Big) \ = \ \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_0) \mid \{0,\Omega\}\Big) \ = \ \mathrm{E}X_0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{T},$$
d.h., der Erwartungswert hängt nicht von t ab.
3. Eine lineare Transformation eines Martingals ist aufgrund der Linearität der bedingten Erwartung wiederum ein Martingal.

Wegen der Martingaleigenschaft ist der Wienerprozess und einige seiner Transformationen in besonderem Maße zur Beschreibung von „fairen Spielen" (wie z.B. ein Finanzmarkt) geeignet.

Lemma 3.6 *Es sei* $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ein Wienerprozess über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ *und* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *die dazugehörige natürliche Filtration, d.h.* $\mathcal{F}_t = \sigma\Big(W_s, s\in[0,t]\Big)$*. Dann gilt:*

(a) $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein Martingal bezüglich* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$.

(b) $(W_t^2 - t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein Martingal bezüglich* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$.

(c) $(\mathrm{e}^{aW_t - \frac{1}{2}a^2t})_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein Martingal bezüglich* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *für alle* $a\in\mathbb{R}$.

Beweis: Eigenschaft 1. eines Martingals ist aufgrund der Konstruktion von $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ erfüllt. Zu Eigenschaft 2. ergibt sich, da W_t normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz t ist:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(|W_t|\Big) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\int_0^{\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^{\infty} x\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{Subst. } z=\tfrac{x^2}{2t}\Rightarrow \mathrm{d}x=\tfrac{t}{x}\mathrm{d}z) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_0^{\infty} t\cdot\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}z \;=\; \sqrt{\frac{2t}{\pi}}\cdot\Big[-\mathrm{e}^{-z}\Big]_0^{\infty} \;=\; \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \;<\; \infty
\end{aligned}$$

für alle $t\in\mathbb{T}$.

(b) Es gilt

$$\mathrm{E}\Big(|W_t^2 - t|\Big) \;\le\; \mathrm{E}\Big(W_t^2\Big) + t \;=\; 2t \;<\; \infty$$

für alle $t\in\mathbb{T}$. Da $W_t/\sqrt{t}$ standardnormalverteilt ist, ist darüber hinaus W_t^2/t χ^2-verteilt mit Freiheitsgrad 1 (eine Summe von n unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsgrößen besitzt eine χ^2-Verteilung mit Freiheitsgrad n). Der Erwartungswert einer χ^2-verteilten Zufallsgröße gleich der Anzahl der Freiheitsgrade.

(c) Da die Zufallsgröße $a\cdot W_t - \frac{1}{2}a^2t$ normalverteilt ist mit den Parametern

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \mathrm{E}\left(a\cdot W_t - \frac{1}{2}a^2t\right) \;=\; -\frac{1}{2}a^2t \qquad \text{und} \\
\sigma_t^2 &= \mathrm{Var}\left(a\cdot W_t - \frac{1}{2}a^2t\right) \;=\; \mathrm{Var}\left(a\cdot W_t\right) \;=\; a^2t,
\end{aligned}$$

ist $\mathrm{e}^{a\cdot W_t - \frac{1}{2}a^2t}$ logarithmisch normalverteilt (siehe Anhang C.3) mit den Parametern μ_t und σ_t^2. Somit ist

$$\mathrm{E}\left(\left|\mathrm{e}^{a\cdot W_t-\frac{1}{2}a^2t}\right|\right) \;=\; \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{a\cdot W_t-\frac{1}{2}a^2t}\right) \;=\; \mathrm{e}^{\mu_t+\frac{\sigma_t^2}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2t+\frac{a^2t}{2}} \;=\; 1 \;<\; \infty$$

(dass dieser Erwartungswert nicht von t abhängt, sollte nicht überraschen; im Gegenteil: Dies ist eine notwendige Bedingung für die Martingaleigenschaft – siehe obige Bemerkung).

Es verbleibt, Eigenschaft 3. zu zeigen:

(a) Für $s < t,\ s,t \in \mathbb{T}$, ergibt sich wegen der Unabhängigkeit von $W_t - W_s$ von $\mathcal{F}_s$ und der $\mathcal{F}_s$-Messbarkeit von W_s

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(W_t \mid \mathcal{F}_s\Big) &= \mathrm{E}\Big(W_s + (W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(W_s \mid \mathcal{F}_s\Big) + \mathrm{E}\Big(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= W_s + \mathrm{E}\Big(W_t - W_s\Big) \;=\; W_s
\end{aligned}$$

(b) Für $s < t,\ s,t \in \mathbb{T}$, ergibt sich wegen der Unabhängigkeit von $W_t - W_s$ von $\mathcal{F}_s$, der $\mathcal{F}_s$-Messbarkeit von W_s („Taking out what is known", siehe Anhang B.9) und der $\mathrm{N}(0, t-s)$-Verteilung von $W_t - W_s$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(W_t^2 - W_s^2 \mid \mathcal{F}_s\Big) &= \mathrm{E}\Big(\Big(W_t - W_s\Big)^2 + 2W_s \cdot \Big(W_t - W_s\Big) \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(\Big(W_t - W_s\Big)^2 \mid \mathcal{F}_s\Big) + 2\mathrm{E}\Big(W_s \cdot \Big(W_t - W_s\Big) \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(\Big(W_t - W_s\Big)^2\Big) + 2W_s \cdot \mathrm{E}\Big(W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= \underbrace{\mathrm{Var}\,(W_t - W_s)}_{=\ t-s} + 2W_s \cdot \underbrace{\mathrm{E}\Big(W_t - W_s\Big)}_{=\ 0} \;=\; t - s,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\Big) &= \mathrm{E}\Big(W_t^2 \mid \mathcal{F}_s\Big) - t + W_s^2 - \mathrm{E}\Big(W_s^2 \mid \mathcal{F}_s\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big(W_t^2 - W_s^2 \mid \mathcal{F}_s\Big) - t + W_s^2 \;=\; (t-s) - t + W_s^2 \\
&= W_s^2 - s.
\end{aligned}$$

(c) Für $s < t,\ s,t \in \mathbb{T}$, ist $a \cdot (W_t - W_s)$ normalverteilt mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = a^2 \cdot (t-s)$, somit ist $\mathrm{e}^{a \cdot (W_t - W_s)}$ log-normalverteilt mit dem Erwartungswert

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{a \cdot (W_t - W_s)}\right) \;=\; \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2 \cdot (t-s)}.$$

Es ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{aW_t - \frac{1}{2}a^2 t} \mid \mathcal{F}_s\right) \\
=\;& \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2 t} \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{a \cdot (W_t - W_s + W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2 t} \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{aW_s} \cdot \mathrm{e}^{a \cdot (W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2 t} \cdot \mathrm{e}^{aW_s} \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{a\cdot(W_t-W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) \;=\; \mathrm{e}^{aW_s-\frac{1}{2}a^2 t} \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{a\cdot(W_t-W_s)}\right) \\
&= \mathrm{e}^{aW_s-\frac{1}{2}a^2 t} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2\cdot(t-s)} \;=\; \mathrm{e}^{aW_s-\frac{1}{2}a^2 s}
\end{aligned}
$$

■

Bemerkungen:

1. Der Prozess $(\mathrm{e}^{aW_t-\frac{1}{2}a^2 t})_{t\in\mathbb{T}}$ wird auch als **Exponentialmartingal** bezeichnet.

2. Im Black-Scholes-Modell wird der Preisprozess einer Aktie durch den Prozess $(S_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$S_t^1 \;=\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t} \;=\; \mathrm{e}^{\sigma W_t - \left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu\right)\cdot t + \ln s_0}$$

mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$, Volatilität $\sigma > 0$ und Startwert $s_0 > 0$ beschrieben. Da die Zufallsgröße

$$\sigma W_t - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right) \cdot t + \ln s_0$$

eine Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu_t = \ln s_0 - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu\right) \cdot t$ und Varianz $\sigma_t^2 = \sigma^2 t$ besitzt, ist S_t^1 somit log-normalverteilt mit dem Erwartungswert

$$\mathrm{E}S_t^1 \;=\; \mathrm{e}^{\mu_t + \frac{\sigma_t^2}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{\ln s_0 - \left(\frac{\sigma^2}{2}-\mu\right)\cdot t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \;=\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t}$$

Insbesondere ist der Preisprozess der Aktie selbst (d.h. eine geometrische Brown'sche Bewegung) nur für den Fall $\mu = 0$ ein $\mathbb{P}$-Martingal bezüglich der natürlichen Filtration des Wienerprozesses.

3.2 Das äquivalente Martingalmaß im Black-Scholes-Modell

Wie oben bereits erwähnt, soll die Preisfindung im Black-Scholes-Modell zunächst über ein äquivalentes Martingalmaß erfolgen, dass analog zu dem im zeitdiskreten Mehrperioden-Marktmodell definiert ist. Aufgrund der Interpretation eines Martingals als „faires Spiel“ ist diese Vorgehensweise plausibel, wobei der Zusammenhang zwischen dem äquivalenten Martingalmaß und der (bisher weder definierten noch behandelten) Arbitragefreiheit des Black-Scholes-Modells erst später untersucht werden wird.

Definition 3.7 *Gegeben sei ein durch die Parameter T, r, σ, μ und s_0 bestimmtes Black-Scholes-Modell $\left(\mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right), S^0, S^1\right)$. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ heißt* ***äquivalentes Martingalmaß*** *im Black-Scholes-Modell, falls es folgende Eigenschaften besitzt:*

1. *$\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$, d.h., $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ besitzen dieselben Nullmengen.*
2. *Der diskontierte Preisprozess der Aktie $\left(\underset{\sim}{S}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit*

   $$\underset{\sim}{S}_t \;:=\; \frac{S_t^1}{S_t^0} \;=\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{(\mu-r)\cdot t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t}$$

   ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal bezüglich der natürlichen Filtration des Wienerprozesses $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$, d.h.

   $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{S}_t \mid \mathcal{F}_s\right) = \underset{\sim}{S}_s \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } s < t, \;\; s, t \in \mathbb{T}.$$

Bemerkungen:

1. Gilt $\mu = r$, so ist der diskontierte Preisprozess der Aktie ein Exponentialmartingal und somit $\mathbb{P}$ bereits ein äquivalentes Martingalmaß. Da der Erwartungswert des Preisprozesses der Aktie z. Ztpkt. t $s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t}$ ist, bedeutet dies, dass sich der Preisprozess der Aktie im Mittel wie der Preisprozess der Anleihe verhält. In der Praxis wird häufig von dieser Annahme ausgegangen, so dass für die Preisfindung in diesem Fall das „natürliche gegebene“ Maß $\mathbb{P}$ selbst verwendet wird.
2. Ist $\mu \neq r$, so wird im Folgenden ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ konstruiert, bezüglich dessen sich der Preisprozess der Aktie und der Preisprozess der Anleihe im Mittel gleich verhalten. Insbesondere wird sich zeigen, dass $\tilde{W} = \left(\tilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

   $$\tilde{W}_t \;:=\; W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t \qquad \text{für } t \in \mathbb{T}$$

   ein Wienerprozess bezüglich $\mathbb{Q}$ ist, da sich in diesem Fall

   $$W_t \;=\; \tilde{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t$$

und somit

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S}_t &= s_0 \cdot \mathrm{e}^{(\mu-r)\cdot t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t} = s_0 \cdot \mathrm{e}^{(\mu-r)\cdot t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma \tilde{W}_t - (\mu-r)\cdot t - \frac{\sigma^2}{2} t} \\ &= s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t} \end{aligned} \tag{3.4}$$

ergibt, d.h., durch den Maßwechsel erfolgt eine „Verschiebung“ des Wienerprozesses, die dazu führt, dass sich der Preisprozess der Aktie im Mittel wie der Preisprozess der Anleihe verhält. Die theoretische Grundlage dafür liefert der folgende Satz, der ein Spezialfall des **Satzes von Girsanov** darstellt (Igor Wladimirowitsch Girsanov, 1934-1967, russischer Mathematiker).

3. Es wird später noch gezeigt werden, dass das äquivalente Martingalmaß im Black-Scholes-Modell eindeutig bestimmt ist. Im Folgenden wird daher bereits von „dem“ äquivalenten Martingalmaß gesprochen.

Satz 3.8 *Es seien $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ $(\mathbb{T} = [0,T])$ ein Wienerprozess über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ und $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Seien weiter*

$$L_T := \mathrm{e}^{-aW_T - \frac{1}{2}a^2 T}$$

eine Zufallsgröße auf $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ sowie $\tilde{\mathbb{P}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ mit der Dichte L_T bezüglich $\mathbb{P}$, d.h.

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) := \int_A L_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{F}.$$

Dann ist der Prozess $\tilde{W} = \left(\tilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\tilde{W}_t := W_t + a \cdot t \qquad \text{für } t \in \mathbb{T}$$

ein Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}}\right)$.

Beweis: Zu zeigen ist:

(a) $\tilde{W}_0(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$

(b) Für eine beliebige Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $(n \in \mathbb{N}, t_n \in \mathbb{T})$ sind die Zufallsgrößen

$$\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0},\ \tilde{W}_{t_2} - \tilde{W}_{t_1},\ \ldots,\ \tilde{W}_{t_n} - \tilde{W}_{t_{n-1}}$$

bezüglich $\tilde{\mathbb{P}}$ unabhängig.

(c) Für beliebige $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s < t$ ist $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$ bezüglich $\tilde{\mathbb{P}}$.

(d) $t \mapsto \tilde{W}_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$, d.h., $\tilde{W}$ besitzt stetige Pfade.

Zu (a): Es gilt $\tilde{W}_0(\omega) = W_0(\omega) + a \cdot 0 = W_0(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$, da W ein Wienerprozess ist.

Zu (d): W besitzt stetig Pfade, somit auch $\tilde{W}$.

Zu (c): Die Zuwächse $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s$ sind auch bezüglich $\mathbb{P}$ (hier noch nicht $\tilde{\mathbb{P}}$!) normalverteilt, und zwar mit Erwartungswert $a \cdot (t-s)$ und Varianz $t-s$, denn

$$\tilde{W}_t - \tilde{W}_s \;=\; W_t - W_s + a \cdot (t-s) \;\sim\; \mathrm{N}\Big(a \cdot (t-s), t-s\Big)$$

Zu (b): $\tilde{W}$ besitzt unabhängige Zuwächse bezüglich $\mathbb{P}$ (hier noch nicht $\tilde{\mathbb{P}}$!), da

$$W_{t_1} - W_{t_0} + a \cdot (t_1 - t_0),\; W_{t_2} - W_{t_1} + a \cdot (t_2 - t_1),\; \ldots,\; W_{t_n} - W_{t_{n-1}} + a \cdot (t_n - t_{n-1})$$

und somit auch

$$\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0},\; \tilde{W}_{t_2} - \tilde{W}_{t_1},\; \ldots,\; \tilde{W}_{t_n} - \tilde{W}_{t_{n-1}}$$

unabhängig bezüglich $\mathbb{P}$ sind.

Es verbleibt zu zeigen, dass $\tilde{W}$ bezüglich $\tilde{\mathbb{P}}$ unabhängige Zuwächse mit

$$\tilde{W}_t - \tilde{W}_s \sim \mathrm{N}\Big(0, t-s\Big)$$

für $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s < t$ besitzt. Dies geschieht, indem die endlichdimensionalen Verteilungen des Vektors $\Big(\tilde{W}_{t_1}, \ldots, \tilde{W}_{t_n}\Big)$ bezüglich $\tilde{\mathbb{P}}$ mit $0 < t_1 < \ldots < t_n \leq T$ $(n \in \mathbb{N})$ betrachtet werden. O.B.d.A. sei $t_n = T$, denn für den Fall $t_n < T$ kann noch ein zusätzlicher Zeitpunkt $t_{n+1} := T$ eingeführt werden. Mit $t_0 := 0$ ergibt sich für Borel-Mengen $B_1, \ldots, B_n$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{P}}\Big(\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\Big) \;&=\; \int\limits_{\left\{\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\right\}} L_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int\limits_{\left\{\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\right\}} \mathrm{e}^{-aW_T - \frac{1}{2}a^2 T} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int\limits_{\left\{\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\right\}} \mathrm{e}^{-a\tilde{W}_T + \frac{1}{2}a^2 T} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \qquad \text{(Übergang zu } \tilde{W}_T, W_T = \tilde{W}_T - a \cdot T\text{)} \\
&= \int\limits_{\left\{\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\right\}} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2 T - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}}\right)} \mathrm{d}\mathbb{P} \qquad \text{(Teleskopsumme, } t_n = T,\ t_0 = 0\text{)} \\
&= \int\limits_{B_1 \times \ldots \times B_n} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2 T - a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - x_{i-1}} \,\mathrm{d}\mathbb{P}_{\left(\tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_n\right)}(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{mit } x_0 := 0
\end{aligned}$$

(Transformationssatz, Übergang zur Verteilung)

Für weitere Untersuchungen wird nun die Verteilung der Zuwächse $\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0}, \ldots, \tilde{W}_{t_{n-1}} - \tilde{W}_{t_n}$ betrachtet. Die Transformation zwischen $\tilde{W}_{t_1}, \ldots, \tilde{W}_{t_n}$ und den Zuwächsen geschieht mittels der Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(siehe dazu auch (3.2) in Bemerkung 7. zu Definition 4.1.3), denn es ist

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ \vdots \\ x_n - x_{n-1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Mit

$$g: \ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \ \mapsto \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2 T - a \cdot \sum_{i=1}^{n} z_i}$$

erhält man

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{P}}\Big(\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\Big) \\ = & \int\limits_{B_1 \times \ldots \times B_n = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n)\right)} g\left(\boldsymbol{A}^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\right) \mathrm{d}\mathbb{P}_{\left(\tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_n\right)}(x_1, \ldots, x_n) \\ = & \int\limits_{\boldsymbol{A}^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n)} g\,(z_1, \ldots, z_n)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{A}^{-1}\left(\tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_n\right)}(z_1, \ldots, z_n) \quad \text{(Transformationssatz, Übergang zur Verteilung der Zuwächse)} \\ = & \int\limits_{\boldsymbol{A}^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n)} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2 T - a \cdot \sum_{i=1}^{n} z_i}\, \mathrm{d}\mathbb{P}_{\left(\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0}, \ldots, \tilde{W}_{t_{n-1}} - \tilde{W}_{t_n}\right)}(z_1, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

Da die Zuwächse $\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$ bezüglich $\mathbb{P}$ unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert $a \cdot (t_i - t_{i-1})$ und Varianz $(t_i - t_{i-1})$ sind (s.o.), besitzt $\mathbb{P}_{\left(\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0}, \ldots, \tilde{W}_{t_{n-1}} - \tilde{W}_{t_n}\right)}$ bezüglich λ^n, dem Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, die Dichte

$$f_{\left(\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_{t_0}, \ldots, \tilde{W}_{t_{n-1}} - \tilde{W}_{t_n}\right)}: \quad (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \ \mapsto \ \prod_{i=1}^{n} f_{(\tilde{W}_{t_i} - \tilde{W}_{t_{i-1}})}(z_i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\left(z_i - a\cdot(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}}}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{P}}\Big(\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\Big) \\
= \; & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \cdot \prod\limits_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})}} \cdot \int\limits_{\boldsymbol{A}^{-1}(B_1\times\ldots\times B_n)} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2T - a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\left(z_i - a\cdot(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}}} \,\mathrm{d}\lambda^n(z_1, \ldots, z_n)
\end{aligned}$$

Für den Exponenten ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}a^2T - a\cdot\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(z_i - a\cdot(t_i - t_{i-1})\right)^2}{t_i - t_{i-1}} \\
= \; & \frac{1}{2}a^2T - a\cdot\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2 - 2z_i a(t_i - t_{i-1}) + a^2(t_i - t_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}} \\
= \; & \frac{1}{2}a^2T - a\cdot\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{t_i - t_{i-1}} + a\cdot\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{2}a^2\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})}_{=T} \\
= \; & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{t_i - t_{i-1}}
\end{aligned}$$

Da das Lebesgue-Maß λ^n invariant gegenüber linearen Transformationen $\boldsymbol{A}$ mit $\det\boldsymbol{A} = 1$ (und somit auch invariant gegenüber linearen Transformationen $\boldsymbol{A}^{-1}$ mit $\det\boldsymbol{A}^{-1} = 1$) ist, ergibt sich mit

$$h: \; (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \;\mapsto\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{t_i - t_{i-1}}}$$

durch Rücktransformation

$$\begin{aligned}
& \tilde{\mathbb{P}}\Big(\tilde{W}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{W}_{t_n} \in B_n\Big) \cdot \sqrt{(2\pi)^n \cdot \prod_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})} \\
= \; & \int\limits_{\boldsymbol{A}^{-1}(B_1\times\ldots\times B_n)} h\left(z_1, \ldots, z_n\right)\mathrm{d}\lambda^n(z_1, \ldots, z_n) \\
= \; & \int\limits_{\boldsymbol{A}^{-1}(B_1\times\ldots\times B_n)} h\left(z_1, \ldots, z_n\right)\mathrm{d}\boldsymbol{A}^{-1}\left(\lambda^n\right)(z_1, \ldots, z_n) \\
= \; & \int\limits_{\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^{-1}(B_1\times\ldots\times B_n)\right)} h\Big(\boldsymbol{A}^{-1}(x_1, \ldots, x_n)\Big)\,\mathrm{d}\lambda^n(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

$$= \int\limits_{B_1\times\ldots\times B_n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}} \,\mathrm{d}\lambda^n(x_1,\ldots,x_n)$$

und somit

$$\tilde{\mathbb{P}}\Big(\tilde{W}_{t_1}\in B_1,\ldots,\tilde{W}_{t_n}\in B_n\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})}}\cdot \int\limits_{B_1\times\ldots\times B_n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}} \,\mathrm{d}\lambda^n(x_1,\ldots,x_n)$$

Die Funktion

$$f:\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n \ \mapsto\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{t_i-t_{i-1}}}$$

ist aber gerade die Dichte der endlichdimensionalen Verteilung eines Wienerprozesses in der Markovschen Darstellung (siehe (3.3) in Bemerkung 8. zu Definition 4.1.3). ■

Satz 3.9 *In einem Black-Scholes-Modell mit Zinsrate $r > 0$, Drift $\mu \in \mathbb{R}$, Volatität $\sigma > 0$ und einem Wienerprozess $W = \Big(W_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$, $\mathbb{T} = [0, T]$, über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ ist durch*

$$\mathbb{Q}(A) \ :=\ \int\limits_A L_T\,\mathrm{d}\mathbb{P} \quad \textit{mit} \quad L_T \ :=\ \mathrm{e}^{-\frac{\mu-r}{\sigma}\cdot W_T-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T} \qquad (A\in\mathcal{F})$$

ein äquivalentes Martingalmaß gegeben.

Beweis: Wegen $L_T > 0$ sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ äquivalent. Außerdem ist gemäß Satz 3.8 der Prozess $\tilde{W} = \Big(\tilde{W}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\tilde{W}_t \ :=\ W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}\cdot t, \qquad t\in\mathbb{T},$$

ein Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\Big)$. Aus (3.4) in obiger Bemerkung 2. ergibt sich dann, dass der diskontierte Preisprozess der Aktie $\Big(\underset{\approx}{S}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$ ist. ■

3.3 Bewertung von pfadunabhängigen Optionen

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse:

- Ein Black-Scholes-Modell $\left(\mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right), S^0, S^1\right)$ ist bestimmt durch die Parameter
  - Zeithorizont $T > 0$,
  - Zinsrate $r > 0$,
  - Volatilität $\sigma > 0$,
  - Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und
  - Startwert $s_0 > 0$.
- Der (deterministische) Preisprozess der Anleihe ist $S^0 = \left(S_t^0\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

  $$S_t^0 \equiv \mathrm{e}^{rt},$$

  der Preisprozess der Aktie ist $S^1 = \left(S_t^1\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

  $$S_t^1 = s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}\cdot t},$$

  wobei $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ ist.
- Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ im Black-Scholes-Modell besitzt der Preisprozess der Aktie die Darstellung

  $$S_t^1 = s_0 \cdot \mathrm{e}^{rt} \cdot \mathrm{e}^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2}\cdot t},$$

  wobei $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\right)$ ist. Es gilt

  $$\tilde{W}_t = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t \qquad (t \in \mathbb{T}).$$

  Plakativ gesprochen, „tauscht“ das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ die Drift μ des Aktienpreisprozesses gegen die Zinsrate r des Anleihenprozesses aus. Der diskontierte Aktienpreisprozess $\underset{\sim}{S} = \left(\underset{\sim}{S}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

  $$\underset{\sim}{S}_t = s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2}\cdot t}$$

  ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal bezüglich der natürlichen Filtration $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ sowohl des Wienerprozesses W bezüglich $\mathbb{P}$ als auch des Wienerprozesses $\tilde{W}$ bezüglich $\mathbb{Q}$ (beide Prozesse unterscheiden sich voneinander lediglich in dem deterministischen Ausruck „$\frac{\mu-r}{\sigma} \cdot t$“, so dass sie dieselben natürlichen Filtrationen erzeugen).

- Analog zum zeitdiskreten Mehrperioden-Marktmodell wird im Folgenden eine Preisfestsetzung („Bewertung") für ein gegebenes (Europäisches) Auszahlungsprofil C durch Erwartungswertbildung mit dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ unter Beachtung der Diskontierung vorgenommen. Eine Rechtfertigung dieser Vorgehensweise über die Arbitragefreiheit erfolgt später.

3.3.1 Auszahlungsprofile und Wertprozesse

Definition 3.10 *Gegeben sei ein Black-Scholes-Modell* $\left(\mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right), S^0, S^1\right)$ *mit dem äquivalenten Martingalmaß* $\mathbb{Q}$ *und der natürlichen Filtration* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *eines Wienerprozesses* W.

- *Eine Zufallsgröße* C *auf* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ *mit*

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(|C|\Big) < \infty$$

  heißt ***Europäisches Auszahlungsprofil***.

- *Ein Europäisches Auszahlungsprofil* C *heißt* ***Derivat***, *wenn es* $\mathcal{F}_T$*-messbar ist.*

- *Ein Derivat* C *heißt* ***pfadunabhängig***, *wenn es eine Funktion* $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *gibt, so dass* $C = h(S_T^1)$ *gilt, ansonsten* ***pfadabhängig***.

- *Die Zufallsgröße*

  $$\underset{\sim}{C} \;:=\; \frac{C}{S_T^0} \;=\; C \cdot \mathrm{e}^{-rT}$$

  heißt ***diskontiertes Europäisches Auszahlungsprofil***.

- *Der Prozess* $V^C = (V_t^C)_{t\in\mathbb{T}}$ *bzw.* $\underset{\sim}{V}^C = (\underset{\sim}{V}_t^C)_{t\in\mathbb{T}}$ *mit*

  $$\underset{\sim}{V}_t^C \;:=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\Big) \;=\; \mathrm{e}^{-rT} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad \text{bzw.}$$

  $$V_t^C \;:=\; S_t^0 \cdot \underset{\sim}{V}_t^C \;=\; \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big)$$

  heißt ***Preisprozess*** *(oder* ***Wertprozess****) bzw. diskontierter Preisprozess (oder Wertprozess) des Europäischen Auszahlungsprofils* C.

- *Der Wert*

  $$c_0(C) \;:=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C}) \;=\; \underset{\sim}{V}_0^C \;=\; V_0^C$$

  heißt ***Preis*** *des Europäischen Auszahlungsprofils* C.

Bemerkungen:

1. Hier wird – im Gegensatz zum zeitdiskreten Mehrperioden-Marktmodell – die absolute $\mathbb{Q}$-Integrierbarkeit des Europäischen Auszahlungsprofils C vorausgesetzt. Da der Diskontierungsprozess (d.h. der Preisprozess der Anleihe) im Black-Scholes-Modell deterministisch ist, ist dies gleichbedeutend mit der Integrierbarkeit des *diskontierten* Europäischen Auszahlungsprofils $\underset{\sim}{C}$. Außerdem ist dadurch die Existenz des Wertprozesses V^C gesichert.

2. Für ein Derivat C gilt $V_T^C = C$ bzw. $\underset{\sim}{V}_T^C = \underset{\sim}{C}$. Außerdem sind V_0^C bzw. $\underset{\sim}{V}_0^C$ konstant, da gemäß Definition des Wienerprozesses $W_0 \equiv 0$ und somit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ist.

3. Der diskontierte Wertprozess $\underset{\sim}{V}^C$ ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal bezüglich $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$: Wegen der „Tower property" gilt nämlich für $s, t \in \mathbb{T}$ und $s < t$

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_t^C \mid \mathcal{F}_s\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\Big) \mid \mathcal{F}_s\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_s\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_s^C$$

   Eine Erweiterung des Black-Scholes-Modells um den Wertprozess V^C, d.h. eine Betrachtung von $\Big(\mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, S^1, V^C\Big)$, verändert das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ nicht.

3.3.2 Bewertung eines pfadunabhängigen Derivats

Lemma 3.11 *Es sei C ein pfadunabhängiges Derivat in einem Black-Scholes-Modell $\Big(\mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, S^1\Big)$ mit $C = h(S_T^1)$, dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und der natürlichen Filtration $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ eines Wienerprozesses W. Dann gilt*

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) \;=\; \begin{cases} C & \text{für } t = T \\ g_t(S_t^1) & \text{für } t \in [0, T) \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$g_t(x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h\Big(x \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{T-t}\cdot u + (T-t)\cdot\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}\Big) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u$$

für $t \in [0, T)$ und $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis: Für $t = T$ ist $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_T\Big) = C$ klar, da C ein Derivat und somit $\mathcal{F}_T$-messbar ist. Für $t \in [0, T)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) \;&=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(h(S_T^1) \mid \mathcal{F}_t\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(h\Big(\tfrac{S_T^1}{S_t^1} \cdot S_t^1\Big) \mid \mathcal{F}_t\Big) \qquad (S_t^1 > 0) \\
&=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(h\Big(\mathrm{e}^{\sigma\cdot(W_T - W_t) + (T-t)\cdot(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)} \cdot S_t^1\Big) \mid \mathcal{F}_t\Big) \\
&=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(h\Big(\mathrm{e}^{\sigma\cdot(\tilde{W}_T - \tilde{W}_t) + (T-t)\cdot(r - \frac{1}{2}\sigma^2)} \cdot S_t^1\Big) \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad (\text{Übergang zu } \tilde{W}, \text{ d.h. } \mu \to r)
\end{aligned}$$

Da S^1_t $\mathcal{F}_t$-messbar und $\tilde{W}_T - \tilde{W}_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$ ist, erhält man gemäß Satz C.2 (siehe Anhang C.4)

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) \;=\; g_t(S^1_t) \quad \text{mit} \quad g_t(x) \;:=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(h\Big(x \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot(\tilde{W}_T-\tilde{W}_t)+(T-t)\cdot(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}\Big)\Big)$$

Aufgrund der Normalverteilung von $\tilde{W}_T - \tilde{W}_t$ ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} g_t(x) \;&=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(h\Big(x \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{T-t}\cdot\frac{\tilde{W}_T-\tilde{W}_t}{\sqrt{T-t}}+(T-t)\cdot(r-\frac{1}{2}\sigma^2)}\Big)\Big) \qquad \Big(\tfrac{\tilde{W}_T-\tilde{W}_t}{\sqrt{T-t}} \sim \mathrm{N}(0,1)\Big) \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h\Big(x \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{T-t}\cdot u+(T-t)\cdot\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}\Big) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

■

Bemerkung: Für $t = 0$ ergibt sich insbesondere wegen $S^1_0 = s_0$

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C\Big) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h\Big(s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot u+T\cdot\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}\Big) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Außerdem erhält man aus obigem Lemma direkt den (diskontierten) Wertprozess $V^C = (V^C_t)_{t\in\mathbb{T}}$ bzw. $\underset{\sim}{V}^C = (\underset{\sim}{V}^C_t)_{t\in\mathbb{T}}$ über $V^C_t = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big)$ bzw. $\underset{\sim}{V}^C_t = \mathrm{e}^{-rT} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big)$.

3.3.3 Black-Scholes-Formel für Europäische Optionen und Put-Call-Parität

Satz 3.12 *Gegeben seien ein Black-Scholes-Modell* $\Big(\mathbb{T},\, \Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big),\, S^0,\, S^1\Big)$ *mit dem äquivalenten Martingalmaß* $\mathbb{Q}$*, der natürlichen Filtration* $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *eines Wienerprozesses* W *sowie eine Europäische Call-Option* $\Big(S^1_T, \tilde{K}\Big)_{\mathrm{ECO}}$ *mit Strike* $\tilde{K} > 0$ *und Auszahlungsprofil*

$$C \;:=\; \Big(S^1_T - \tilde{K}\Big)^+.$$

Dann gilt für $t \in [0, T)$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) \;&=\; S^1_t \cdot \mathrm{e}^{r\cdot(T-t)} \cdot \Phi\Big(u_t(S^1_t) + \sigma \cdot \sqrt{T-t}\Big) - \tilde{K} \cdot \Phi\Big(u_t(S^1_t)\Big) \qquad \textit{mit} \\ u_t(x) \;&:=\; \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot (T-t) - \ln\left(\frac{\tilde{K}}{x}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} \qquad (x \in \mathbb{R}_{>0}), \end{aligned}$$

wobei Φ *die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.*

Beweis: Eine Europäische Call-Option ist ein pfadunabhängiges Derivat, so dass Lemma 3.11 mit

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) \;&=\; g_t\Big(S^1_t\Big), \qquad h(x) \;:=\; (x - \tilde{K})^+ \qquad \text{und} \\ g_t(x) \;&:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} h\Big(x \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\sqrt{T-t}\cdot u+(T-t)\cdot\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}\Big) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \cdot \mathrm{e}^{\sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot u + (T-t) \cdot \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)} - \tilde{K} \right)^+ \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \, \mathrm{d}u \tag{3.5}$$

($x \in \mathbb{R}_{>0}$) angewendet werden kann. Es verbleibt demnach zu zeigen, dass

$$g_t(x) = x \cdot \mathrm{e}^{r \cdot (T-t)} \cdot \Phi\Big(u_t(x) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \Big) - \tilde{K} \cdot \Phi\Big(u_t(x) \Big)$$

ist. Der Ausdruck in den Klammern in (3.5) ist genau dann positiv, wenn

$$x \cdot \mathrm{e}^{\sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot u + (T-t) \cdot \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)} > \tilde{K},$$

also

$$\sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot u + (T-t) \cdot \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) > \ln\left(\frac{\tilde{K}}{x} \right)$$

und somit

$$u > \frac{\ln\left(\frac{\tilde{K}}{x}\right) - (T-t) \cdot \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} =: -u_t(x)$$

gilt. Man erhält

$$\begin{aligned}
g_t(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-u_t(x)}^{\infty} \left(x \cdot \mathrm{e}^{\sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot u + (T-t) \cdot \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)} - \tilde{K} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \, \mathrm{d}u \\
&= x \cdot \mathrm{e}^{r \cdot (T-t)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-u_t(x)}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u - \sigma \cdot \sqrt{T-t})^2} \, \mathrm{d}u - \tilde{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-u_t(x)}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \, \mathrm{d}u \\
&\quad \text{(Integrale über Dichten von Normalverteilungen)} \\
&= x \cdot \mathrm{e}^{r \cdot (T-t)} \cdot \Big(1 - \Phi\Big(-u_t(x) - \sigma \cdot \sqrt{T-t} \Big) \Big) - \tilde{K} \cdot \Big(1 - \Phi\Big(-u_t(x) \Big) \Big) \\
&= x \cdot \mathrm{e}^{r \cdot (T-t)} \cdot \Phi\Big(u_t(x) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \Big) - \tilde{K} \cdot \Phi\Big(u_t(x) \Big) \\
&\quad (\Phi(z) = 1 - \Phi(-z) \text{ für } z \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

■

Bemerkungen:

1. Für den Wertprozess $V^C = (V_t^C)_{t \in \mathbb{T}}$ des Auszahlungsprofils C einer Europäischen Call-Option mit Strike $\tilde{K}$ ergibt sich somit wegen $V_t^C = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t \Big)$

   $$V_t^C = S_t^1 \cdot \Phi\Big(u_t(S_t^1) + \sigma \cdot \sqrt{T-t} \Big) - \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(u_t(S_t^1) \Big).$$

   Der Preis $c_0(C)$ des Auszahlungsprofils C einer Europäischen Call-Option mit Strike $\tilde{K}$ („**Black-Scholes-Formel**") ist demnach

   $$c_0(C) = V_0^C = s_0 \cdot \Phi\Big(u^* + \sigma \cdot \sqrt{T} \Big) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(u^* \Big)$$

mit

$$u^* \; := \; u_0(s_0) \; = \; \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot T - \ln\left(\frac{\tilde{K}}{s_0}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{T}}. \tag{3.6}$$

2. Wegen $\ln\left(\frac{S_t^1}{\tilde{K}}\right) = -\ln\left(\frac{\tilde{K}}{S_t^1}\right)$, $t \in [0, t)$, ergibt sich die alternative Darstellung

$$V_t^C \; = \; S_t^1 \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t^1}{\tilde{K}}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}\right) - \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t^1}{\tilde{K}}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}\right).$$

Für $t = 0$ wird häufig auch die Darstellung

$$c_0(C) \; = \; s_0 \cdot \Phi\Big(d_1\Big) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(d_2\Big)$$

mit

$$d_1 \; := \; \frac{\ln\left(\frac{s_0}{\tilde{K}}\right) + T \cdot (r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \qquad \text{und} \qquad d_2 \; := \; d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T} \tag{3.7}$$

verwendet.

3. Analog zum zeitdiskreten Fall (siehe Satz 2.21) ergibt sich die **Put-Call-Parität**

$$c_0(C) - c_0(P) \; = \; s_0 - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K}, \tag{3.8}$$

wobei

$$P \; := \; \left(\tilde{K} - S_T^1\right)^+$$

das Auszahlungsprofil einer Europäischen Put-Option $\left(S_T^1, \tilde{K}\right)_{\mathrm{EPO}}$ ist.

Die Put-Call-Parität lässt sich folgendermaßen herleiten: Für die Auszahlungsprofile C und P gilt (siehe auch Abbildungen 2.2 und 2.3)

$$C - P \; = \; S_T^1 - \tilde{K} \cdot \mathbf{1},$$

wobei $\mathbf{1}$ die konstante Funktion $\omega \in \Omega \mapsto 1$ bezeichnet. Die Bildung von bedingten Erwartungen bezüglich $\mathbb{Q}$ auf beiden Seiten von (3.8) führt zu

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) - \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(P \mid \mathcal{F}_t\Big) \; = \; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(S_T^1 \mid \mathcal{F}_t\Big) - \tilde{K} \cdot \mathbf{1},$$

für $t \in \mathbb{T}$. Da $\mathbb{Q}$ das äquivalente Martingalmaß ist, gilt

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(S_T^1 \mid \mathcal{F}_t\Big) \; = \; S_T^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_T^1}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right) \; = \; \mathrm{e}^{rT} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\approx}{S}_T \mid \mathcal{F}_t\Big)$$

$$= \quad \mathrm{e}^{rT} \cdot \underset{\sim}{S}_t \;=\; \mathrm{e}^{r(T-t)} \cdot S_t^1$$

und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big) - \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(P \mid \mathcal{F}_t\Big) \;=\; \mathrm{e}^{r(T-t)} \cdot S_t^1 - \tilde{K} \cdot \mathbf{1}.$$

Wegen $V_t^C = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C \mid \mathcal{F}_t\Big)$ führt Multiplikation mit $\mathrm{e}^{-r(T-t)}$ zu

$$V_t^C - V_t^P \;=\; S_t^1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \mathbf{1}, \tag{3.9}$$

woraus sich für $t = 0$ die Put-Call-Parität ergibt.

4. Der Preisprozess $V^P = \Big(V_t^P\Big)_{t \in \mathbb{T}}$ einer **Europäischen Put-Option** $\Big(S_T^1, \tilde{K}\Big)_{\mathrm{EPO}}$ mit $P = \Big(\tilde{K} - S_T^1\Big)^+$ lässt sich nun aus der Put-Call-Parität in der Darstellung (3.9) herleiten: Für $t \in [0, T)$ ($V_T^P = P$ ist klar) ergibt sich

$$\begin{aligned}
V_t^P \;&=\; V_t^C - S_t^1 + \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \mathbf{1} \\
&=\; S_t^1 \cdot \Phi\Big(u_t(S_t^1) + \sigma \cdot \sqrt{T-t}\Big) - \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(u_t(S_t^1)\Big) - S_t^1 + \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \mathbf{1} \\
&=\; \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \bigg(\mathbf{1} - \Phi\Big(u_t(S_t^1)\Big)\bigg) - S_t^1 \cdot \bigg(\mathbf{1} - \Phi\Big(u_t(S_t^1) + \sigma \cdot \sqrt{T-t}\Big)\bigg) \\
&=\; \mathrm{e}^{-r(T-t)} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(-u_t(S_t^1)\Big) - S_t^1 \cdot \Phi\Big(-u_t(S_t^1) - \sigma \cdot \sqrt{T-t}\Big).
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ erhält man daraus

$$\begin{aligned}
c_0(P) \;&=\; \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(-u^*\Big) - s_0 \cdot \Phi\Big(-u^* - \sigma \cdot \sqrt{T}\Big) \\
&=\; \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(-d_2) - s_0 \cdot \Phi\Big(-d_1\Big)
\end{aligned}$$

mit u^*, d_1 und d_2 wie in (3.6) und (3.7) angegeben.

3.4 Sensitivitäten

Die Sensitivitäten geben die „Empfindlichkeit“ des Preises eines Auszahlungsprofils gegenüber Änderungen von Preisparametern an und entsprechen mathematisch den partiellen Ableitungen nach den jeweiligen Parametern (wobei die Existenz der jeweiligen partiellen Ableitungen vorausgesetzt wird). Im Folgenden wird daher der Preis V_0^C eines Auszahlungsprofils C zum Zeitpunkt 0 als Funktion vom Startwert s_0 der zugrundeliegenden Aktie, der Volatilität σ, des Zeithorizonts T und der Zinsrate r angesehen, d.h.

$$V_0^C \;=\; V_0^C(s_0, \sigma, T, r).$$

Es sei angemerkt, dass eine Änderung dieser Parameter auch den Übergang zu einem anderen Black-Scholes-Modell bedeutet.

Aufgrund der Bezeichnung der partiellen Ableitungen mit griechischen Buchstaben heißen die Sensitivitäten auch „The Greeks“. Die wichtigsten von ihnen sind im Folgenden aufgeführt:

1. Delta $\quad \Delta \;:=\; \dfrac{\partial V_0^C}{\partial s_0}$
2. Gamma $\quad \Gamma \;:=\; \dfrac{\partial \Delta}{\partial s_0} \;=\; \dfrac{\partial^2 V_0^C}{\partial s_0^2}$
3. Vega $\quad \nu \;:=\; \dfrac{\partial V_0^C}{\partial \sigma}$ (eigentlich „nü“!)
4. Theta $\quad \Theta \;:=\; \dfrac{\partial V_0^C}{\partial(-T)}$ (Sensitivität gegenüber Laufzeit*verkürzung*!)
5. Rho $\quad \rho \;:=\; \dfrac{\partial V_0^C}{\partial r}$

3.4.1 Sensitivitäten von Europäischen Call- und Put-Optionen

Ausgehend von dem Preis V_0^C des Auszahlungsprofils C einer Europäischen Call-Option mit Strike $\tilde{K}$, d.h.

$$V_0^C \;=\; V_0^C(s_0, \sigma, T, r) \;=\; s_0 \cdot \Phi\Big(d_1\Big) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi\Big(d_2\Big)$$

mit

$$\begin{aligned} d_1 \;&=\; d_1(s_0, \sigma, T, r) \;=\; \frac{\ln\left(\frac{s_0}{\tilde{K}}\right) + T \cdot (r + \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \qquad \text{und} \\ d_2 \;&=\; d_2(s_0, \sigma, T, r) \;=\; d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}, \end{aligned}$$

ergibt sich zunächst, wobei $\phi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnet,

$$\frac{\phi(d_1)}{\phi(d_2)} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2)} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(d_1^2 - (d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T})^2\right)} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(2d_1 \cdot \sigma \cdot \sqrt{T} - \sigma^2 \cdot T)}$$

$$= \quad \mathrm{e}^{-d_1\cdot\sigma\cdot\sqrt{T}+\frac{1}{2}\sigma^2\cdot T} \;=\; \mathrm{e}^{-\ln(s_0/\tilde{K})-r\cdot T} \;=\; \left(\mathrm{e}^{\ln(s_0/\tilde{K})}\right)^{-1}\cdot \mathrm{e}^{-rT} \;=\; \frac{\tilde{K}}{s_0}\cdot \mathrm{e}^{-rT}$$

und somit

$$s_0\cdot\phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT}\cdot\tilde{K}\cdot\phi(d_2) \;=\; 0. \tag{3.10}$$

Damit ergibt sich für die Sensitivitäten:

1. Für das Delta Δ^C einer Europäischen Call-Option erhält man

$$\begin{aligned}\Delta^C \;&=\; \frac{\partial V_0^C}{\partial s_0} \;=\; \Phi(d_1) + s_0\cdot\frac{\partial d_1}{\partial s_0}\cdot\phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT}\cdot\tilde{K}\cdot\underbrace{\frac{\partial d_2}{\partial s_0}}_{=\frac{\partial d_1}{\partial s_0}}\cdot\phi(d_2)\\ &=\; \Phi(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial s_0}\cdot\underbrace{\left(s_0\cdot\phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT}\cdot\tilde{K}\cdot\phi(d_2)\right)}_{=0 \text{ siehe (3.10)}} \;=\; \Phi(d_1) \;>\; 0.\end{aligned}$$

Für das Delta Δ^P der entsprechenden Europäischen Put-Option ergibt sich wegen der Put-Call-Parität $V_0^P = V_0^C - s_0 + \mathrm{e}^{-rT}\cdot\tilde{K}$

$$\Delta^P \;=\; \frac{\partial V_0^P}{\partial s_0} \;=\; \frac{\partial V_0^C}{\partial s_0} - 1 \;=\; \Phi(d_1) - 1 \;=\; -\Big(1-\Phi(d_1)\Big) \;=\; -\Phi(-d_1) \;<\; 0.$$

Das heißt, bei steigendem s_0 steigt der Preis einer Call-Option und sinkt der Preis einer Put-Option. Das ist plausibel, da ein höheres s_0 eine größere Wahrscheinlichkeit nach sich zieht, dass der Preis der Aktie am Laufzeitende ebenfalls höher ist, was vorteilhaft für den Call und nachteilhaft für den Put ist.

2. Für das Gamma Γ^C einer Europäischen Call-Option erhält man

$$\begin{aligned}\Gamma^C \;&=\; \frac{\partial \Delta^C}{\partial s_0} \;=\; \frac{\partial d_1}{\partial s_0}\cdot\phi(d_1) \;=\; \frac{1}{\tilde{K}}\cdot\frac{1}{s_0/\tilde{K}}\cdot\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\cdot\phi(d_1)\\ &=\; \frac{\phi(d_1)}{s_0\cdot\sigma\cdot\sqrt{T}} \;>\; 0,\end{aligned}$$

für das Gamma Γ^P einer Europäischen Put-Option wegen $\Delta^P = \Phi(d_1) - 1$ ebenfalls

$$\Gamma^P \;=\; \Gamma^C \;=\; \frac{\phi(d_1)}{s_0\cdot\sigma\cdot\sqrt{T}} \;>\; 0.$$

Das heißt, bei steigendem s_0 steigt das Delta sowohl einer Call- als auch einer Put-Option. Das ist plausibel, da eine konvexe Veränderung des Preises s_0 der Aktie eine verstärkende Wirkung auf das jeweilige Delta besitzt.

3. Für das Vega ν^C einer Europäischen Call-Option erhält man

$$\begin{aligned}
\nu^C &= \frac{\partial V_0^C}{\partial \sigma} = s_0 \cdot \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \cdot \phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \underbrace{\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}}_{= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T}} \cdot \phi(d_2) \\
&= \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} \cdot \underbrace{\Big(s_0 \cdot \phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \phi(d_2)\Big)}_{= 0 \text{ siehe (3.10)}} + \sqrt{T} \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \phi(d_2) \\
&= \sqrt{T} \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \phi(d_2) > 0,
\end{aligned}$$

für das Vega ν^P einer Europäischen Put-Option wegen der Put-Call-Parität $V_0^P = V_0^C - s_0 + \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K}$ ebenfalls

$$\nu^P = \nu^C = \sqrt{T} \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \phi(d_2) > 0.$$

Das heißt, bei steigendem σ steigt sowohl der Preis einer Call- als auch einer Put-Option. Das ist plausibel, da ein größeres σ extremere Preise der Aktie am Laufzeitende nach sich zieht, was für beide Optionstypen vorteilhaft ist.

4. Für das Theta Θ^C einer Europäischen Call-Option erhält man

$$\begin{aligned}
\Theta^C &= \frac{\partial V_0^C}{\partial(-T)} \\
&= s_0 \cdot \frac{\partial d_1}{\partial(-T)} \cdot \phi(d_1) - r \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi(d_2) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \underbrace{\frac{\partial d_2}{\partial(-T)}}_{= \frac{\partial(d_1 - \sigma \cdot \sqrt{-(-T)})}{\partial(-T)} = \frac{\partial d_1}{\partial(-T)} + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}}} \cdot \phi(d_2) \\
&= \frac{\partial d_1}{\partial(-T)} \cdot \underbrace{\Big(s_0 \cdot \phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \phi(d_2)\Big)}_{= 0 \text{ siehe (3.10)}} - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Big(r \cdot \Phi(d_2) + \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T}} \cdot \phi(d_2)\Big) \\
&= -\mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot r \cdot \Phi(d_2) - \frac{\sigma}{2 \cdot \sqrt{T}} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \phi(d_2)}_{= s_0 \cdot \phi(d_1) \text{ siehe (3.10)}} \\
&= -\mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot r \cdot \Phi(d_2) - \frac{s_0 \cdot \sigma \cdot \phi(d_1)}{2 \cdot \sqrt{T}} < 0,
\end{aligned}$$

für das Theta Θ^P einer Europäischen Put-Option wegen der Put-Call-Parität $V_0^P = V_0^C - s_0 + \mathrm{e}^{r \cdot (-T)} \cdot \tilde{K}$

$$\begin{aligned}
\Theta^P &= \Theta^C + r \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} = -\mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot r \cdot \Big(\Phi(d_2) - 1\Big) - \frac{s_0 \cdot \sigma \cdot \phi(d_1)}{2 \cdot \sqrt{T}} \\
&= \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot r \cdot \Phi(-d_2) - \frac{s_0 \cdot \sigma \cdot \phi(d_1)}{2 \cdot \sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

Das heißt, bei abnehmender Laufzeit T sinkt der Preis einer Call-Option. Das ist plausibel, da der Preis der Aktie dann nicht mehr so viel „Zeit" hat, sich in vorteilhafte Extrembereiche zu bewegen.

Bei einer Put-Option hängt das Verhalten bei abnehmender Laufzeit T aufgrund der Beschränktheit des Gewinns sehr stark vom aktuellen Preis der Aktie s_0 ab: Ist s_0 nahe bei Null, kann der Gewinn kaum mehr vergrößert werden, so dass eine kürzere Laufzeit die Wahrscheinlichkeit erhöht, dass der Preis der Aktie in der vorteilhaften Region (nahe Null) verbleibt.

5. Für das Rho ρ^C einer Europäischen Call-Option erhält man

$$\begin{aligned}\rho^C &= \frac{\partial V_0^C}{\partial r} = s_0 \cdot \frac{\partial d_1}{\partial r} \cdot \phi(d_1) + T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi(d_2) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \underbrace{\frac{\partial d_2}{\partial r}}_{= \frac{\partial d_1}{\partial r}} \cdot \phi(d_2) \\ &= \frac{\partial d_1}{\partial r} \cdot \underbrace{\Big(s_0 \cdot \phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \phi(d_2)\Big)}_{= 0 \text{ siehe (3.10)}} + T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi(d_2) \\ &= T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi(d_2) \ > \ 0,\end{aligned}$$

für das Rho ρ^P einer Europäischen Put-Option wegen der Put-Call-Parität $V_0^P = V_0^C - s_0 + \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K}$

$$\begin{aligned}\rho^P &= \rho^C - T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} = T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Big(\Phi(d_2) - 1\Big) \\ &= -T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K} \cdot \Phi(-d_2) \ < \ 0.\end{aligned}$$

Das heißt, bei steigendem r steigt der Preis einer Call-Option und sinkt der Preis einer Put-Option. Dieser Effekt ist nicht unmittelbar einsichtig. Aus Sicht des Strikes ist allerdings folgende Interpretation möglich: Ein Betrag in Höhe von $\tilde{K}$ zum Zeitpunkt T besitzt heute den Wert $\mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K}$. Wird r erhöht, sinkt somit $\mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K}$ und die Differenz $s_0 - \mathrm{e}^{-rT} \cdot \tilde{K}$ wird größer. Dies bedeutet für den heutigen Zeitpunkt einen Vorteil für die Call-Option und einen Nachteil für die Put-Option, der sich auch preislich auswirkt.

3.5 Parameterschätzung im Black-Scholes-Modell

Von den fünf Parametern des Black-Scholes-Modells (Zeithorizont $T > 0$, Zinsrate $r > 0$, Volatilität $\sigma > 0$, Drift $\mu \in \mathbb{R}$, Startwert $s_0 > 0$) brauchen lediglich die Zinsrate $r > 0$ und die Volatilität $\sigma > 0$ geschätzt zu werden, denn

- der Zeithorizont T ist vorgegeben,
- die Drift μ wird bei Verwendung des äquivalenten Martingalmaßes durch die Zinsrate r ersetzt und
- der Startwert s_0 entspricht dem aktuellen Wert der betrachteten Aktie.

3.5.1 Schätzung der Zinsrate r

Die Zinsrate r wird im Black-Scholes-Modell als konstant angesehen. Dies ist in der Realität nicht gegeben. Neben der zeitlichen Änderung hängt die Zinsrate außerdem von

- der (Währungs-)region (EUR, US-Dollar USD, Britisches Pfund GBP, Schweizer Franken CHF, ...) und dem
- Fälligkeitszeitpunkt ab: Üblicherweise ist die (nominelle) Zinsrate für kurzfristige Laufzeiten niedriger als für längere Laufzeiten. Die Kurve, die die Zinsrate in Abhängigkeit von der Laufzeit angibt, wird **Zinsstrukturkurve** (*term structure*, *yield curve*) genannt.

Da die Zinsrate r im Black-Scholes-Modell der Zinssatz einer risikolosen Anleihe (d.h. einer nicht mit dem Risiko des Zahlungsausfalls behafteten Anleihe) ist, wird sie auch als **risikolose Zinsrate** (*risk free interest rate*) bezeichnet. Üblicherweise wird die risikolose Zinsrate von geeigneten **Staatsanleihen** (d.h. von deutschen Staatsanleihen für den EUR-Bereich, von amerikanischen für den USD-Bereich oder von britischen für den GBP-Bereich) abgeleitet.

Für die Ermittlung der Zinsrate r kann folgende Vorgehensweise angewendet werden:

- Da die Zinsrate (im Gegensatz zum Black-Scholes-Modell) laufzeitabhängig ist, sollte als Referenzlaufzeit der Zeithorizont T verwendet werden.
- Für verschiedene Währungsregionen gibt es Übersichten über Zinsraten für „quasi-risikolose“ Produkte (dies sind im Allgemeinen Staatsanleihen „solider“ Länder) in Abhängigkeit von der Laufzeit, z.B.

  `https://www.boerse-stuttgart.de/de/toolsundservices/zinsstrukturkurve/zinsstrukturkurve.html`

  `http://finance.yahoo.com/bonds/composite_bond_rates`

  `http://www.yieldcurve.com/marketyieldcurve.asp`

- Da die Zinsrate lediglich für bestimmte Laufzeiten (Wochen, Monate, Jahre) angegeben sind, muss die für die Laufzeit T benötigte Zinsrate ggf. durch Interpolation bestimmt werden. Als Methoden kommen dafür unter anderem in Frage:
  - Lineare Interpolation
  - Kubische Splines
  - **Nelson-Siegel-Methode:** Die Zinsrate $i(T)$ in Abhängigkeit von der Laufzeit T wird beschrieben mittels einer Funktion

$$i(T) \ := \ \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}}{T/\tau} + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-T/\tau}}{T/\tau} - \mathrm{e}^{-T/\tau} \right),$$

    wobei die Parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ und τ durch geeignete Methoden aus den vorhandenen Punkten der Zinsstrukturkurve geschätzt werden (z.B. durch die Methode der kleinsten Quadrate). Dabei besitzen die Parameter folgende Interpretation:
    * β_0: Langfristige Zinsrate
    * β_1: Kursdifferenz zwischen lang- und kurzfristigen Zinsen („spread“)
    * β_2: Krümmungsparameter zur Modellierung der mittelfristigen Zinsen
    * τ: „Abklingparameter“ für extreme Laufzeiten (d.h. $T \to 0$ bzw. $T \to \infty$)
  - **Svensson**- bzw. erweiterte Nelson-Siegel-Methode: Analog zur Nelson-Siegel-Methode wird die Funktion

$$i(T) \ := \ \beta_0 + \beta_1 \cdot \frac{1 - \mathrm{e}^{-T/\tau_1}}{T/\tau_1} + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-T/\tau_1}}{T/\tau_1} - \mathrm{e}^{-T/\tau_1} \right) + \beta_3 \cdot \left(\frac{1 - \mathrm{e}^{-T/\tau_2}}{T/\tau_2} - \mathrm{e}^{-T/\tau_2} \right)$$

    mit den zusätzlichen Parametern β_3 und τ_2 (sowie τ_1 anstatt τ) verwendet. Diese Methode wird von der Deutschen Bundesbank angewendet (siehe dazu auch `http://www.basiszinskurve.de/svensson-parameter.html`).
  - Bei der so ermittelten Zinsrate $i(T)$ handelt es sich überlicherweise um eine *nominelle* Zinsrate. Da in sehr vielen Ländern *unterjährige* Zinszuschlagstermine (z.B. zwei oder vier in den USA und im UK) üblich sind, muss ggf. zunächst die effektive Zinsrate i_{eff} mittels

$$\left(1 + \frac{i(T)}{f}\right)^f \ = \ 1 + i_{\text{eff}},$$

    wobei f die Anzahl der jährlichen Zinszuschlagstermine bezeichnet, bestimmt werden (siehe Abschnitt 1.1.5) und diese in die im Black-Scholes-Modell verwendete *stetige* Zinsrate r mittels

$$\mathrm{e}^r \ = \ 1 + i_{\text{eff}}$$

    überführt werden (siehe Abschnitt 1.1.6). Zusammengefasst ergibt sich demnach

$$r \ = \ f \cdot \ln\left(1 + \frac{i(T)}{f}\right).$$

3.5.2 Schätzung der Volatilität σ

Die Volatilität σ beschreibt im Black-Scholes-Modell die Standardabweichung des logarithmierten Preisprozesses der Aktie auf Jahresbasis: Es ist nämlich

$$\ln S_t^1 \;=\; \ln s_0 + \sigma \cdot W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t, \qquad t \in \mathbb{T},$$

und somit

$$\operatorname{Var}\left(\ln S_t^1\right) \;=\; \operatorname{Var}\left(\sigma \cdot W_t\right) \;=\; \sigma^2 \cdot t.$$

Dies gilt sowohl bei Verwendung des „natürlichen“ Maßes $\mathbb{P}$ als auch bei Verwendung des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$, da beim Übergang von $\mathbb{P}$ zu $\mathbb{Q}$ lediglich die (deterministische) Drift μ durch die Zinsrate r und der Wienerprozess W bezüglich $\mathbb{P}$ durch einen Wienerprozess $\tilde{W}$ bezüglich $\mathbb{Q}$ ersetzt wird.

Zur Schätzung von σ können grundsätzlich zwei unterschiedliche Verfahren verwendet werden:

1. Schätzung aus historischen Preisdaten (führt zur sogenannten *historischen* Volatilität)

2. Schätzung aus den Preisen bereits vorhandener Optionen für dieselbe Aktie (führt zur sogenannten *impliziten* Volatilität)

3.5.2.1 Historische Volatilität

Lemma 3.13 *Gegeben seien ein Black-Scholes-Modell* $\left(\mathbb{T},\, \left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\right),\, S^0,\, S^1\right)$ *mit Volatilität* σ *und* $n+1$ $(n \in \mathbb{N})$ *äquidistante Zeitpunkte* $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$ *mit* $t_0 < \ldots < t_n$ *sowie* $\delta := t_i - t_{i-1}$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$*. Dann ist*

$$\hat{\sigma}^2(U_1, \ldots, U_n) \;:=\; \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(U_i - \bar{U}\right)^2 \quad \textit{mit}$$

$$U_i \;:=\; \ln\left(\frac{S_{t_i}^1}{S_{t_{i-1}}^1}\right) \quad \textit{und} \quad \bar{U} \;:=\; \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2*.*

Beweis: Es wird gezeigt, dass $U_1, \ldots, U_n$ unabhängig und identisch verteilt mit

$$\operatorname{Var}\left(U_i\right) \;=\; \sigma^2 \cdot \delta$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ sind. Dann folgt aus einem Standardresultat der Mathematischen Statistik, dass die korrigierte Stichprobenvarianz

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(U_i - \bar{U}\right)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\sigma^2 \cdot \delta$ ist, d.h., dass

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i-\bar{U}\right)^2\right) \;=\; \sigma^2\cdot\delta$$

gilt. Für U_i $(i=1,\ldots,n)$ erhält man

$$\begin{aligned} U_i &= \ln\left(\frac{S^1_{t_i}}{S^1_{t_{i-1}}}\right) \;=\; \ln\left(\frac{s_0\cdot \mathrm{e}^{\sigma W_{t_i}+(\mu-\frac{\sigma^2}{2})\cdot t_i}}{s_0\cdot \mathrm{e}^{\sigma W_{t_{i-1}}+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t_{i-1}}}\right) \\ &= \sigma\cdot\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)+\left(t_i-t_{i-1}\right)\cdot\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right) \\ &= \sigma\cdot\left(W_{t_i}-W_{t_i-\delta}\right)+\delta\cdot\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Da die Differenzen $W_{t_i}-W_{t_i-\delta}$ für $i=1,\ldots,n$ unabhängig und identisch normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz δ sind, sind daher auch $U_1,\ldots,U_n$ unabhängig und identisch normalverteilt mit Erwartungswert $\delta\cdot\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)$ und Varianz $\sigma^2\cdot\delta$ bezüglich $\mathbb{P}$ bzw. mit Erwartungswert $\delta\cdot\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)$ und Varianz $\sigma^2\cdot\delta$ bezüglich $\mathbb{Q}$. ∎

Bemerkungen:

1. Der Schätzer $\hat{\sigma}^2(U_1,\ldots,U_n)$ ist zwar ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2, allerdings ist $\sqrt{\hat{\sigma}^2(U_1,\ldots,U_n)}$ *kein* erwartungstreuer Schätzer für die Volatilität σ, denn aus der Jensen'schen Ungleichung ergibt sich, da die Wurzelfunktion konkav ist:

$$\mathrm{E}\left(\sqrt{\hat{\sigma}^2(U_1,\ldots,U_n)}\right) \;\le\; \sqrt{\mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2(U_1,\ldots,U_n)\right)} \;=\; \sigma$$

   Das heißt, der Schätzer $\sqrt{\hat{\sigma}^2(U_1,\ldots,U_n)}$ unterschätzt die tatsächliche Volatilität σ. Allerdings lässt sich zeigen, dass er asymptotisch erwartungstreu ist. Ein erwartungstreuer Schätzer (unter der Annahme der Normalverteilung) für die Volatilität σ ist beispielsweise

$$\sqrt{\frac{1}{\delta}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(U_i-\bar{U}\right)^2},$$

   wobei Γ die Γ-Funktion bezeichnet (siehe „Schätzer für Standardabweichung“).

2. In der Praxis wird – trotz der Verzerrung – meist

$$\sqrt{\hat{\sigma}^2(U_1,\ldots,U_n)} \;=\; \sqrt{\frac{1}{\delta}}\cdot\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(U_i-\bar{U}\right)^2}$$

als Schätzer für die historische Volatilität verwendet, wobei die Zeitdifferenz δ üblicherweise „ein Handelstag" ist. Um eine Unterschätzung der Volatilität zu vermeiden, ist auch

$$\sqrt{\frac{1}{\delta}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i^2}$$

als Schätzer für σ gebräuchlich.

3. Ist δ „ein Handelstag", so ist $1/\delta$ die Anzahl der Handelstage pro Jahr. Für die Anzahl der Handelstage pro Jahr gibt es keine einheitliche Festlegung. Folgende Werte sind dabei üblich:

   - Für weltweit an den Börsen gehandelte Produkte werden 260 Handelstage (52 Wochen mit 5 Arbeitstagen) angenommen. [1]
   - In UK gibt es genau 8 weitere freie Tage im Jahr, an der New Yorker Börse 7 bis 8 weitere freie Tage im Jahr (u.a. durch Verschiebung von datumsgebundenen Feiertagen wie Weihnachten oder Neujahr), so dass häufig auch 252 Handelstage pro Jahr angenommen werden (siehe Abschnitt A.1.3).

   Ist $\hat{\sigma}_\delta$ ein Schätzer für die „tägliche Volatilität", lässt sich somit daraus mittels

   $$\sqrt{260} \cdot \hat{\sigma}_\delta \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt{252} \cdot \hat{\sigma}_\delta$$

   ein Schätzer für die jährliche Volatilität σ bestimmen.

4. Ist δ „ein Handelstag", so wird üblicherweise für n ein Wert zwischen 65 (Vierteljahr) und 130 (Halbjahr) verwendet.

5. Der Ausdruck $\ln\left(\frac{S^1_{t_i}}{S^1_{t_{i-1}}}\right)$ wird auch als *logarithmierte* oder *stetige Rendite* der Aktie für den Zeitraum von t_{i-1} bis t_i bezeichnet. Insbesondere für eine stetig verzinste Anleihe mit $S_t \equiv \mathrm{e}^{rt}$ ergibt sich

   $$\ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right) = \ln \mathrm{e}^{r\cdot(t_i - t_{i-1})} = r \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

   Außerdem ist

   $$S^1_{t_{i-1}} \cdot \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{S^1_{t_i}}{S^1_{t_{i-1}}}\right)} = S^1_{t_i}.$$

   Der obige Schätzer für die Volatilität entspricht damit – vereinfacht ausgedrückt – der Standardabweichung der täglichen logarithmierten Rendite.

[1] Genau genommen sollte von 261 Handelstage pro Jahr ausgegangen werden, denn $365.25 \cdot 5/7 \approx 260.89$.

Demgegenüber heißt

$$\frac{S^1_{t_i} - S^1_{t_{i-1}}}{S^1_{t_{i-1}}} = \frac{S^1_{t_i}}{S^1_{t_{i-1}}} - 1$$

die *einfache* oder *diskrete Rendite* der Aktie für den Zeitraum von t_{i-1} bis t_i. Insbesondere für eine diskret jährlich verzinste Anleihe $S_t \equiv (1+i)^t$ ergibt sich

$$\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} - 1 = \frac{(1+i)^{t_i}}{(1+i)^{t_{i-1}}} - 1 = (1+i)^{t_i - t_{i-1}} - 1.$$

Außerdem ist

$$S^1_{t_{i-1}} \cdot \left(1 + \left(\frac{S^1_{t_i}}{S^1_{t_{i-1}}} - 1\right)\right) = S^1_{t_i}.$$

3.5.2.2 Implizite Volatilität und Smile-Effekt

- Die **implizite** Volatilität (*implied volatility*) erhält man durch Bestimmung von σ aus dem realisierten Marktpreis

  $$V_0^C = V_0^C(s_0, \sigma, T, r)$$

  eines Derivats C für dasselbe Underlying S^1 („Umkehrung der Black-Scholes-Formel"), wobei die übrigen Parameter Startwert s_0, Laufzeit T und Zinsrate r bekannt sind. Die Laufzeit T sollte dabei idealerweise mit der Laufzeit des verwendeten Black-Scholes-Modells übereinstimmen bzw. dieser sehr nahe kommen (theoretisch ist σ zwar konstant und somit unabhängig von T, in der Praxis jedoch nicht).

- Üblicherweise sind die Preisformeln V_0^C nicht explizit nach σ auflösbar, so dass numerische Verfahren angewendet werden müssen, z.B. das Newton-Verfahren: Ausgehend von einem Startwert σ_0, der „hinreichend nahe" ($\sigma_0 = 0.2$ ist in vielen Fällen angemessen) an dem wahren Wert σ liegen sollte, werden iterativ mittels

  $$\sigma_{n+1} := \sigma_n - \frac{V_0^C(s_0, \sigma_n, T, r)}{\frac{\partial V_0^C(s_0,\sigma,T,r)}{\partial \sigma}\big|_{\sigma=\sigma_n}} = \sigma_n - \frac{V_0^C(s_0, \sigma_n, T, r)}{\nu^C(s_0, \sigma_n, T, r)} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

  neue Näherungen σ_{n+1} für σ bestimmt. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn $\left|\frac{V_0^C(s_0,\sigma_n,T,r)}{\nu^C(s_0,\sigma_n,T,r)}\right|$, d.h. $\left|\sigma_{n+1} - \sigma_n\right|$, hinreichend klein ist.

- In der Praxis tritt außerdem der Effekt auf, dass die Volatilität σ von der Differenz $s_0 - \tilde{K}$ folgendermaßen abhängt:

  – Ist $s_0 \approx \tilde{K}$ (d.h. sowohl die Call- auch die Put-Option befinden sich „at the money"), ist die implizite Volatilität vergleichsweise kleiner.

  - Im Bereich der Extremwerte $s_0 \gg \tilde{K}$ bzw. $s_0 \ll \tilde{K}$ („deep in the money" bzw. „deep out of the money" für Call-Optionen bzw. umgekehrt für Put-Optionen) ist die implizite Volatilität vergleichsweise größer.
  - Wird die implizite Volatilität als Funktion des Strikes $\tilde{K}$ angesehen, hat der Graph dieser Funktion die Gestalt eines „Lächelns" mit dem Minimum bei s_0, weswegen diese Abhängigkeit der impliziten Volatilität von $\tilde{K}$ auch als **Smile-Effekt** bezeichnet wird.

- Die Verwendung der impliziten anstatt der historischen Volatilität hat – trotz der Verzerrung durch den Smile-Effekt – den Vorteil, dass sich der so bestimmte Preis konsistent zu den Marktpreisen vergleichbarer Produkte verhält.

3.6 Der Preis einer Barrier-Option

- Bei Barrier-Optionen handelt es sich um *pfadabhängige* Derivate, so dass die Methoden für die Bewertung von *pfadunabhängigen* Derivaten des vorigen Abschnitts nicht angewendet werden können.

- Zu Barrier-Optionen siehe Abschnitt 2.1.2.5: Auszahlungsprofile wie bei den Europäischen Optionen, wobei nur dann eine Auszahlung erfolgt, wenn der zugrunde liegende Preisprozess S^1 eine vorgegebene Schranke $\tilde{B}$ erreicht oder nicht.

  Dabei unterscheidet man folgende Varianten:

  - **Knock-out Optionen** mit den Spezialfällen **down-and-out** ($\mathrm{d\&o}$) bzw. **up-and-out** ($\mathrm{u\&o}$): Nullauszahlung, falls untere bzw. obere Schranke erreicht wird
  - **Knock-in Optionen** mit den Spezialfällen **down-and-in** ($\mathrm{d\&i}$) bzw. **up-and-in** ($\mathrm{u\&i}$): Nullauszahlung, falls untere bzw. obere Schranke *nicht* erreicht wird
  - Jeweils Ausprägungen als Call- oder Put-Option möglich

- Mathematische Beschreibung durch ein Tripel $\left(S^1, \tilde{B}, \tilde{K}\right)$ (Preisprozess der Aktie im Black-Scholes-Modell S^1 sowie $\tilde{B}, \tilde{K} > 0$) mit den jeweiligen Bezeichnungsindizes $\mathrm{d\&oCO}$, $\mathrm{d\&oPO}$, $\ldots$, $\mathrm{u\&iCO}$, $\mathrm{u\&iPO}$ und zugehörige Auszahlungsprofilen (Auswahl)[2]

$$C_{(S^1,\tilde{B},\tilde{K})_{\mathrm{d\&oCO}}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 \le \tilde{B} \\ \left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ & \text{sonst} \end{cases} = \left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\}}$$

$$C_{(S^1,\tilde{B},\tilde{K})_{\mathrm{u\&iPO}}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \max\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 < \tilde{B} \\ \left(\tilde{K}\mathbf{1} - S_T^1\right)^+ & \text{sonst} \end{cases} = \left(\tilde{K}\mathbf{1} - S_T^1\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\max\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 \ge \tilde{B}\}}$$

- Die Preisbestimmung für eine Barrier-Option mit Auszahlungsprofil C erfolgt mit Hilfe des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ über

$$c_0(C) = \mathrm{e}^{-rT} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C).$$

- Zur Berechnung des Erwartungswertes $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C)$ ist die Kenntnis der gemeinsamen Verteilung von S_T^1 und $\max\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1$ bzw. $\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1$ erforderlich. Es wird sich im Folgenden zeigen, dass es ausreicht, die gemeinsame Verteilung von

$$W_T + a \cdot T \qquad \text{und} \qquad \max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a \cdot t)$$

[2] Die Existenz von $\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1$ bzw. $\max\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1$ kann dabei vorausgesetzt werden, da der zugrunde liegende Wienerprozess stetig ist und jede reelle Zahl von ihm mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht wird – somit ist auch S^1 stetig und nimmt jede positive reelle Zahl mit positiver Wahrscheinlichkeit an.

für $a \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Eine analoge Betrachtung für das Minimum ist nicht erforderlich, da das Minimum aufgrund folgender Überlegungen in ein entsprechendes Maximum überführt werden kann (hier für den Fall der down-and-out Barrier-Option):

$$\begin{aligned}
\left\{\min_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\right\} &= \left\{\omega\in\Omega : \min_{t\in\mathbb{T}} S_t^1(\omega) > \tilde{B}\right\} \\
&= \left\{\omega\in\Omega : \min_{t\in\mathbb{T}} s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t(\omega)+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t} > \tilde{B}\right\} \\
&= \left\{\omega\in\Omega : \min_{t\in\mathbb{T}} \left(\sigma W_t(\omega) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t\right) > \ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right\} \\
&= \left\{\omega\in\Omega : \min_{t\in\mathbb{T}} \left(W_t(\omega) + \left(\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)\cdot t\right) > \frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right\} \\
&= \left\{\omega\in\Omega : \max_{t\in\mathbb{T}} \left(-W_t(\omega) + \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\mu}{\sigma}\right)\cdot t\right) < -\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right\} \\
&= \left\{\max_{t\in\mathbb{T}}(-W_t + a\cdot t) < -\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right\} \qquad \text{mit} \quad a := \frac{\sigma}{2} - \frac{\mu}{\sigma}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Spiegelungsinvarianz des Wienerprozesses (d.h. $-W$ ist ebenfalls ein Wienerprozess) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\min_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(-W_t + a\cdot t) < -\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) < -\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right).
\end{aligned}$$

- Zunächst wird die gemeinsame Verteilung von W_T und $\max_{t\in\mathbb{T}} W_t$ betrachtet. Dafür benötigt man Stoppzeiten und das Reflexionsprinzip (siehe Anhang C.5). Aufgrund der Verwendung von Stoppzeiten wird außerdem im Folgenden als „Standardfiltration" die um die Nullmengen von $\mathcal{F}$ erweiterte natürliche Filtration des Wienerprozesses verwendet.

Lemma 3.14 *Für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt*

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x, W_T < x - y\right) = \mathbb{P}\left(W_T > x + y\right).$$

Beweis: Es sei

$$\tau_{\{x\}} = \inf\left\{t\in\mathbb{T} : W_t = x\right\}$$

der Zeitpunkt des ersten Berührens der Schranke x durch den Prozess W. Ist $\max_{t\in\mathbb{T}} W_t(\omega) \geq x$ für ein $\omega \in \Omega$, so gilt für dasselbe ω auch $\tau_{\{x\}}(\omega) \leq T$, ansonsten $\tau_{\{x\}}(\omega) = \infty$. $\tau_{\{x\}}$ ist eine Stoppzeit (bezüglich der erweiterten natürlichen Filtration des Wienerprozesses).

Der dazugehörige reflektierte Prozess $W^{(\tau_{\{x\}})}$ ist ebenfalls ein Wienerprozess. Auch $W^{(\tau_{\{x\}})}$ berührt die Schranke x erstmalig zum Zeitpunkt $\tau_{\{x\}}$, da er vor $\tau_{\{x\}}$ wie der Prozess W verläuft. Man erhält demnach

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x, W_T < x-y\right) &= \mathbb{P}\left(\tau_{\{x\}} \leq T, W_T < x-y\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\tau_{\{x\}} \leq T, W_T^{(\tau_{\{x\}})} < x-y\right).\end{aligned}$$

Da wegen $\tau_{\{x\}} \leq T$ der Prozess $W_T^{(\tau_{\{x\}})}$ zum Zeitpunkt T bereits am Wert x reflektiert wurde, ist

$$\mathbb{P}\left(\tau_{\{x\}} \leq T, W_T^{(\tau_{\{x\}})} < x-y\right) = \mathbb{P}\left(\tau_{\{x\}} \leq T, W_T > x+y\right)$$

und wegen

$$\left\{W_T > x+y\right\} \subset \left\{\tau_{\{x\}} \leq T\right\}$$

somit

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x, W_T < x-y\right) = \mathbb{P}\left(W_T > x+y\right).$$

■

Daraus ergibt sich die Verteilung von $\max_{t\in\mathbb{T}} W_t$:

Lemma 3.15 *Es gilt* $\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \sim \left|W_T\right|$.

Beweis: Da die Intervalle $[x,\infty)$, $x \in \mathbb{R}$, die Borel'sche σ-Algebra erzeugen, genügt es, $\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x\right)$ für $x \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Für $x < 0$ ist wegen $W_0 = 0$ offensichtlich

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x\right) = 1 = \mathbb{P}\left(\left|W_T\right| \geq x\right).$$

Für $x \geq 0$ ergibt sich

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x, W_T \geq x\right) + \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x, W_T < x\right)$$

Wegen

$$\{W_T \geq x\} \subset \left\{\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x\right\}$$

sowie Lemma 3.14 mit $y = 0$ ergibt sich weiter wegen $\mathbb{P}(W_T = x) = 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \geq x\right) = \mathbb{P}\Big(W_T \geq x\Big) + \mathbb{P}\Big(W_T > x\Big) = 2 \cdot \mathbb{P}\Big(W_T \geq x\Big).$$

Dies ist aber gerade $\mathbb{P}\left(\left|W_T\right| \geq x\right)$, denn wegen der Spiegelungsinvarianz des Wienerprozess (und folglich $W_T \sim (-W_T)$) erhält man

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|W_T\right| \geq x\right) &= \mathbb{P}\left(W_T \geq x\right) + \mathbb{P}\left(W_T \leq -x\right) = \mathbb{P}\left(W_T \geq x\right) + \mathbb{P}\left(-W_T \geq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W_T \geq x\right) + \mathbb{P}\left(W_T \geq x\right) = 2 \cdot \mathbb{P}\Big(W_T \geq x\Big).\end{aligned}$$

■

Bemerkungen:

1. Aus diesem Lemma ergibt sich insbesondere

$$\mathbb{P}\left(\max_{t \in \mathbb{T}} W_t = x\right) = \mathbb{P}\left(\left|W_T\right| = x\right) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ (siehe Lemma 3.14)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{t \in \mathbb{T}} W_t \geq x, W_T < x - y\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{t \in \mathbb{T}} W_t > x, W_T < x - y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\max_{t \in \mathbb{T}} W_t > x, W_T \leq x - y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(W_T > x + y\right).\end{aligned}$$

2. Für die Verteilungsfunktion von $\max\limits_{t \in \mathbb{T}} W_t$ gilt

$$F_{\max\limits_{t \in \mathbb{T}} W_t}(x) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right) - 1$$

für $x \geq 0$, denn aus dem Beweis zu obigem Lemma erhält man

$$\begin{aligned}F_{\max\limits_{t \in \mathbb{T}} W_t}(x) &= \mathbb{P}\left(\max_{t \in \mathbb{T}} W_t \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\left|W_T\right| \leq x\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|W_T\right| > x\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|W_T\right| \geq x\right) \\ &= 1 - 2 \cdot \mathbb{P}\Big(W_T \geq x\Big) = 1 - 2 \cdot \Big(1 - \mathbb{P}\left(W_T < x\right)\Big) \\ &= 1 - 2 \cdot \Big(1 - \mathbb{P}\left(W_T \leq x\right)\Big) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right) - 1.\end{aligned}$$

Nun ergibt sich für die gemeinsame Verteilung von $\max\limits_{t \in \mathbb{T}} W_t$ und W_T:

Lemma 3.16 *Der Vektor* $\left(\max\limits_{t \in \mathbb{T}} W_t, W_T\right)$ *besitzt die Verteilungsfunktion*

$$F_{\left(\max\limits_{t \in \mathbb{T}} W_t, W_T\right)} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} 0 & \textit{für } x \leq 0 \\ 2 \cdot \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right) - 1 & \textit{für } 0 < x \leq y \\ \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right) & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Es wird

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \le x, W_T \le y\right) \;=\; F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(x,y)$$

betrachtet.

Fall 1: $x \le 0$: Wegen $W_0 = 0$ ist stets $\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t \;\ge\; 0$. Demnach ist

$$F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(x,y) \;=\; 0 \qquad \text{für} \quad x < 0$$

und wegen

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t = 0\right) \;=\; 0$$

folglich

$$F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(x,y) \;=\; 0 \qquad \text{für} \quad x \le 0.$$

Fall 2: $0 < x \le y$: In diesem Fall ist

$$\left\{\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \le x\right\} \;\subset\; \{W_T \le y\}$$

und somit wegen obiger 2. Bemerkung

$$F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(x,y) \;=\; \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \le x\right) \;=\; 2\cdot\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right) - 1.$$

Fall 3: $x > 0$ und $y < x$: Wegen obiger 1. Bemerkung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \le x, W_T \le y\right) &= \mathbb{P}(W_T \le y) - \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t > x, W_T \le y\right) \\
&= \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}}\right) - \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \ge x, W_T < x - (x-y)\right) \\
&= \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}}\right) - \mathbb{P}(W_T > 2x - y) \\
&= \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{T}}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}$$

■

Bemerkung: Der Vektor $\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)$ besitzt die λ^2-Dichte

$$f_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mapsto\; \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 0 \text{ oder } y \ge x \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \frac{2x-y}{T} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(2x-y)^2}{2T}} & \text{für } x > 0 \text{ und } y < x, \end{cases}$$

denn

$$f_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(x,y) \;=\; \frac{\partial F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(x,y)}{\partial x \partial y} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 0 & \text{für } 0 < x \leq y \\ \frac{\partial \Phi\left(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right)}{\partial x \partial y} & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\frac{\partial \Phi\left(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right)}{\partial x \partial y} \;=\; \frac{\partial}{\partial y}\frac{2}{\sqrt{T}} \cdot \phi\left(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right) \;=\; -\frac{2}{T} \cdot \phi'\left(\frac{2x-y}{\sqrt{T}}\right)$$

mit

$$\phi'(z) \;=\; -z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad (z \in \mathbb{R}).$$

Zur Preisbestimmung von Barrier-Optionen wird die gemeinsame Verteilung von $\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t)$ und $W_T + a \cdot T$ für $a \in \mathbb{R}$ benötigt. Für diese Verteilung ergibt sich folgende Aussage:

Lemma 3.17 *Für $a \in \mathbb{R}$ besitzt der Vektor $\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t), W_T + a\cdot T\right)$ die Verteilungsfunktion*

$$F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t), W_T + a\cdot T\right)} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mapsto\; \begin{cases} 0 & \textit{für } x \leq 0 \\ \Phi\left(\frac{x-a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) + \mathrm{e}^{2ax}\cdot\Phi\left(\frac{x+a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) & \textit{für } 0 < x \leq y \\ \Phi\left(\frac{y-a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) - \mathrm{e}^{2ax}\cdot\Phi\left(\frac{y-2x-a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) & \textit{sonst} \end{cases}$$

Beweis: Es wird

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) \leq x, W_T + a\cdot T \leq y\right) \;=\; F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t), W_T + a\cdot T\right)}(x,y)$$

betrachtet.

- Gemäß dem Satz von Girsanov (Satz 3.8) ist $\hat{W} = \left(\hat{W}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

  $$\hat{W}_t \;:=\; W_t - a\cdot t$$

  bezüglich dem zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Maß $\hat{\mathbb{P}}$, das die Dichte

  $$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \;=\; \mathrm{e}^{aW_T - \frac{1}{2}a^2 T}$$

  bezüglich $\mathbb{P}$ besitzt, ein Wienerprozess. [3]

[3] Man beachte, dass hier der Prozess $(W_t - a\cdot t)_{t\in\mathbb{T}}$ und nicht der Prozess $(W_t + a\cdot t)_{t\in\mathbb{T}}$ – wie hier sonst üblich – der Wienerprozess bezüglich $\hat{\mathbb{P}}$ ist. Dies führt dazu, dass sich bei der Dichte $\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ das Vorzeichen von a gegenüber der üblichen Betrachtungsweise umkehrt.

- Da sowohl die gemeinsame Verteilung als auch die Dichte von $\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)$ bekannt sind (siehe Lemma 3.16 und die darauf folgende Bemerkung), ergibt sich für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) \leq x,\ W_T + a\cdot T \leq y\right) \\
= \ & \hat{\mathbb{P}}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(\hat{W}_t + a\cdot t) \leq x,\ \hat{W}_T + a\cdot T \leq y\right) \\
= \ & \hat{\mathbb{P}}\left(\max_{t\in\mathbb{T}} W_t \leq x,\ W_T \leq y\right) \\
= \ & \int\limits_{\{\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t \leq x,\ W_T\leq y\}} \mathrm{d}\hat{\mathbb{P}} \\
= \ & \int\limits_{\{\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t \leq x,\ W_T\leq y\}} \mathrm{e}^{aW_T - \frac{1}{2}a^2 T}\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
= \ & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T} \int\limits_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} \mathrm{e}^{a\tilde{y}}\,\mathrm{d}\mathbb{P}_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(\tilde{x},\tilde{y}) \\
= \ & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T} \int\limits_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} \mathrm{e}^{a\tilde{y}}\cdot f_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(\tilde{x},\tilde{y})\,\mathrm{d}\lambda^2(\tilde{x},\tilde{y}) \\
= \ & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T} \int\limits_{\tilde{x}=-\infty}^{x}\int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}}\cdot f_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(\tilde{x},\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{x}
\end{aligned}$$

- Für $x \leq 0$ folgt daraus wegen

$$f_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(x,y) = 0 \qquad \text{für } x \leq 0$$

sofort

$$F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t), W_T + a\cdot T\right)}(x,y) \ = \ 0 \qquad \text{für } x \leq 0.$$

- Für $x > 0$ ist somit zunächst

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) \leq x,\ W_T + a\cdot T \leq y\right) \\
= \ & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T} \int\limits_{\tilde{x}=0}^{x}\int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}}\cdot f_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}} W_t, W_T\right)}(\tilde{x},\tilde{y})\,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{x}.
\end{aligned}$$

Für $x > 0$ und $y < x$ ist

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) \leq x,\ W_T + a\cdot T \leq y\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T} \int\limits_{\tilde{x}=0}^{x} \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{\min(y,\tilde{x})} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \frac{2\tilde{x}-\tilde{y}}{T} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(2\tilde{x}-\tilde{y})^2}{2T}} \,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{x},$$

für $x > 0$ und $y \geq x$ ist

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) \leq x,\ W_T + a\cdot T \leq y\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T} \int\limits_{\tilde{x}=0}^{x} \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{\tilde{x}} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \frac{2\tilde{x}-\tilde{y}}{T} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(2\tilde{x}-\tilde{y})^2}{2T}} \,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{x}.$$

Es genügt demnach, im Folgenden den Fall $x > 0$ und $y < x$ zu betrachten, da der Fall $x > 0$ und $y \geq x$ sich aus diesem für $y = x$ ergibt.

- Vertauschung der Integrationsreihenfolge (Skizze!) führt im betrachteten Fall $x > 0$ und $y < x$ wegen

$$\left\{\begin{array}{c} 0 < \tilde{x} \leq x \\ -\infty < \tilde{y} \leq \min(y,\tilde{x}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} -\infty < \tilde{y} \leq y \\ \max(0,\tilde{y}) < \tilde{x} \leq x \end{array}\right\}$$
$$= \left\{\begin{array}{r} -\infty < \tilde{y} \leq 0 \\ 0 < \tilde{x} \leq x \end{array}\right\} \cup \left\{\begin{array}{c} 0 < \tilde{y} \leq y \\ \tilde{y} < \tilde{x} \leq x \end{array}\right\}$$

mit der Substitution

$$z := \frac{2\tilde{x}-\tilde{y}}{\sqrt{T}} \quad \left(\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tilde{x}} = \frac{2}{\sqrt{T}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\tilde{x} = \frac{\sqrt{T}}{2}\cdot \mathrm{d}z\right)$$

zu

$$\mathbb{P}\left(\max_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) \leq x,\ W_T + a\cdot T \leq y\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T}}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \int\limits_{\tilde{x}=\max(0,\tilde{y})}^{x} \frac{2}{\sqrt{T}} \cdot \frac{2\tilde{x}-\tilde{y}}{\sqrt{T}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(2\tilde{x}-\tilde{y})^2}{2T}} \,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T}}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \int\limits_{(\tilde{x}=\max(0,\tilde{y}))}^{(x)} z\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2} \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\tilde{y}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T}}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{(\tilde{x}=\max(0,\tilde{y}))}^{(\tilde{x}=x)} \mathrm{d}\tilde{y}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T}}{\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \left[-\mathrm{e}^{-\frac{(2\tilde{x}-\tilde{y})^2}{2T}}\right]_{\tilde{x}=\max(0,\tilde{y})}^{\tilde{x}=x} \mathrm{d}\tilde{y}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T}}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \left(\int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{0} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \left[-\mathrm{e}^{-\frac{(2\tilde{x}-\tilde{y})^2}{2T}} \right]_{\tilde{x}=0}^{\tilde{x}=x} \mathrm{d}\tilde{y} + \int\limits_{\tilde{y}=0}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \left[-\mathrm{e}^{-\frac{(2\tilde{x}-\tilde{y})^2}{2T}} \right]_{\tilde{x}=\tilde{y}}^{\tilde{x}=x} \mathrm{d}\tilde{y} \right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T}}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \left(\int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{0} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{y}^2}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{(2x-\tilde{y})^2}{2T}} \right) \mathrm{d}\tilde{y} \right. \\
&\qquad \left. + \int\limits_{\tilde{y}=0}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{y}^2}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{(2x-\tilde{y})^2}{2T}} \right) \mathrm{d}\tilde{y} \right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2T}}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{a\tilde{y}} \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{\tilde{y}^2}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{(2x-\tilde{y})^2}{2T}} \right) \mathrm{d}\tilde{y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{\tilde{y}^2-2aT\tilde{y}+a^2T^2}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{(2x-\tilde{y})^2-2aT\tilde{y}+a^2T^2}{2T}} \mathrm{d}\tilde{y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{(\tilde{y}-aT)^2}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{(\tilde{y}-2x)^2-2aT(\tilde{y}-2x)+a^2T^2-4aTx}{2T}} \mathrm{d}\tilde{y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int\limits_{\tilde{y}=-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{(\tilde{y}-aT)^2}{2T}} - \mathrm{e}^{-\frac{(\tilde{y}-2x-aT)^2}{2T}} \cdot \mathrm{e}^{2ax} \,\mathrm{d}\tilde{y} \\
&= \Phi\left(\frac{y-a\cdot T}{\sqrt{T}} \right) - \mathrm{e}^{2ax} \cdot \Phi\left(\frac{y-2x-a\cdot T}{\sqrt{T}} \right) \\
&= \Phi\left(\frac{y-a\cdot T}{\sqrt{T}} \right) + \mathrm{e}^{2ax} \cdot \Phi\left(\frac{2x-y+a\cdot T}{\sqrt{T}} \right)
\end{aligned}
$$

■

Bemerkungen:

1. Im Folgenden wird nicht die gemeinsame Verteilung von $\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t)$ und $W_T + a\cdot T$ für $a\in\mathbb{R}$, sondern die *bedingte* Verteilung von $W_T + a\cdot T$ unter $\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t + a\cdot t) \leq z$ für ein festes $z\in\mathbb{R}$ benötigt, da die Barriere üblicherweise fest gewählt ist. Insbesondere benötigt man die bedingte Dichte

$$
f_{W_T+a\cdot T\,|\,\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t)\leq z} : y\in\mathbb{R} \;\mapsto
$$

$$
\begin{cases} 0 & \text{für } z\leq 0 \text{ oder } y\geq z \\ \frac{1}{\sqrt{T}}\cdot\phi\left(\frac{y-a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) - \mathrm{e}^{2az}\cdot\frac{1}{\sqrt{T}}\cdot\phi\left(\frac{y-2z-a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) & \text{für } z>0 \text{ und } y<z, \end{cases}
$$

die man aus

$$\left.\frac{\partial F_{\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t),W_T+a\cdot T\right)}(x,y)}{\partial y}\right|_{x=z}$$

erhält.

2. Wegen $\mathbb{P}\left(\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t)=z\right)=0$ für $z\in\mathbb{R}$ ist

$$f_{W_T+a\cdot T\,|\,\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t)<z} \;=\; f_{W_T+a\cdot T\,|\,\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(W_t+a\cdot t)\le z}.$$

Satz 3.18 *Es sei*

$$V_0^C(\tilde K) \;=\; s_0\cdot\Phi(d_1)-\mathrm{e}^{-rT}\cdot\tilde K\cdot\Phi(d_2)$$

der Preis des Auszahlungsprofils C einer Europäischen Call-Option mit Strike $\tilde K$ sowie $d_1=d_1(\tilde K)$ und $d_2=d_2(\tilde K)$ gemäß (3.7). Weiter sei

$$C_{(S^1,\tilde B,\tilde K)_{\mathrm{d\&oCO}}} \;=\; \left(S_T^1-\tilde K\mathbf{1}\right)^+\cdot\mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}}S_t^1>\tilde B\}}$$

das Auszahlungsprofil einer Europäischen down-and-out Call-Option mit Schranke $\tilde B<s_0$ und Strike $\tilde K>\tilde B$. Dann ist der Preis dieses Auszahlungsprofils

$$c_0\left(C_{(S^1,\tilde B,\tilde K)_{\mathrm{d\&oCO}}}\right) \;=\; V_0^C(\tilde K)-\gamma^{-(1+\frac{2r}{\sigma^2})}\cdot V_0^C(\gamma^2\tilde K)$$

mit $\gamma:=\frac{s_0}{\tilde B}$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}c_0\left(C_{(S^1,\tilde B,\tilde K)_{\mathrm{d\&oCO}}}\right) &= \mathrm{e}^{-rT}\cdot\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(C_{(S^1,\tilde B,\tilde K)_{\mathrm{d\&oCO}}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{-rT}\cdot\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^1-\tilde K\mathbf{1}\right)^+\cdot\mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}}S_t^1>\tilde B\}}\right),\end{aligned}$$

wobei $\mathbb{Q}$ das äquivalente Martingalmaß im betrachteten Black-Scholes-Modell ist. Der Wienerprozess bezüglich $\mathbb{Q}$ wird im Folgenden mit $\tilde W$ bezeichnet.

- Damit die oben hergeleitete bedingte Verteilung von $\tilde W_T+a\cdot T$ unter $\max\limits_{t\in\mathbb{T}}(\tilde W_t+a\cdot t)\le z$ für noch zu bestimmende Werte $a,z\in\mathbb{R}$ verwendet werden kann, müssen zunächst entsprechende Umformungen erfolgen:

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^1-\tilde K\mathbf{1}\right)^+\cdot\mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}}S_t^1>\tilde B\}}\right)$$

$$= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_T + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T} - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t} > \tilde{B}\right\}}\right)$$

(Übergang zu $\tilde{W}$, $\mu \to r$)

$$= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma \tilde{W}_T + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot T} - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma \tilde{W}_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\cdot t} > \tilde{B}\right\}}\right)$$

$$= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\left(\tilde{W}_T - a\cdot T\right)} - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma\left(\tilde{W}_t - a\cdot t\right)} > \tilde{B}\right\}}\right)$$

mit

$$a := \frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}.$$

- Für die Menge der Indikatorfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left\{\min_{t\in\mathbb{T}} s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma\left(\tilde{W}_t - a\cdot t\right)} > \tilde{B}\right\} \\
= &\left\{\min_{t\in\mathbb{T}} \left(\tilde{W}_t - a\cdot t\right) > \frac{1}{\sigma}\cdot \ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right\} \\
= &\left\{\max_{t\in\mathbb{T}} -\left(\tilde{W}_t - a\cdot t\right) < -\frac{1}{\sigma}\cdot \ln\frac{\tilde{B}}{s_0}\right\} \\
= &\left\{\max_{t\in\mathbb{T}} \left(-\tilde{W}_t + a\cdot t\right) < z\right\}
\end{aligned}$$

mit

$$z := \frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{B}} = \frac{\ln\gamma}{\sigma}.$$

- Somit ist

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\}}\right) \\
= &\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot\left(\tilde{W}_T - a\cdot T\right)} - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{t\in\mathbb{T}}\left(-\tilde{W}_t + a\cdot t\right) < z\right\}}\right) \\
= &\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma\cdot\left(-\tilde{W}_T + a\cdot T\right)} - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{t\in\mathbb{T}}\left(-\tilde{W}_t + a\cdot t\right) < z\right\}}\right)
\end{aligned}$$

(Spiegelungsinvarianz des Wienerprozesses: $\tilde{W} \sim -\tilde{W}$)

$$= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma\cdot\left(\tilde{W}_T + a\cdot T\right)} - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{t\in\mathbb{T}}\left(\tilde{W}_t + a\cdot t\right) < z\right\}}\right)$$

$$= \int \left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma\cdot\left(\tilde{W}_T + a\cdot T\right)} - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{t\in\mathbb{T}}\left(\tilde{W}_t + a\cdot t\right) < z\right\}} \,\mathrm{d}\mathbb{Q}.$$

- Durch Übergang zur bedingten Verteilung ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\}}\right) \\
&= \int \left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma y} - \tilde{K}\right)^+ \,\mathrm{d}\mathbb{Q}_{\tilde{W}_T + a\cdot T \,|\, \max\limits_{t\in\mathbb{T}}(\tilde{W}_t + a\cdot t) < z}(y) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma y} - \tilde{K}\right)^+ \cdot f_{\tilde{W}_T + a\cdot T \,|\, \max\limits_{t\in\mathbb{T}}(\tilde{W}_t + a\cdot t) < z}(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Da $s_0 > \tilde{B}$ vorausgesetzt wurde (ansonsten wäre die betrachtete down-and-out Option wertlos), ist $\gamma = \frac{s_0}{\tilde{B}} > 1$ und somit

$$z = \frac{\ln\gamma}{\sigma} > 0.$$

Wegen $f_{\tilde{W}_T + a\cdot T \,|\, \max\limits_{t\in\mathbb{T}}(\tilde{W}_t + a\cdot t) < z}(y) > 0$ für $z > 0$ und $y < z$ erhält man weiter

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\}}\right) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{z} \left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma y} - \tilde{K}\right)^+ \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \left(\phi\left(\frac{y - a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) - \mathrm{e}^{2az}\cdot\phi\left(\frac{y - 2z - a\cdot T}{\sqrt{T}}\right)\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

- Aus $s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma y} > \tilde{K}$ folgt

$$y < \frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}},$$

und da $\tilde{K} > \tilde{B}$ vorausgesetzt wurde (bei einer down-and-out Option liegt der Strike üblicherweise oberhalb der Schranke), ist

$$\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} < \frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{B}} = \frac{\ln\gamma}{\sigma} = z$$

und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\}}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \left(s_0 \cdot \mathrm{e}^{-\sigma y} - \tilde{K}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} \cdot \left(\phi\left(\frac{y - a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) - \mathrm{e}^{2az} \cdot \phi\left(\frac{y - 2z - a \cdot T}{\sqrt{T}}\right)\right) \mathrm{d}y$$

$$= s_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\sigma y} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(y-aT)^2}{2T}} \,\mathrm{d}y$$

$$- \tilde{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-aT)^2}{2T}} \,\mathrm{d}y$$

$$-\mathrm{e}^{2az} \cdot s_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\sigma y} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(y-2z-aT)^2}{2T}} \,\mathrm{d}y$$

$$+ \mathrm{e}^{2az} \cdot \tilde{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-2z-aT)^2}{2T}} \,\mathrm{d}y$$

- Für das erste Integral ergibt sich

$$s_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\sigma y} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(y-aT)^2}{2T}} \,\mathrm{d}y$$

$$= s_0 \cdot \mathrm{e}^{\frac{T^2\cdot(\sigma^2 - 2\cdot a\cdot\sigma)}{2T}} \cdot \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - (a-\sigma)\cdot T}{\sqrt{T}}\right)$$

$$= s_0 \cdot \mathrm{e}^{T\cdot\left(\frac{\sigma^2}{2} - \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)\cdot\sigma\right)} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - \sigma\cdot\left(\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right) - \sigma\right)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right)$$

$$= s_0 \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right) = s_0 \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot \Phi(d_1).$$

- Für das zweite Integral erhält man

$$\tilde{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-aT)^2}{2T}} \,\mathrm{d}y$$

$$= \tilde{K} \cdot \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - a\cdot T}{\sqrt{T}}\right)$$

$$= \tilde{K} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - \sigma\cdot\left(\frac{\sigma}{2} - \frac{r}{\sigma}\right)\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right)$$

$$= \tilde{K} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}}\right) = \tilde{K} \cdot \Phi(d_2).$$

- Für das dritte Integral ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{2az} \cdot s_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\sigma y} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(y-2z-aT)^2}{2T}}\, \mathrm{d}y \\
= \; & \mathrm{e}^{2az} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{4z\sigma T}{2T}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{T^2\cdot(\sigma^2-2\cdot a\cdot\sigma)}{2T}} \cdot s_0 \cdot \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - 2z - (a-\sigma)\cdot T}{\sqrt{T}}\right) \\
= \; & \mathrm{e}^{2z(a-\sigma)} \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot s_0 \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - 2\ln\gamma + (r + \frac{\sigma^2}{2})\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right) \\
= \; & \mathrm{e}^{\frac{2}{\sigma}\cdot\ln\gamma\cdot\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{r}{\sigma}-\sigma\right)} \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot s_0 \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - \ln\gamma^2 + (r + \frac{\sigma^2}{2})\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right) \\
= \; & \left(\mathrm{e}^{\ln\gamma}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}-2} \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot s_0 \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\gamma^2\tilde{K}} + (r + \frac{\sigma^2}{2})\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right) \\
= \; & \gamma^{-\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)} \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot s_0 \cdot \Phi\left(d_1(\gamma^2\tilde{K})\right).
\end{aligned}$$

- Für das vierte Integral erhält man

$$\begin{aligned}
& \mathrm{e}^{2az} \cdot \tilde{K} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-2z-aT)^2}{2T}}\, \mathrm{d}y \\
= \; & \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{\sigma}\cdot\ln\gamma\cdot\left(\frac{\sigma}{2}-\frac{r}{\sigma}\right)}}{\gamma^2} \cdot \gamma^2\tilde{K} \cdot \Phi\left(\frac{\frac{1}{\sigma}\cdot\ln\frac{s_0}{\tilde{K}} - 2z - a\cdot T}{\sqrt{T}}\right) \\
= \; & \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln\gamma}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}}{\gamma^2} \cdot \gamma^2\tilde{K} \cdot \Phi\left(\frac{\ln\frac{s_0}{\gamma^2\tilde{K}} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\cdot T}{\sigma\cdot\sqrt{T}}\right) \\
= \; & \gamma^{-\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)} \cdot \gamma^2\tilde{K} \cdot \Phi\left(d_2(\gamma^2\tilde{K})\right).
\end{aligned}$$

- Somit ist

$$\begin{aligned}
& c_0\left(C_{(S^1,\tilde{B},\tilde{K})_{\mathrm{d\&oCO}}}\right) \\
= \; & \mathrm{e}^{-rT} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{e}^{-rT} \cdot \Bigg(s_0 \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot \Phi(d_1) - \tilde{K} \cdot \Phi(d_2) - \gamma^{-\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)} \cdot \mathrm{e}^{rT} \cdot s_0 \cdot \Phi\left(d_1(\gamma^2 \tilde{K})\right) \\
&\qquad + \gamma^{-\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)} \cdot \gamma^2 \tilde{K} \cdot \Phi\left(d_2(\gamma^2 \tilde{K})\right)\Bigg) \\
&= V_0^C(\tilde{K}) - \gamma^{-(1+\frac{2r}{\sigma^2})} \cdot V_0^C(\gamma^2 \tilde{K})
\end{aligned}
$$

■

Bemerkungen:

1. Mit Hilfe von

$$V_0(K_1, K_2) := s_0 \cdot \Phi\Big(d_1(K_2)\Big) - \mathrm{e}^{-rT} \cdot K_1 \cdot \Phi\Big(d_2(K_2)\Big)$$

ist der Preis des Auszahlungsprofils C einer Europäischen Call-Option mit Strike $\tilde{K}$

$$c_0(C) = V_0(\tilde{K}, \tilde{K})$$

sowie der Preis des Auszahlungsprofils $C_{\mathrm{d\&o},\tilde{B}<\tilde{K}}$ einer Europäischen down-and-out Call-Option mit Strike $\tilde{K}$ und Schranke $\tilde{B} < \tilde{K}$

$$c_0(C_{\mathrm{d\&o},\tilde{B}<\tilde{K}}) = V_0(\tilde{K}, \tilde{K}) - \gamma^{-(1+\frac{2r}{\sigma^2})} \cdot V_0(\gamma^2 \tilde{K}, \gamma^2 \tilde{K}).$$

Für den Fall $\tilde{K} \leq \tilde{B}$ erhält man völlig analog zu obigen Überlegungen den Preis

$$c_0(C_{\mathrm{d\&o},\tilde{K}\leq\tilde{B}}) = V_0(\tilde{K}, \tilde{B}) - \gamma^{-(1+\frac{2r}{\sigma^2})} \cdot V_0(\gamma^2 \tilde{K}, \gamma^2 \tilde{B})$$

und somit für den allgemeinen Fall

$$c_0(C_{\mathrm{d\&o}}) = V_0\left(\tilde{K}, \max\{\tilde{K}, \tilde{B}\}\right) - \gamma^{-(1+\frac{2r}{\sigma^2})} \cdot V_0\left(\gamma^2 \tilde{K}, \gamma^2 \max\{\tilde{K}, \tilde{B}\}\right).$$

2. Der Preis des Auszahlungsprofils $C_{\mathrm{d\&i}}$ einer Europäischen down-and-in Call-Option lässt sich aus dem entsprechenden Preis von $C_{\mathrm{d\&o}}$ mit demselben Strike $\tilde{B}$ und derselben Schranke $\tilde{K}$ herleiten: Wegen

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{d\&i}} &= \left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 \leq \tilde{B}\}} = \left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ \cdot \left(1 - \mathbb{1}_{\{\min\limits_{t\in\mathbb{T}} S_t^1 > \tilde{B}\}}\right) \\
&= \left(S_T^1 - \tilde{K}\mathbf{1}\right)^+ - C_{\mathrm{d\&o}}
\end{aligned}
$$

ergibt sich

$$c_0\left(C_{\mathrm{d\&i}}\right) = c_0(C) - c_0\left(C_{\mathrm{d\&o}}\right).$$

3. Die Preise der Auszahlungsprofile anderer Barrier-Optionen (auch von Barrier-Put-Optionen) ergeben sich durch geeignete Transformationen sowie durch geeignet angepasste Put-Call-Paritäten (für eine Übersicht siehe z.B. `http://www.finance.uni-mainz.de/Dateien/BarrierOptionValuation.pdf`).

3.7 Handelsstrategie, Arbitrage und Replizierbarkeit

Einführende Bemerkungen:

- In einem (zeitdiskreten) Mehrperiodenmarktmodell $\left(n, \mathbb{T}^*, \left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n}, \mathbb{P}\right), S^0, \ldots, S^N\right)$ mit $\mathbb{T}^* = \{0, 1, \ldots, n\}$ ist ein *Portfolio* $\boldsymbol{H}$ z. Ztpkt $t \in \mathbb{T}^*$ eine $\mathcal{F}_t$-messbare $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige Zufallsgröße sowie eine *Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ ein an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ (man beachte $n-1$ anstatt n!) adaptierter $\mathbb{R}^{N+1}$-wertiger stochastischer Prozess.
- Analog dazu ergeben sich die Definitionen eines Portfolios und dessen Wert zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ sowie einer Handelsstrategie und deren Wertprozess in einem Black-Scholes-Modell:

Definition 3.19 *Gegeben seien ein Black-Scholes-Modell $\left(\mathbb{T}, \left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right),\ S^0,\ S^1\right)$ mit $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$, und $\left(\mathcal{F}_t^*\right)_{t \in \mathbb{T}}$, die erweiterte natürliche Filtration des S^1 erzeugenden Wienerprozesses W.*

- *Dann heißt eine $\mathcal{F}_t^*$-messbare $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsgröße $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H^0 \\ H^1 \end{pmatrix}$ ein **Portfolio** z. Ztpkt $t \in \mathbb{T}$ sowie*

  $$V_t(\boldsymbol{H}) \ := \ H^0 \cdot S_t^0 + H^1 \cdot S_t^1 \ = \ H^0 \cdot \mathrm{e}^{rt} + H^1 \cdot s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t}$$

  *der **Wert** des Portfolios $\boldsymbol{H}$ z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$.*
- *Ein an $\left(\mathcal{F}_t^*\right)_{t \in \mathbb{T}}$ adaptierter $\mathbb{R}^2$-wertiger stochastischer Prozess $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t \in \mathbb{T}}$ heißt eine **Handelsstrategie** sowie*

  $$V(\overline{\boldsymbol{H}}) := \left(V_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t \in \mathbb{T}}$$

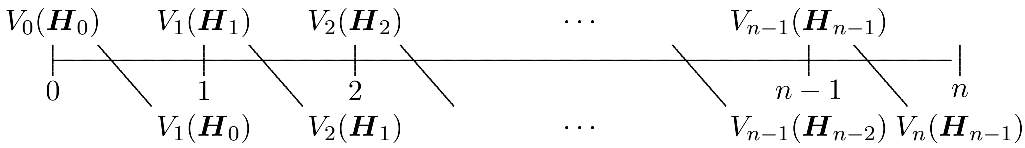
  *der **Wertprozess** der Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$.*

Bemerkungen:

- In einem zeitdiskreten Mehrperiodenmarktmodell (MPM) ist eine *Arbitrage* eine *selbstfinanzierende* Handelsstrategie mit bestimmten Eigenschaften. Die Eigenschaft der *Selbstfinanzierung* beinhaltet, dass zu den jeweiligen Handelszeitpunkten die Portfolios nur „wertneutral" verändert werden dürfen, d.h., dass der Wert des „alten" Portfolios mit dem des „neuen" Portfolios übereinstimmt. Im zeitdiskreten MPM ist eine Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ demnach gemäß Definition genau dann selbstfinanzierend, falls

  $$V_t\left(\boldsymbol{H}_{t-1}\right) \ = \ V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{für } t = 1, \ldots, n-1$$

  gilt. Das lässt sich folgendermaßen graphisch veranschaulichen:



- In dem zeitstetigen Black-Scholes-Modell stellt sich die Definition der Selbstfinanzierung natürlicherweise ungleich schwieriger dar. Es wird sich sogar herauszustellen, dass dies lediglich mit einem erweiterten Integralbegriff, nämlich dem des Itō-Integrals[4], sinnvoll möglich ist.

- Um analoge Betrachtungen wie im zeitdiskreten Modell zu ermöglichen und die Verallgemeinerung auf das zeitstetige Modell zu motivieren, werden zunächst sogenannte *einfache* Handelsstrategien betrachtet, die auf Zeitintervallen „konstant" sind, d.h., aus einer endlichen Anzahl von Portfolios gebildet werden:

Definition 3.20 *Eine Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *im Black-Scholes-Modell heißt* ***einfach****, wenn es Zeitpunkte* $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$, *mit*

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$$

gibt, so dass

$$\boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{H}_{t_{i(t)}} \quad \textit{mit} \quad i(t) := \max\left\{j = 0, \ldots, n-1 : t_j \leq t\right\}$$

für $t \in \mathbb{T}$ *gilt. Eine einfache Handelsstrategie heißt* ***selbstfinanzierend****, falls*

$$V_{t_i}\left(\boldsymbol{H}_{t_{i-1}}\right) = V_{t_i}\left(\boldsymbol{H}_{t_i}\right) \quad \mathbb{P}\textit{-f.s.} \quad \textit{für } i = 1, \ldots, n-1$$

gilt.

Bemerkungen:

- Eine einfache Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ist demnach bereits durch n Portfolios $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{H}_1$, …, $\boldsymbol{H}_{n-1}$ zu den Zeitpunkten t_0, t_1, …, t_{n-1} eindeutig bestimmt und es ist

$$\boldsymbol{H}_t = \begin{cases} \boldsymbol{H}_0 & \text{für } t \in [0, t_1) \\ \boldsymbol{H}_1 & \text{für } t \in [t_1, t_2) \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{H}_{n-1} & \text{für } t \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}$$

[4] Itō Kiyoshi, 1915-2008, japanischer Mathematiker. „Itō" ist der Familienname, der im Japanischen üblicherweise vorangestellt ist. Die erste Publikation im Zusammenhang mit dem Itō-Integral ist auf Japanisch und stammt aus dem Jahr 1942. Im Jahr 2000 wurde durch Öffnung eines versiegelten Umschlags an der Französischen Akademie der Wissenschaften bekannt, dass der deutsch-französische Mathematiker Wolfgang Doeblin (1915-1940), Sohn des deutschen Schriftstellers Alfred Döblin (Roman „Berlin Alexanderplatz"), bereits 1940 ähnliche Resultate erzielte.

- Für einfache Handelsstrategien ist nun folgende Charakterisierung der Selbstfinanzierung möglich: Für $i = 1, \ldots, n-1$ ist

$$\begin{aligned} & V_{t_i}\left(\boldsymbol{H}_{t_i}\right) - V_{t_{i-1}}\left(\boldsymbol{H}_{t_{i-1}}\right) \\ = \; & \underbrace{V_{t_i}\left(\boldsymbol{H}_{t_i} - \boldsymbol{H}_{t_{i-1}}\right)}_{=\,0\ \mathbb{P}\text{-f.s. bei Selbstfinanzierung}} + V_{t_i}\left(\boldsymbol{H}_{t_{i-1}}\right) - V_{t_{i-1}}\left(\boldsymbol{H}_{t_{i-1}}\right) \\ = \; & H^0_{t_{i-1}} \cdot \left(S^0_{t_i} - S^0_{t_{i-1}}\right) + H^1_{t_{i-1}} \cdot \left(S^1_{t_i} - S^1_{t_{i-1}}\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}. \end{aligned}$$

Durch Bildung einer Teleskopsumme erhält man für $i = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned} & V_{t_i}\left(\boldsymbol{H}_{t_i}\right) - V_{t_0}\left(\boldsymbol{H}_{t_0}\right) \\ = \; & \sum_{j=1}^{i} H^0_{t_{j-1}} \cdot \left(S^0_{t_j} - S^0_{t_{j-1}}\right) + \sum_{j=1}^{i} H^1_{t_{j-1}} \cdot \left(S^1_{t_j} - S^1_{t_{j-1}}\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

und somit die Charakterisierung der Selbstfinanzierung bei einfachen Handelsstrategien durch

$$V_{t_i}\left(\boldsymbol{H}_{t_i}\right) = V_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) + \sum_{j=1}^{i} H^0_{t_{j-1}} \cdot \left(S^0_{t_j} - S^0_{t_{j-1}}\right) + \sum_{j=1}^{i} H^1_{t_{j-1}} \cdot \left(S^1_{t_j} - S^1_{t_{j-1}}\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{3.11}$$

- Lässt man die Handelszeitpunkte immer dichter beieinander liegen, erhält man aus (3.11) für $t \in [0, T]$ die Integralgleichung

$$V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) = V_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) + \int_0^t H^0_s \,\mathrm{d}S^0_s + \int_0^t H^1_s \,\mathrm{d}S^1_s \tag{3.12}$$

als Charakterisierung der Selbstfinanzierung bei allgemeinen Handelsstrategien, wobei sich die Frage nach der Existenz und überhaupt der Definition der auftretenden Integrale stellt.

- Die Integralgleichung (3.12) wird später auch formal als **stochastische Differentialgleichung**

$$\mathrm{d}V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) = H^0_t \,\mathrm{d}S^0_t + H^1_t \,\mathrm{d}S^1_t, \qquad t \in [0, T],$$

geschrieben werden, wobei zu beachten ist, dass es – im Gegensatz zur klassischen Analysis – in der stochastischen Analysis keinen eigenständigen Differentialkalkül gibt, sondern stochastische Differentialgleichungen lediglich abkürzende *Schreibweisen* für stochastische Integralgleichungen darstellen.

- Zunächst wird das erste Integral $\int_0^t H^0_s \,\mathrm{d}S^0_s$ aus (3.12) pfadweise, d.h.

$$\int_0^t H^0_s(\omega) \,\mathrm{d}S^0_s$$

für ein festes $\omega \in \Omega$, betrachtet. Dieses kann als Riemann-Stieltjes-Integral $\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}g(s)$ (siehe (D.15)) aufgefasst werden. *Hinreichend* für die Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals sind dabei folgende Eigenschaften von g bzw. f:

- g ist auf $[0,t]$ von beschränkter Totalvariation (zu Total- bzw. p-Variation siehe Anhang C.6). Dies umfasst unter anderem alle Funktionen, die auf $[0,t]$ Treppenfunktionen, monoton oder Lipschitz-stetig sind. Zur Klasse der auf $[0,t]$ Lipschitz-stetigen Funktionen gehören insbesondere diejenigen auf $(0,t)$ differenzierbaren Funktionen, deren erste Ableitung beschränkt ist. In dem speziellen Fall $g(s) = S_s^0 = \mathrm{e}^{rs}$ ist g monoton und somit von beschränkter Totalvariation.
- f ist auf $[0,t]$ stückweise stetig und besitzt andere Sprungstellen als g.

- Weitere hinreichende Bedingung für die Existenz des Riemann-Stieltjes-Integrals: f und g sind stückweise stetig mit unterschiedlichen Sprungstellen sowie f bzw. g sind von beschränkter Variation der Ordnung p bzw. q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$.

- Regel der partiellen Integration für Riemann-Stieltjes-Integrale:

$$\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}g(s) \;=\; f(t)\cdot g(t) - f(0)\cdot g(0) - \int\limits_0^t g(s)\,\mathrm{d}f(s) \tag{3.13}$$

Insbesondere impliziert die Existenz des Integrals auf der linken Seite die Existenz des Integrals auf der rechten Seite.

- Sind die Funktion f sowie die Ableitung g' von g auf $[0,t]$ Riemann-integrierbar, dann existiert das Riemann-Stieltjes-Integral $\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}g(s)$ und es gilt

$$\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}g(s) \;=\; \int\limits_0^t f(s)\cdot g'(s)\,\mathrm{d}s.$$

In dem speziellen Fall $g(s) = S_s^0 = \mathrm{e}^{rs}$ ist demnach

$$\int\limits_0^T \big|f(s)\big|\,\mathrm{d}s \;<\; \infty$$

eine hinreichende Bedingung für die Existenz des betreffenden Riemann-Stieltjes-Integrals für alle $t \in [0,T]$.

- Notwendig für die Existenz des Integrals $\int\limits_0^T |f(s)|\,\mathrm{d}s$ ist die Messbarkeit von f bezüglich $\mathcal{B}([0,T])$. Für den Prozess $(H_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ (der ersten Komponente der Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$) werden daher üblicherweise vorausgesetzt:

1. $(H_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ ist **progressiv messbar**, d.h. $H^0 : (\tilde{t}, \omega) \in [0,t] \times \Omega \mapsto H^0_{\tilde{t}}(\omega)$ ist messbar bezüglich $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t^*$ für alle $t \in \mathbb{T}$ („doppelte Messbarkeit" bzw. „doppelte Adaptiertheit").
2. $\int\limits_0^T \left|H_s^0\right| \, \mathrm{d}s \ < \ \infty \quad \mathbb{P}$-f.s.

Diese Voraussetzungen implizieren die fast sichere Existenz des stochastischen Riemann-Stieltjes-Integrals $\int\limits_0^t H_s^0 \, \mathrm{d}S_s^0$ für $t \in [0,T]$.

- Zunächst erscheint es naheliegend, auch das zweite Integral $\int\limits_0^t H_s^1 \, \mathrm{d}S_s^1$ aus (3.12) pfadweise zu betrachten, d.h.

$$\int\limits_0^t H_s^1(\omega) \, \mathrm{d}S_s^1(\omega)$$

für ein festes $\omega \in \Omega$, wobei hier der Integrator ebenfalls stochastisch ist. Unabhängig davon, dass eine Existenz dieses Integrals als pfadweises Riemann-Stieltjes-Integral aufgrund der unbeschränkten Totalvariation des Wienerprozesses (und somit auch von S^1) nicht zu erwarten ist (siehe dazu auch Anhang C.6), zeigt sich darüber hinaus, dass ein solcher Integralbegriff auch aus wirtschaftlicher Sicht ungeeignet ist, da bereits vergleichsweise einfache „selbstfinanzierende" Handelsstrategien[5] Arbitragemöglichkeiten bieten[6] (siehe Anhang C.7).

- Die Einführung eines „neuen", geeigneten Integralbegriffs (den des **Itō-Integrals**) erfolgt zunächst für Integrale mit dem Wienerprozess als Integrator, d.h. Integrale der Gestalt

$$\int\limits_0^t X_s \, \mathrm{d}W_s \qquad (t \in [0,T])$$

für geeignete stochastische Prozesse $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ (siehe Anhang C.8). Insbesondere für $X = W$ ergibt sich für das Itō-Integral

$$\int\limits_0^t W_s \, \mathrm{d}W_s \ = \ \frac{1}{2} \cdot W_t^2 - \frac{1}{2} \cdot t,$$

wobei der Ausdruck „$-\frac{1}{2} \cdot t$" einen „Korrekturterm" gegenüber dem klassischen Riemann-Stieltjes-Integral darstellt.

[5] Handelsstrategien, die (3.12) erfüllen

[6] Der Begriff der Arbitrage ist zwar noch nicht definiert, in Analogie zum (zeitdiskreten) MPM wird aber bereits hier eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$ mit $V_0(\boldsymbol{H}_0) \leq 0$, $V_T(\boldsymbol{H}_T) \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und $\mathbb{P}\Big(V_T(\boldsymbol{H}_T) > 0\Big) > 0$ als Arbitrage angesehen.

- Zur Definition des Integrals $\int_0^t H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1$ ist eine geeignete Darstellung des Differentials $\mathrm{d}S_s^1$ erforderlich. Diese erhält man mit Hilfe der **Itō-Doeblin-Formel** für Itō-Integrale bezüglich W (siehe Lemma C.15):

Lemma 3.21 *Der Prozess* $S^1 = \left(S_t^1\right)_{t\in[0,T]}$ *des Black-Scholes-Modells besitzt die Darstellung*

$$S_t^1 \;=\; s_0 + \int_0^t \mu \cdot S_s^1 \,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma \cdot S_s^1 \,\mathrm{d}W_s, \quad t \in [0,T]. \tag{3.14}$$

Beweis: Die angegebene Darstellung ergibt sich als direkte Anwendung der Itō-Doeblin-Formel (C.6)

$$g(t,W_t) \;=\; g(0,0) + \int_0^t g_t(s,W_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g_x(s,W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\cdot\int_0^t g_{xx}(s,W_s)\,\mathrm{d}s, \quad t\in[0,T],$$

für

$$g(t,W_t) \;=\; S_t^1 \qquad \text{mit} \qquad g(t,x) \;:=\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot t}\cdot \mathrm{e}^{\sigma\cdot x}, \quad (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}.$$

Es ist

$$g_t(t,x) \;=\; \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot g(t,x), \quad g_x(t,x) \;=\; \sigma\cdot g(t,x) \quad \text{und} \quad g_{xx}(t,x) \;=\; \sigma^2\cdot g(t,x)$$

und somit

$$\begin{aligned} S_t^1 \;&=\; g(t,W_t) \\ &=\; g(0,0) + \int_0^t \left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot g(s,W_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\cdot g(s,W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\cdot\int_0^t \sigma^2\cdot g(s,W_s)\,\mathrm{d}s \\ &=\; s_0 + \int_0^t \mu\cdot S_s^1\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\cdot S_s^1\,\mathrm{d}W_s, \quad t\in[0,T]. \end{aligned}$$

■

Bemerkungen:

1. Die differentielle Schreibweise von (3.14) ist

$$\mathrm{d}S_t^1 \;=\; \mu S_t^1 \mathrm{d}t + \sigma S_t^1 \mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T] \tag{3.15}$$

also formal

$$\frac{\mathrm{d}S_t^1}{S_t^1} \;=\; \mu\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t, \quad t\in[0,T] \tag{3.16}$$

(siehe (3.1)). $S^1 = \left(S_t^1\right)_{t\in[0,T]}$ wird daher auch als Lösung der stochastischen Differentialgleichung (3.16) bezeichnet, wobei diese lediglich eine formale Schreibweise für die Integralgleichung (3.14) darstellt.

2. Formal ergibt sich nun für das Integral $\int_0^t H_s^1 \, \mathrm{d}S_s^1$

$$\begin{aligned}
\int_0^t H_s^1 \, \mathrm{d}S_s^1 &:= \int_0^t H_s^1 \, \mathrm{d}\left(\mu S_s^1 \mathrm{d}s + \sigma S_s^1 \mathrm{d}W_s\right) \\
&:= \mu \cdot \int_0^t H_s^1 \cdot S_s^1 \, \mathrm{d}s + \sigma \cdot \int_0^t H_s^1 \cdot S_s^1 \, \mathrm{d}W_s. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Da der Prozess $\left(S_s^1\right)_{s\in[0,t]}$ aufgrund der fast sicheren Stetigkeit des enthaltenen Wienerprozesses ebenfalls fast sicher (pfad-)stetig ist, ist $\left(S_s^1\right)_{s\in[0,t]}$ somit fast sicher beschränkt. Demnach folgt aus der Existenz der Integrale $\int_0^t H_s^1 \, \mathrm{d}s$ und $\int_0^t H_s^1 \, \mathrm{d}W_s$ die Existenz der Integrale $\int_0^t H_s^1 \cdot S_s^1 \, \mathrm{d}s$ und $\int_0^t H_s^1 \cdot S_s^1 \, \mathrm{d}W_s$.

Voraussetzung für die (fast sichere) Existenz beider Integrale aus (3.17) für $t \in \mathbb{T}$ (und somit die fast sichere Existenz des Itō-Integrals $\int_0^t H_s^1 \, \mathrm{d}S_s^1$ für $t \in \mathbb{T}$) ist folglich (siehe Anhang C.8)

(a) $(H_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ ist progressiv messbar.

(b) $\int_0^T \left(H_s^1\right)^2 \mathrm{d}s \; < \; \infty \quad \mathbb{P}$-f.s.

3. Der Prozess $\left(S_t^1\right)_{t\in\mathbb{T}}$ gehört zur sehr allgemeinen Klasse der sogenannten **Itō-Prozesse**. Ein fast sicher (pfad-)stetiger Prozess $X = \left(X_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt ein Itō-Prozess, falls es progressiv messbare Prozesse $Y^0 = \left(Y_t^0\right)_{t\in\mathbb{T}}$ und $Y^1 = \left(Y_t^1\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\int_0^T \left|Y_t^0\right| \mathrm{d}t < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^T \left(Y_t^1\right)^2 \mathrm{d}t < \infty \qquad \text{fast sicher}$$

gibt, so dass X die Darstellung

$$\mathrm{d}X_t \;=\; Y_t^0 \mathrm{d}t + Y_t^1 \mathrm{d}W_t, \quad \text{d.h.} \quad X_t = X_0 + \int_0^t Y_s^0 \, \mathrm{d}s + \int_0^t Y_s^1 \, \mathrm{d}W_s,$$

für $t \in \mathbb{T}$ besitzt.

- Um für eine allgemeine Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ im Black-Scholes-Modell überhaupt die Selbstfinanzierung gemäß (3.12) charakterisieren zu können, ist zunächst die Existenz der auftretenden Integrale zu sichern, was zum Begriff der **zulässigen** Handelsstrategie führt:

Definition 3.22 *Eine Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *mit* $\boldsymbol{H}_t = \begin{pmatrix} H_t^0 \\ H_t^1 \end{pmatrix}$ *im Black-Scholes-Modell heißt* ***zulässig****, wenn folgende Voraussetzungen erfüllt sind:*

1. $\left(H_t^0\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *und* $\left(H_t^1\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *sind progressiv messbar.*

2. $\int\limits_0^T \left|H_t^0\right| \,\mathrm{d}t \;<\; \infty \quad \mathbb{P}$*-f.s.*

3. $\int\limits_0^T \left(H_t^1\right)^2 \,\mathrm{d}t \;<\; \infty \quad \mathbb{P}$*-f.s.*

Definition 3.23 *Eine zulässige Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *mit* $\boldsymbol{H}_t = \begin{pmatrix} H_t^0 \\ H_t^1 \end{pmatrix}$ *im Black-Scholes-Modell heißt* ***selbstfinanzierend****, wenn für deren Wertprozess* $V(\overline{\boldsymbol{H}}) = \left(V_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *die folgende Integralgleichung für* $t \in [0,T]$ *gilt:*

$$V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \;=\; V_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) + \int\limits_0^t H_s^0 \,\mathrm{d}S_s^0 + \int\limits_0^t H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1 \tag{3.18}$$

Bemerkung: Die differentielle Schreibweise von (3.18) ist

$$\mathrm{d}V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \;=\; H_t^0 \mathrm{d}S_t^0 + H_t^1 \mathrm{d}S_t^1, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Definition 3.24 *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *im Black-Scholes-Modell heißt eine* ***Arbitrage****, wenn für deren Wertprozess* $V(\overline{\boldsymbol{H}}) = \left(V_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *das Folgende gilt:*

$$V_0(\boldsymbol{H}_0) \le 0, \quad V_T(\boldsymbol{H}_T) \ge 0 \;\mathbb{P}\text{-}\textit{f.s.} \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}\Big(V_T(\boldsymbol{H}_T) > 0\Big) > 0$$

Bemerkung: Aus folgendem Lemma ergibt sich, dass das Black-Scholes-Modell bezüglich selbstfinanzierender Handelsstrategien *nicht* arbitragefrei ist:

Lemma 3.25 *Im Black-Scholes-Modell gibt es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, die eine Arbitrage ist.*

Beweis: Siehe Anhang C.9
Bemerkung: Damit es im Black-Scholes-Modell keine Arbitragen gibt, ist eine Verschärfung der Eigenschaft der Zulässigkeit erforderlich:

Definition 3.26 *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *im Black-Scholes-Modell heißt* ***regulär****, wenn es eine* $\mathbb{Q}$*-integrierbare Zufallsgröße* Y *gibt, so dass für den Wertprozess* $V(\overline{\boldsymbol{H}}) = \Big(V_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *das Folgende gilt:*

$$V_t(\boldsymbol{H}_t) \ \geq \ Y \qquad \text{für alle } \ t \in [0,T].$$

Bemerkungen:

1. Die obige Definition wäre auch lediglich für *zulässige* Handelsstrategien möglich.
2. Die Beschränkung des Wertprozesses nach unten bedeutet, dass ein potentiell unendlicher Verlust ausgeschlossen sein soll. Tatsächlich ist es so, dass Arbitragen häufig an potentiell unerschöpfliche finanzielle Mittel gekoppelt sind (beispielsweise bei der „Dopplungsstrategie“: Bei „Kopf oder Zahl“ wird nach jedem verlorenen Spiel der Einsatz verdoppelt).
3. Die in Anhang C.9 behandelte Arbitrage ist nicht regulär, da der dort betrachtete Wertprozess zwar nach oben, aber nicht nach unten beschränkt ist. Für die (zufällige) untere Schranke Y von regulären Handelsstrategien muss außerdem offenbar $Y \leq V_0(\boldsymbol{H}_0)$ gelten.

Lemma 3.27 *Es sei* $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *eine reguläre Handelsstrategie im Black-Scholes-Modell und* $V(\overline{\boldsymbol{H}}) = \Big(V_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *der dazugehörige Wertprozess. Dann ist der diskontierte Wertprozess* $\underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}}) = \Big(\mathrm{e}^{-rt}\cdot V_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *ein* $\mathbb{Q}$*-***Supermartingal** *bezüglich der erweiterten natürlichen Filtration* $\big(\mathcal{F}_t^*\big)_{t\in\mathbb{T}}$ *des Wienerprozesses im Black-Scholes-Modell (*$\mathbb{Q}$ *ist dabei das äquivalente Martingalmaß im Black-Scholes-Modell), d.h., es gilt*

1. $\underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}})$ *ist adaptiert an* $\big(\mathcal{F}_t^*\big)_{t\in\mathbb{T}}$.
2. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\Big|\mathrm{e}^{-rt}\cdot V_t(\boldsymbol{H}_t)\Big|\Big) < \infty$ *für alle* $t\in\mathbb{T}$.
3. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{e}^{-rt}\cdot V_t(\boldsymbol{H}_t)\,\Big|\,\mathcal{F}_s^*\Big) \ \leq \ \mathrm{e}^{-rs}\cdot V_s(\boldsymbol{H}_s) \quad \mathbb{Q}$*-f.s. für alle* $s<t, \ s,t\in\mathbb{T}$.

Ohne Beweis.

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass der diskontierte Wertprozess einer selbstfinanzierenden (ggf. nicht regulären) Handelsstrategie eine „schwächere“ Art von Martingal, nämlich ein sogenanntes **lokales Martingal**, ist (siehe Bemerkung zu Definition 4.7).

Satz 3.28 *Das Black-Scholes-Modell ist arbitragefrei bezüglich regulärer (selbstfinanzierender) Handelsstrategien.*

Beweis: Indirekt: Angenommen, die reguläre Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ ist eine Arbitrage. Wegen $V_0(\boldsymbol{H}_0)\leq 0$ und $V_T(\boldsymbol{H}_T)\geq 0$ $\mathbb{Q}$-f.s. und $\mathbb{Q}\Big(V_T(\boldsymbol{H}_T)>0\Big)>0$ gilt dann

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(V_0(\boldsymbol{H}_0)\Big)\leq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(V_T(\boldsymbol{H}_T)\Big)>0$$

und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(V_0(\boldsymbol{H}_0)\Big) \;<\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{e}^{-rT}\cdot V_T(\boldsymbol{H}_T)\Big).$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Supermartingal-Eigenschaft von $\underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}})$, aus der sich

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{e}^{-rT}\cdot V_T(\boldsymbol{H}_T)\Big|\mathcal{F}_0^*\Big) \;\le\; V_0(\boldsymbol{H}_0) \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}$$

und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{e}^{-rT}\cdot V_T(\boldsymbol{H}_T)\Big) \;\le\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(V_0(\boldsymbol{H}_0)\Big)$$

ergibt. ∎

Definition 3.29 *Ein Derivat C (d.h. eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsgröße) heißt **replizierbar**, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ mit*

$$V_T(\boldsymbol{H}_T) \;=\; C \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

*gibt. Eine solche Handelsstrategie heißt **replizierende Handelsstrategie** oder **Hedge**.*

Bemerkung: In Definition 3.10 wurde der Preisprozess $(V_t^C)_{t\in\mathbb{T}}$ eines Europäischen Auszahlungsprofils C mittels

$$V_t^C \;:=\; \mathrm{e}^{-r(T-t)}\cdot\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(C\mid\mathcal{F}_t\Big), \quad t\in\mathbb{T},$$

definiert und festgestellt, dass der dazugehörige diskontierte Preisprozess ein *Martingal* ist. Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen dieser Preisprozess (fast sicher) mit dem diskontierten Preisprozess einer replizierenden Handelsstrategie übereinstimmt, d.h., unter welchen Voraussetzungen der diskontierte Preisprozess einer replizierenden Handelsstrategie ein Martingal ist und somit die Preisfindung mit Hilfe des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ erfolgen kann.

Satz 3.30 *Ist ein Derivat C in einem Black-Scholes-Modell quadratisch $\mathbb{Q}$-integrierbar, d.h. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}C^2 < \infty$, dann existiert eine replizierende Handelsstrategie, deren diskontierter Wertprozess ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist.*

Ohne Beweis.

Bemerkungen:

1. Das Black-Scholes-Modell ist somit in Bezug auf quadratisch integrierbare Derivate vollständig.

2. Dieser Satz liefert sofort die Eindeutigkeit des auf $\mathcal{F}_T^*$ eingeschränkten Martingalmaßes: Analog zur Vorgehensweise im (zeitdiskreten) Einperiodenmodell (Lemma 2.35) werden die quadratisch integrierbaren Derivate $C = \mathbb{1}_F$ mit $F\in\mathcal{F}_T^*$ betrachtet, für die $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C) = \mathbb{Q}(F)$ gilt.

Kapitel 4

Allgemeine zeitstetige Finanzmarktmodelle

Literatur:

- Nicholas H. Bingham und Rüdiger Kiesel, Risk-Neutral-Valuation [3]
- Alison Etheridge, A Course in Financial Calculus [4]
- Albrecht Irle, Finanzmathematik [6]
- Marek Musiela und Marek Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modelling [8]
- Albert N. Shiryaev, Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory [12]

4.1 Überblick über bisher behandelte Finanzmarktmodelle und Aussagen zur Arbitragefreiheit und Vollständigkeit

4.1.1 Allgemeines (zeitdiskretes) Mehrperioden-Marktmodell

- Ein Mehrperioden-Marktmodell (MPM) ist ein Tupel $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n}, \mathbb{P}\Big), S^0, \dots, S^N\Big)$ mit
  - **Zeithorizont** $n \in \mathbb{N}$
  - **Menge von Handelszeitpunkten** $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, n\}$
  - **filtriertem Wahrscheinlichkeitsraum** $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n}, \mathbb{P}\Big)$ mit $\mathbb{P}$ trivial auf $\mathcal{F}_0$
  - $N+1$ **nichtnegativen, an** $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\dots,n}$ **adaptierten Preisprozessen**

$$S^0, \dots, S^N : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}_{0+} \qquad \text{mit} \qquad S^0(.,.) \ > \ 0.$$

- $\boldsymbol{S}_t = \begin{pmatrix} S_t^0 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_t^0 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{S}_t^N \end{pmatrix}$ mit $\underset{\sim}{S}^i = \dfrac{S^i}{S^0} \quad (i = 0, \ldots, N)$

- Das Finanzinstrument 0 besitzt die Funktion eines **Numéraires** bzw. der dazugehörige (streng positive) Preisprozess S^0 die Funktion eines **Diskontierungsprozesses**.

- Eine $\mathcal{F}_t$-messbare $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige Zufallsgröße $\boldsymbol{H}$ heißt **Portfolio z. Ztpkt.** $t \in \{0, \ldots, n\}$.

- Ein an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ (man beachte $n-1$ anstatt n!) adaptierter $\mathbb{R}^{N+1}$-wertiger stochastischer Prozess $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ (auch hier $n-1$!) heißt **Handelsstrategie**.

- Für ein Portfolio $\boldsymbol{H} = (H^0, H^1, \ldots, H^N)^T$ z. Ztpkt. $t \in \{0, \ldots, n\}$ heißt

$$V_t(\boldsymbol{H}) \;=\; \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{S}_t \;=\; \sum_{i=0}^{N} H^i \cdot S_t^i$$

der **Wert des Portfolios z. Ztpkt.** t. Der dazugehörige diskontierte Wert ist

$$\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}) \;=\; \frac{V_t(\boldsymbol{H})}{S_t^0} \;=\; \sum_{i=0}^{N} H^i \cdot \underset{\sim}{S}_t^i.$$

- Eine Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ heißt **selbstfinanzierend**, falls

$$V_t\Big(\boldsymbol{H}_{t-1}\Big) \;=\; V_t\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{für } t = 1, \ldots, n-1$$

gilt. Äquivalente Darstellung[1]:

$$V_t\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \;=\; V_0\Big(\boldsymbol{H}_0\Big) + \sum_{s=0}^{t-1} \boldsymbol{H}_s \cdot \left(\boldsymbol{S}_{s+1} - \boldsymbol{S}_s\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{4.1}$$

für $t = 1, \ldots, n-1$.

Formale Darstellung als diskretes Integral: $V_t\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \;=\; V_0\Big(\boldsymbol{H}_0\Big) + \int\limits_0^{t-1} \boldsymbol{H}_s \, \mathrm{d}\boldsymbol{S}_s$

- Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ heißt **Arbitrage** im MPM, falls

$$V_0(\boldsymbol{H}_0) \leq 0, \; V_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(V_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) > 0\Big) > 0$$

gilt.

[1] $V_s\left(\boldsymbol{H}_s\right) - V_{s-1}\left(\boldsymbol{H}_{s-1}\right) = \underbrace{V_s\left(\boldsymbol{H}_s - \boldsymbol{H}_{s-1}\right)}_{0} + V_s\left(\boldsymbol{H}_{s-1}\right) - V_{s-1}\left(\boldsymbol{H}_{s-1}\right)$ und Summation für $s = 1, \ldots, t$

- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ heißt **äquivalentes Martingalmaß**, falls es folgende Eigenschaften besitzt:

  1. $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$, d.h. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ besitzen dieselben Nullmengen.
  2. Der $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige diskontierte Preisvektorprozess $\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right)_{t=0,\ldots,n}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal, d.h.

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{S}_t^i \mid \mathcal{F}_s\right) = \underset{\sim}{S}_s^i \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } s < t, \;\; s,t \in \{0,\ldots,n\},\, i \in \{0,\ldots,N\}.$$

- **1. Fundamentalsatz:** Ein Mehrperioden-Marktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert.

- Eine Zufallsgröße C auf $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right)$ heißt **Europäisches Auszahlungsprofil**. Ein Europäisches Auszahlungsprofil C heißt **Derivat**, wenn es messbar ist bezüglich der von den Preisprozessen $S^0, \ldots, S^N$ erzeugten σ-Algebra. Die dazugehörige Zufallsgröße

  $$\underset{\sim}{C} \;=\; \frac{C}{S_n^0}$$

  heißt **diskontiertes Europäisches Auszahlungsprofil**.

- Ein Europäisches Auszahlungsprofil C heißt **replizierbar**, falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t=0,\ldots,n-1}$ existiert, so dass

  $$V_n(\boldsymbol{H}_{n-1}) = C \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

  gilt. Eine solche Handelsstrategie heißt **replizierende Handelsstrategie** oder **Hedge**.

- Ein MPM heißt **vollständig**, falls jedes Europäische Auszahlungsprofil replizierbar ist.

- **2. Fundamentalsatz:** Ein arbitragefreies MPM ist genau dann vollständig, wenn das äqivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt ist.

4.1.2 Mehrperioden-Binomialmodell

- Ein **Mehrperioden-Binomialmodell** bzw. **CRR-** (Cox-Ross-Rubinstein-) **Modell** ist ein MPM mit Zeithorizont $n \in \mathbb{N}$ und zwei Wertprozessen S^0 („festverzinsliche Anleihe“) und S^1 („Aktie“), das durch die Parameter

  - **Abwärtsfaktor** („down“) $d > 0$
  - **Aufwärtsfaktor** („up“) $u > d$
  - **(diskrete) Zinsrate** $r > -1$
  - **Startwert** s_0

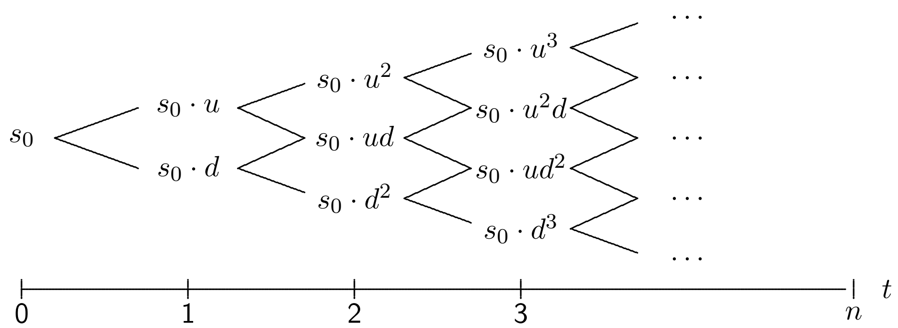
  folgendermaßen bestimmt ist:

– $\Omega = \{u, d\}^n$

– $S^0_t \equiv (1+r)^t$ für alle $t = 0, \ldots, n$

– $S^1_0 \equiv s_0, \qquad S^1_t(\omega_1, \ldots, \omega_t, \ldots \omega_n) \;=\; \begin{cases} u \cdot S^1_{t-1}(\omega_1, \ldots, \omega_n) & \text{für } \omega_t = u \\ d \cdot S^1_{t-1}(\omega_1, \ldots, \omega_n) & \text{für } \omega_t = d \end{cases}$

$$= \;\omega_t \cdot S^1_{t-1}(\omega_1, \ldots, \omega_n) \quad \text{für alle } t = 1, \ldots, n$$



- **Bezeichnung:** $\Big(n, d, u, r, s_0\Big)$

- **Satz:** Ein CRR-Modell $\Big(n, d, u, r, s_0\Big)$ ist genau dann arbitragefrei, wenn $d \;<\; 1+r \;<\; u$ gilt. In diesem Fall ist das CRR-Modell vollständig, das eindeutig bestimmte äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist bestimmt durch den Parameter $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ und es gilt $\mathbb{Q}\Bigg(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Bigg) = q$ für alle $t = 0, \ldots, n-1$.

- Gegeben sei eine Folge von CRR-Modellen

  $$\Big(n, d^{(n)}, u^{(n)}, r^{(n)}, s_0\Big)_{n=1,2,\ldots},$$

  die durch die Parameter $T > 0$ (**fester Endzeitpunkt**), $\hat{r} > -1$ (**Zinssatz pro Zeiteinheit**) und $\sigma > \sqrt{T} \cdot \Big|\ln(1+\hat{r})\Big|$ (**Volatilität**) folgendermaßen bestimmt ist:

  – $r^{(n)} = (1+\hat{r})^{T/n} - 1$

  – $u^{(n)} = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/n}}$ und

  – $d^{(n)} = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/n}}$

  Die dazugehörigen Preisprozesse der Aktie werden mit $S^{(n)1}$ und die dazugehörigen äquivalenten Martingalmaße mit $\mathbb{Q}^{(n)}$ bezeichnet.

  Dann konvergieren die Verteilungen von $S^{(n)1}$ gegen die Verteilung von

  $$S^1_T \;:=\; s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_T + T \cdot \left(\ln\left(1+\hat{r}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right)},$$

  wobei W_T eine normalverteilte Zufallsgröße mit den Parametern 0 und $\sqrt{T}$ ist.

- Die Zufallsgröße S_T^1 ist **logarithmisch normalverteilt** mit den Parametern $\ln s_0 + T \cdot \left(\ln\left(1+\hat{r}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ und $\sigma\sqrt{T}$, d.h.,

$$\ln S_T^1 \;=\; \ln s_0 + \sigma W_T + T \cdot \left(\ln\left(1+\hat{r}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

  ist normalverteilt mit ebendiesen Parametern.

- Wird anstatt eines diskreten Zinssatzes $\hat{r}$ ein stetiger Zinssatz $\tilde{r}$ verwendet (d.h. $\mathrm{e}^{\tilde{r}} = 1+\hat{r}$) ergibt sich als Grenzverteilung die Verteilung von

$$s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_T + T \cdot \left(\tilde{r} - \frac{\sigma^2}{2}\right)}.$$

4.1.3 Black-Scholes-Modell

- Das Black-Scholes-Modell ist die zeitstetige Verallgemeinerung des CRR-Modells.
- Ein **Black-Scholes-Modell** ist ein Tupel $\left(\mathbb{T}, \left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right), S^0, S^1\right)$, das durch die Parameter
  - Zeithorizont $T > 0$
  - stetige Zinsrate $r > 0$
  - Volatilität $\sigma > 0$
  - Drift $\mu \in \mathbb{R}$
  - Startwert $s_0 > 0$

  bestimmt ist mit
  - Handelszeitraum $\mathbb{T} = [0, T]$
  - Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$
  - Preisprozess einer Anleihe $S^0 = \left(S_t^0\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $S_t^0 \equiv \mathrm{e}^{rt}$, $t \in \mathbb{T}$
  - Preisprozess einer Aktie $S^1 = \left(S_t^1\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $S_t^1 = s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}\cdot t}$,
- $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$: Wienerprozess über dem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$
- Die Zufallsgrößen S_t^1, $t \in \mathbb{T}$, sind logarithmisch normalverteilt mit den Parametern $\ln s_0 + \mu \cdot t - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t$ und $\sigma^2 t$.
- Sei $\mathbb{T} = [0, T]$ bzw. $\mathbb{T} = [0, \infty)$. Ein stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ heißt ein **Wienerprozess** (im Zeitintervall $\mathbb{T}$), falls er folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $W_0(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$

(b) Für eine beliebige Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ $(n \in \mathbb{N}, t_n \in \mathbb{T})$ sind die Zufallsgrößen

$$W_{t_1} - W_{t_0},\ W_{t_2} - W_{t_1},\ \ldots,\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

unabhängig.

(c) Für beliebige $s, t \in \mathbb{T}$ mit $s < t$ ist

$$W_t - W_s \ \sim \ \mathrm{N}(0, t-s),$$

d.h., $W_t - W_s$ ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $t - s$.

(d) $t \mapsto W_t(\omega)$ ist stetig für alle $\omega \in \Omega$, d.h., W besitzt stetige Pfade.

- Alternative Bezeichung: **Brown'sche Bewegung**

- Ein Wienerprozess ist ein Prozess mit unabhängigen, stationären und normalverteilten Zuwächse. Er gehört zur Klasse der **Lévy-Prozesse**, der **Gaußprozesse** sowie der **Markovprozesse**.

- Die Pfade eines Wienerprozesses sind fast sicher nirgends differenzierbar.

- **Martingaleigenschaft:**

  (a) $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ist ein Martingal bezüglich seiner natürlichen Filtration $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$, d.h.

    1. W ist adaptiert an $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$, d.h. W_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar für alle $t \in \mathbb{T}$.
    2. $\mathrm{E}(|W_t|) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{T}$.
    3. $\mathrm{E}(W_t \mid \mathcal{F}_s) = W_s$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $s < t, \ s, t \in \mathbb{T}$.

  (b) $(\mathrm{e}^{aW_t - \frac{1}{2}a^2 t})_{t\in\mathbb{T}}$ ist ein Martingal (**Exponentialmartingal**) bezüglich $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

- Der Preisprozess der Aktie S^1 ist für $\mu = 0$ ein $\mathbb{P}$-Martingal, der diskontierte Preisprozess der Aktie $\underset{\sim}{S} = \Big(\underset{\sim}{S}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\underset{\sim}{S}_t \ = \ \frac{S_t^1}{S_t^0} \ = \ s_0 \cdot \mathrm{e}^{(\mu - r)\cdot t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$$

  ist für $\mu = r$ ein $\mathbb{P}$-Martingal.

- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}\Big)$ heißt **äquivalentes Martingalmaß** im Black-Scholes-Modell, falls es folgende Eigenschaften besitzt:

  1. $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$.

2. Der diskontierte Preisprozess der Aktie $\underset{\sim}{S}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal bezüglich der natürlichen Filtration des Wienerprozesses $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$, d.h.

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{S}_t \mid \mathcal{F}_s\right) = \underset{\sim}{S}_s \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } s < t, \ \ s, t \in \mathbb{T}.$$

- Mit

$$\tilde{W}_t \ = \ W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} \cdot t$$

ist

$$\underset{\sim}{S}_t \ = \ s_0 \cdot \mathrm{e}^{\sigma \tilde{W}_t - \frac{\sigma^2}{2} t}.$$

Ist nun $\tilde{W} = \left(\tilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Wienerprozess bezüglich eines zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$, so wäre $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß.

- Ein solches äquivalentes Martingalmaß erhält man durch Anwendung eines Spezialfalls des **Satzes von Girsanov**.

- „Rechenregel“: Beim Übergang vom Wienerprozess W bez. $\mathbb{P}$ zum Wienerprozess $\tilde{W}$ bez. $\mathbb{Q}$ wird die Drift μ des Preiprozesses der Aktie S^1 durch die Zinsrate r „ausgetauscht“.

- Die im Folgenden verwendete sogenannte **Standardfiltration** $\left(\mathcal{F}_t^*\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ist die um die Nullmengen von $\mathcal{F}$ erweiterte natürliche Filtration des S^1 erzeugenden Wienerprozesses W, d.h.,

$$\mathcal{F}_t^* = \sigma\left(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}\right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{F}_t = \sigma\left(W_s, s \le t\right) \quad \text{und} \quad \mathcal{N} = \left\{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0\right\}.$$

Dadurch wird sichergestellt, dass alle Ersteintrittszeiten *Stoppzeiten* bezüglich dieser Filtration sind (wichtig bei der Betrachtung von Barrier-Optionen) – Ersteintrittszeiten in offene Mengen sind im Allgemeinen nur bezüglich *rechtsseitig stetiger* Filtrationen Stoppzeiten. Die Standardfiltration ist rechtsseitig stetig.

- Analog zum zeitdiskreten MPM ergibt sich nun:
  - Eine $\mathcal{F}_t^*$-messbare $\mathbb{R}^2$-wertige Zufallsgröße $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H^0 \\ H^1 \end{pmatrix}$ heißt ein **Portfolio** z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$ sowie $V_t(\boldsymbol{H}) = H^0 \cdot S_t^0 + H^1 \cdot S_t^1$ der **Wert** des Portfolios $\boldsymbol{H}$ z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$.
  - Ein an $\left(\mathcal{F}_t^*\right)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierter $\mathbb{R}^2$-wertiger stochastischer Prozess $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt eine **Handelsstrategie** sowie $V(\overline{\boldsymbol{H}}) = \left(V_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$ der **Wertprozess** der Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$.

- Die **Selbstfinanzierung** ist in Verallgemeinerung des diskreten Falls (4.1) charakterisiert durch die Integralgleichung

$$V_t(\boldsymbol{H}_t) \;=\; V_0(\boldsymbol{H}_0) + \int_0^t H_s^0 \,\mathrm{d}S_s^0 + \int_0^t H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1, \tag{4.2}$$

wobei $\int_0^t H_s^0 \,\mathrm{d}S_s^0$ als pfadweises Riemann-Stieltjes-Integral und $\int_0^t H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1$ als die Summe

$$\mu \cdot \int_0^t H_s^1 \cdot S_s^1 \,\mathrm{d}s + \sigma \cdot \int_0^t H_s^1 \cdot S_s^1 \,\mathrm{d}W_s$$

eines pfadweisen Riemann-Integrals und eines **Itō-Integrals** definiert ist.

- Um die Existenz der auftretenden stochastischen Integrale zu sichern, muss die Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $\boldsymbol{H}_t = \begin{pmatrix} H_t^0 \\ H_t^1 \end{pmatrix}$ **zulässig** sein, d.h.

  1. $H^0 = \left(H_t^0\right)_{t\in\mathbb{T}}$ und $H^1 = \left(H_t^1\right)_{t\in\mathbb{T}}$ sind progressiv messbar, d.h. $H^0 : (\tilde{t},\omega) \in [0,t] \times \Omega \mapsto H_{\tilde{t}}^0(\omega)$ ist messbar bezüglich $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t^*$ für alle $t \in \mathbb{T}$ (H^1 analog).
  2. $\int_0^T \left|H_t^0\right| \,\mathrm{d}t \;<\; \infty \quad \mathbb{P}$-f.s.
  3. $\int_0^T \left(H_t^1\right)^2 \,\mathrm{d}t \;<\; \infty \quad \mathbb{P}$-f.s.

- Die **differentielle Schreibweise** der Selbstfinanzierungsbedingung $V_t(\boldsymbol{H}_t) = V_0(\boldsymbol{H}_0) + \int_0^t H_s^0 \,\mathrm{d}S_s^0 + \int_0^t H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1$ ist

$$\mathrm{d}V_t(\boldsymbol{H}_t) \;=\; H_t^0 \mathrm{d}S_t^0 + H_t^1 \mathrm{d}S_t^1, \quad t \in \mathbb{T}.$$

- Analog zum zeitdiskreten MPM: Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ im Black-Scholes-Modell heißt eine **Arbitrage**, wenn für deren Wertprozess $\left(V_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$

$$V_0(\boldsymbol{H}_0) \le 0, \quad V_T(\boldsymbol{H}_T) \ge 0 \;\mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(V_T(\boldsymbol{H}_T) > 0\Big) > 0$$

gilt.

- **Satz:** Das Black-Scholes-Modell ist arbitragefrei bezüglich *regulärer* Handelsstrategien. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ im Black-Scholes-Modell heißt **regulär**, wenn es eine $\mathbb{Q}$-integrierbare Zufallsgröße Y gibt, so dass für den Wertprozess $\left(V_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$

$$V_t(\boldsymbol{H}_t) \;\ge\; Y \qquad \text{für alle } \; t \in [0,T]$$

gilt.

- Eine Zufallsgröße C auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ mit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(|C|\Big) < \infty$$

heißt **Europäisches Auszahlungsprofil**.

- Ein Europäisches Auszahlungsprofil C heißt **Derivat**, wenn es $\mathcal{F}_T$-messbar ist.

- Der Wert

$$c_0(C) \;:=\; \mathrm{e}^{-rT} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(C)$$

heißt **Preis** des Europäischen Auszahlungsprofils C.

- Ein Derivat C heißt **replizierbar**, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$V_T(\boldsymbol{H}_T) \;=\; C \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gibt. Eine solche Handelsstrategie heißt **replizierende Handelsstrategie** oder **Hedge**.

- **Satz:** Ist ein Derivat C in einem Black-Scholes-Modell *quadratisch* $\mathbb{Q}$-integrierbar, dann existiert eine replizierende Handelsstrategie $\Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$, deren diskontierter Wertprozess ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist. Insbesondere gilt $c_0(C) \;=\; V_0(\boldsymbol{H}_0)$.

- Das Black-Scholes-Modell ist somit in Bezug auf quadratisch integrierbare Derivate vollständig. Außerdem ist das auf $\mathcal{F}_T^*$ eingeschränkte Martingalmaß eindeutig bestimmt.

4.2 Grundsätzliche Überlegungen zu allgemeinen zeitstetigen Finanzmarktmodellen

- Das Black-Scholes-Modell sollte sich als Spezialfall eines allgemeinen zeitstetigen Finanzmarktmodelles ergeben (analog dazu, dass das CRR-Modell ein Spezialfall eines zeitdiskreten MPM ist).

- Die Definition einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie im Black-Scholes-Modell (4.2)

$$V_t(\boldsymbol{H}_t) \;=\; V_0(\boldsymbol{H}_0) + \int_0^t H_s^0 \,\mathrm{d}S_s^0 + \int_0^t H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1$$

  müsste somit verallgemeinert werden. Insbesondere stellt sich die Frage, welche Preisprozesse allgemein als Integratoren der auftretenden stochastischen Integrale in Frage kommen.

- Ebenso stellt sich die Frage, ob der Begriff des äquivalenten Martingalmaßes u.U. allgemeiner gefasst werden muss und welcher Zusammenhang mit den (im allgemeinen Modell noch zu definierenden) Eigenschaften der Arbitragefreiheit und Vollständigkeit besteht.

- Der im Folgenden zugrunde gelegte filtrierte (zeitstetige) Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Big(\Omega, \mathcal{F}, \big(\mathcal{F}_t\big)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\Big),$$

  wobei sowohl $\mathbb{T} = [0,T]$ mit Zeithorizont $T > 0$ als auch $\mathbb{T} = [0,\infty)$ möglich ist, wird – zur Vermeidung technischer Schwierigkeiten – als *vollständig* und *den „üblichen Bedingungen" genügend* vorausgesetzt (siehe Anhang D.1).

- Als Integrator für Itō-Integrale wurde bisher der Wienerprozess $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ verwendet, als Integranden adaptierte und progressiv messbare Prozesse $X = \big(X_t\big)_{t\in[0,T]}$ mit der Eigenschaft

$$\int_0^T X_s^2 \,\mathrm{d}s \;<\; \infty \quad \text{f.s.}$$

  Mit geringfügigen Einschränkungen an den Integranden (*vorhersagbar* anstatt *progressiv messbar*) können auch erheblich allgemeinere Integratoren (u.a. auch nicht-stetige wie Sprungprozesse) verwendet werden (zu den Begriffen „progressiv messbar" und „vorhersagbar" siehe Anhang D.2).

- Zunächst lässt sich das Itō-Integral für rechtsseitig stetige L^2-Martingale als Integratoren verallgemeinern (siehe Anhang D.3), später auch auf rechtsseitig stetige *lokale* L^2-Martingale, die als Spezialfall die stetigen lokalen Martingale mit beschränktem Startwert enthalten (siehe Anhang D.4). Die verwendeten Integratoren sind dabei dadurch gekennzeichnet, dass diese lediglich in trivialen Spezialfällen von lokal beschränkter Variation sind (siehe Satz D.32) und üblicherweise eine endliche quadratische Variation ungleich Null besitzen.

- Für Prozesse von lokal beschränkter Variation lassen sich stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale definieren (siehe Anhang D.5), wobei hier insbesondere die *stetigen* Prozesse von lokal beschränkter Variation von Interesse sind.

- Als *Integranden* für beide Integraltypen sind insbesondere stetige Prozesse mit beschränktem Startwert geeignet. Diese Prozesse sind lokal beschränkt (aber im Allgemeinen nicht von lokal beschränkter Variation!).

- Ein **Semimartingal** ist ein Prozess, der sich additiv aus einem lokalen Martingal und einem Prozess von lokal beschränkter Variation zusammensetzt. Hier sind vor allem die *stetigen* Semimartingale S von Interesse, die – bis auf fast sichere Gleichheit – die eindeutige Darstellung

$$S \;=\; S_0 + M^{(0)} + V^{(0)} \tag{4.3}$$

besitzen, wobei S_0 der Startwert, $M^{(0)}$ ein stetiges lokales Martingal mit Startwert Null und $V^{(0)}$ ein stetiger Prozess von lokal beschränkter Variation mit Startwert Null ist (siehe Anhang D.6).

- Aus der verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel (Satz D.39) erhält man, dass alle (ggf. mehrdimensionalen) Transformationen von stetigen Semimartingalen, die mittels einer Funktionen mit stetigen zweiten partiellen Ableitungen beschrieben werden können, ebenfalls stetige Semimartingale sind.

- Die Integration bezüglich stetiger Semimartingale wird gemäß (4.3) summandenweise bezüglich $M^{(0)}$ (Itō-Integral) und bezüglich $V^{(0)}$ (stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral) durchgeführt. Als Integranden sind wiederum stetige Prozesse mit beschränktem Startwert geeignet. Der sich daraus ergebende, von der oberen Integralgrenze abhängige Integralprozess ist wiederum ein stetiges Semimartingal, d.h., stetige Semimartingale sind auch bezüglich Integration abgeschlossen.

4.3 Allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen

Definition 4.1 *Ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen ist ein Tupel* $\left(\mathbb{T},\ \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right),\ S^0,\ \ldots,\ S^N\right)$ *mit*

- ***Handelszeitraum*** $\mathbb{T} = [0, \infty)$ *oder* $\mathbb{T} = [0, T]$ *mit Zeithorizont* $T > 0$
- ***vollständigem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum*** $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right)$*, der den „üblichen Bedingungen" genügt (siehe Anhang D.1) und mit* $\mathbb{P}$ *trivial auf* $\mathcal{F}_0$ *(d.h.* $\mathbb{P}(F_0) = 0$ *oder* $\mathbb{P}(F_0) = 1$ *für alle* $F_0 \in \mathcal{F}_0$*)*
- $N + 1$ ***stetigen, an*** $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ***adaptierten Semimartingalen***

$$S^0, \ldots, S^N : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R} \qquad \textit{mit} \qquad S^0(.,.) \ > \ 0 \quad \textit{(Diskontierungsprozess)},$$

den sogenannten ***Preisprozessen****.*

Bemerkungen:

1. **Bezeichnungen** analog zum (zeitdiskreten) Mehrperiodenmarktmodell für $t \in \mathbb{T}$ und $i = 0, \ldots, N$:

$$S_t^i \ := \ S^i(t,.), \quad \boldsymbol{S}_t \ := \begin{pmatrix} S_t^0 \\ \vdots \\ S_t^N \end{pmatrix}$$

2. Da $\mathbb{P}$ trivial auf $\mathcal{F}_0$ ist, ist der Startwert jedes Preisprozesses (und allgemein jedes an $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierten Prozesses) fast sicher konstant und damit auch fast sicher beschränkt.
3. Aufgrund der Stetigkeit sind die Preisprozesse vorhersagbar und damit progressiv messbar.
4. Ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell $\left(\mathbb{T},\ \left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\right),\ S^0,\ S^1\right)$ mit zwei stetigen Preisprozessen $S^0 = (S_t^0)_{t\in\mathbb{T}}$ und $S^1 = (S_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ ist ein Black-Scholes-Modell $\left(\mathbb{T},\ \left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right),\ S^0,\ S^1\right)$ gemäß Definition 3.1, falls
   - $\mathbb{T} = [0, T]$ mit $T > 0$,
   - $S_t^0 \equiv \mathrm{e}^{rt}$ $(t \in \mathbb{T})$ mit $r > 0$ und
   - $S_t^1 = s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$ $(t \in \mathbb{T})$ mit $s_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$

ist, wobei $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Wienerprozess bezüglich $\Big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\Big)$ ist. Der Prozess S^0 ist dabei stetig und aufgrund der Monotonie von beschränkter Variation (und somit ein Semimartingal). Der Prozess S^1 lässt sich darstellen als Produkt

$$S_t^1 \;=\; V_t \cdot M_t \quad \text{mit} \quad V_t := s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \quad \text{und} \quad M_t := \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t},$$

wobei $V = (V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiger Prozess von beschränkter Variation und $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiges Martingal ist (siehe Lemma 3.6). Für das Produkt dieser beiden Prozesse ergibt sich gemäß Satz D.36 (verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel) und der daraus abgeleiteten Regel der partiellen Integration (D.30) die Semimartingaldarstellung von S^1 mittels

$$\begin{aligned} S_t^1 &= s_0 + \int_0^t M_s \, \mathrm{d}V_s + \int_0^t V_s \, \mathrm{d}M_s \\ &= s_0 + \int_0^t \mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s} \, \mathrm{d}\Big(s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu s}\Big) + \int_0^t s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu s} \, \mathrm{d}\Big(\mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s}\Big) \end{aligned} \tag{4.4}$$

$(t \in \mathbb{T})$ bzw. – in der differentiellen Schreibweise –

$$\mathrm{d}S_t^1 \;=\; M_t \, \mathrm{d}V_t + V_t \, \mathrm{d}M_t.$$

Aus (3.14) und (3.15) ist bereits bekannt, dass S^1 außerdem die Darstellung

$$\begin{aligned} S_t^1 &= s_0 + \mu \cdot \int_0^t S_s^1 \, \mathrm{d}s + \sigma \cdot \int_0^t S_s^1 \, \mathrm{d}W_s \\ &= s_0 + \mu s_0 \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{\mu s} \mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s} \mathrm{d}s + \sigma s_0 \cdot \int_0^t \mathrm{e}^{\mu s} \mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s} \, \mathrm{d}W_s \end{aligned} \tag{4.5}$$

$(t \in \mathbb{T})$ bzw. als stochastische Differentialgleichung

$$\mathrm{d}S_t^1 \;=\; \mu S_t^1 \mathrm{d}t + \sigma S_t^1 \mathrm{d}W_t, \quad t \in \mathbb{T},$$

besitzt. Aufgrund der fast sicheren Eindeutigkeit der Semimartingaldarstellung stimmen die in (4.4) und (4.5) auftretenden Integralprozesse überein: Für ein Riemann-Stieltjes-Integral gilt

$$\int_0^t f \, \mathrm{d}g \;=\; \int_0^t f(s) g'(s) \, \mathrm{d}s, \quad \text{d.h. formal} \quad \mathrm{d}g \;=\; g' \mathrm{d}t \qquad („\tfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = g'“) \tag{4.6}$$

und somit in (4.4)

$$\mathrm{d}\Big(s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu s}\Big) \;=\; \mu s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu s} \mathrm{d}s, \quad s \in \mathbb{T},$$

was zum ersten Integral in (4.5) führt. Für ein Itō-Integral bezüglich des Wienerprozesses W ist gemäß der Itō-Doeblin-Formel C.15 formal

$$\mathrm{d}g(t, W_t) \;=\; \Big(g_t(t, W_t) + \tfrac{1}{2} \cdot g_{xx}(t, W_t)\Big)\mathrm{d}t + g_x(t, W_t)\mathrm{d}W_t, \quad t \in \mathbb{T},$$

also in (4.4)

$$\mathrm{d}\Big(\mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s}\Big) \;=\; \sigma \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_s - \frac{\sigma^2}{2} s}\,\mathrm{d}W_s, \quad s \in \mathbb{T},$$

woraus sich das zweite Integral in (4.5) ergibt.

5. Das Modell lässt sich auch auf càdlàg Semimartingale verallgemeinern (càdlàg – fast sicher rechsseitig stetig mit existierenden linksseitigen Limites). Damit können auch Sprungprozesse wie z.B. der Poisson-Prozess in das Modell integriert werden. Die mathematische Handhabung ist dann allerdings entsprechend aufwändiger.

6. **Bezeichnungen** für diskontierte Preisprozesse analog zum (zeitdiskreten) Mehrperiodenmarktmodell für $t \in \mathbb{T}$ und $i = 0, \ldots, N$:

$$\underset{\sim}{S}^i \;:=\; \frac{S^i}{S^0}, \quad \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \;:=\; \begin{pmatrix} \underset{\sim}{S}_t^0 \\ \vdots \\ \underset{\sim}{S}_t^N \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $\underset{\sim}{S}^0 \equiv 1$.

7. Die diskontierten Preisprozesse $\underset{\sim}{S}^0$, …, $\underset{\sim}{S}^N$ sind ebenfalls stetige Semimartingale: Zunächst ist der Prozess $\dfrac{1}{S^0} = \left(\dfrac{1}{S_t^0}\right)_{t \in \mathbb{T}}$ ein stetiges Semimartingal, denn gemäß der verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel für (stetige) Semimartingale D.37 sind Transformationen mittels zweimal stetig differenzierbarer Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiederum (stetige) Semimartingale. Der genannte Satz muss allerdings dahingehend verallgemeinert werden, dass er auch für Funktionen $h : U \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge ist, gilt, da die hier betrachtete Funktion $h : s \mapsto \frac{1}{s}$ lediglich auf $(0, \infty)$ definiert ist.[2] Es ergibt sich in differentieller Schreibweise für $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\frac{1}{S_t^0}\right) \;=\; \mathrm{d}h\Big(S_t^0\Big) \;&=\; h'\Big(S_t^0\Big)\,\mathrm{d}S_t^0 + \frac{1}{2}\,h''\Big(S_t^0\Big)\mathrm{d}\Big[S^0\Big]_t \\ &=\; -\Big(S_t^0\Big)^{-2}\mathrm{d}S_t^0 + \Big(S_t^0\Big)^{-3}\mathrm{d}\Big[S^0\Big]_t. \end{aligned}$$

[2]siehe Wolfgang Hackenbroch und Anton Thalmaier, Stochastische Analysis: Eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale, Teubner Verlag, 1994

Gemäß der mehrdimensionalen Itō-Doeblin-Formel D.39 ist das Produkt zweier (stetiger) Semimartingale wieder ein (stetiges) Semimartingal, und es ergibt sich gemäß (D.34) für $i = 1, \ldots, N$ und $t \in \mathbb{T}$

$$\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i \;=\; \mathrm{d}\left(S_t^i \cdot \frac{1}{S_t^0}\right) \;=\; S_t^i \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{S_t^0}\right) + \frac{1}{S_t^0}\,\mathrm{d}S_t^i + \mathrm{d}\left[S^i, \frac{1}{S^0}\right]_t .$$

4.3.1 Handelsstrategie und Arbitrage

In Analogie zum (zeitdiskreten) Mehrperioden-Marktmodell (Definition 2.39 und folgende) und zum Black-Scholes-Modell (Definition 3.19 und folgende) ergeben sich folgende Begriffe im allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen:

Definition 4.2 *Gegeben sei ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen* $\Big(\mathbb{T},\, \big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big),\, S^0, \ldots, S^N\Big)$.

- *Dann heißt eine $\mathcal{F}_t$-messbare $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige Zufallsgröße* $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} H^0 \\ \vdots \\ H^N \end{pmatrix}$ *ein **Portfolio** z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$ sowie*

  $$V_t(\boldsymbol{H}) \;:=\; \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{S}_t \;=\; \sum_{i=0}^{N} H^i \cdot S_t^i$$

  *der **Wert** des Portfolios $\boldsymbol{H}$ z. Ztpkt. $t \in \mathbb{T}$.*

- *Ein an $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierter $\mathbb{R}^{N+1}$-wertiger stochastischer Prozess $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt eine **Handelsstrategie** sowie*

  $$V(\overline{\boldsymbol{H}}) := \Big(V_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$$

  *der **Wertprozess** der Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$.*

Bemerkungen:

1. Die dazugehörigen diskontierten Werte bzw. Wertprozesse sind

   $$\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}) \;:=\; \frac{V_t(\boldsymbol{H})}{S_t^0} \;=\; \boldsymbol{H} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \quad (t \in \mathbb{T}) \qquad \text{bzw.} \qquad \underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}}) \;:=\; \Big(\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$$

2. An eine Handelsstrategie wurde in der vorgenommenen Definition lediglich die Voraussetzung der Adaptiertheit gestellt. Da für den wichtigen Begriff der *selbstfinanzierenden* Handelsstrategie jedoch die Integrierbarkeit bezüglich der Preisprozesse benötigt wird, werden im Folgenden diejenigen Handelsstrategien als *zulässig* bezeichnet, für die die entsprechenden Integrale gebildet werden können:

Definition 4.3 *Eine Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *mit* $\boldsymbol{H}_t = \begin{pmatrix} H_t^0 \\ \vdots \\ H_t^N \end{pmatrix}$ *in einem allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen* $S^0, \ldots, S^N$ *heißt **zulässig**, wenn die Integrale*

$$\int_0^t H_s^i \,\mathrm{d}S_s^i \quad \textit{und} \quad \int_0^t H_s^i \,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_s^i \tag{4.7}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ *und* $i = 0, \ldots, N$ *existieren.*

Bemerkungen:

1. Die Bedingungen, die an die einzelnen Komponenten $\left(H_t^0\right)_{t\in\mathbb{T}}, \ldots, \left(H_t^N\right)_{t\in\mathbb{T}}$ einer Handelsstrategie gestellt werden müssen, um jeweils die Integrierbarkeit zu sichern, können – je nach Gestalt der dazugehörigen Preisprozesse $S^0, \ldots, S^N$ bzw. diskontierten Preisprozesse – recht unterschiedlich sein.

2. Insbesondere ist die *Stetigkeit* einer Handelsstrategie hinreichend für die Existenz der Integrale bezüglich beliebiger stetiger Preisprozesse (siehe Anhang D.6). Aufgrund des fast sicheren konstanten Startwertes ($\mathbb{P}$ ist trivial auf $\mathcal{F}_0$) sind solche Handelsstrategien – analog zu den Betrachtungen in Satz D.29 – lokal beschränkt und somit L^2-Prozesse.

3. Ist ein (stetiger) Preisprozess $S = (S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein lokales Martingal, so sind gemäß (D.23) diejenigen Prozesse $H = (H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ bezüglich S integrierbar, die *vorhersagbar* sind und für die

   $$\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}[S]_s < \infty \qquad \text{f.s. für alle } t \in \mathbb{T}$$

   gilt.

4. Bei Itō-Integralen können im Fall *stetiger* Integratoren sogar *progressiv messbare* anstatt *vorhersagbare* Integranden betrachtet werden. Der Begriff der zulässigen Handelsstrategie im Black-Scholes-Modell (siehe Definition 3.22) ergibt sich dann als Spezialfall der hier vorgenommenen allgemeineren Definition.

5. Die im Black-Scholes-Modell erfolgte Definition einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie (siehe Definition 3.23) kann nun auf das vorliegende Modell verallgemeinert werden:

Definition 4.4 *Eine zulässige Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *mit* $\boldsymbol{H}_t = \begin{pmatrix} H_t^0 \\ \vdots \\ H_t^N \end{pmatrix}$ *im allgemeinen zeitstetigen Marktmodell heißt **selbstfinanzierend**, wenn für deren Wertprozess* $V(\overline{\boldsymbol{H}}) = \left(V_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *die folgende Gleichung für* $t \in \mathbb{T}$ *gilt:*

$$V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \;=\; V_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) + \sum_{i=0}^{N} \int_0^t H_s^i \, \mathrm{d}S_s^i \tag{4.8}$$

Bemerkungen:

1. Wie bisher besagt die Eigenschaft der Selbstfinanzierung, dass sämtliche Wertänderungen einer Handelsstrategie ausschließlich auf Änderungen der Preisprozesse („$\mathrm{d}S_s^i$“) zurückzuführen sind und Änderungen der Handelsstrategie („Portfolioumschichtungen“) „wertneutral“, d.h. ohne Zu- oder Abflüsse externer „Geldmengen“, erfolgen.

2. Differentielle Schreibweise von (4.8):

$$\mathrm{d}V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \;=\; \sum_{i=0}^{N} H_t^i \mathrm{d}S_t^i \;=\; \boldsymbol{H}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_t$$

(man beachte die formale Ähnlichkeit dieser Schreibweise zur Beziehung $V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) = \boldsymbol{H}_t \cdot \boldsymbol{S}_t$).

3. Das folgende Lemma besagt, dass die Eigenschaft der Selbstfinanzierung auch über die diskontierten Preisprozesse charakterisiert werden kann:

Lemma 4.5 *Eine zulässige Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *im allgemeinen zeitstetigen Marktmodell ist genau dann selbstfinanzierend, wenn für deren diskontierten Wertprozess* $\utilde{V}(\overline{\boldsymbol{H}}) = \left(\utilde{V}_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *die folgende Gleichung für* $t \in \mathbb{T}$ *gilt:*

$$\utilde{V}_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \;=\; \utilde{V}_0\left(\boldsymbol{H}_0\right) + \sum_{i=1}^{N} \int_0^t H_s^i \, \mathrm{d}\utilde{S}_s^i \tag{4.9}$$

(Ohne Beweis)

Bemerkungen:

1. Die Summe in (4.9) beginnt erst mit $i = 1$ und nicht mit $i = 0$ wie in (4.8). Bei der Verwendung diskontierter Preisprozesse stimmt tatsächlich die bei $i = 1$ beginnende Summe mit der bei $i = 0$ beginnenden Summe überein, da $\utilde{S}^0 \equiv 1$ und somit $\int_0^t H_s^0 \, \mathrm{d}\utilde{S}_s^0 = 0$ ist.

Beim Übergang zur diskontierten Betrachtung brauchen somit lediglich *verkürzte* Handelsstrategien bzw. Portfolios (d.h. Handesstrategien bzw. Portfolios ohne die nullte Komponente) untersucht zu werden – analog zur Vorgehensweise im (zeitdiskreten) Mehrperiodenmarktmodell.

2. Dieses Lemma ist auch als **„Numéraire Invarianz Theorem“** bekannt, da es außerdem besagt, dass die Eigenschaft der Selbstfinanzierung unabhängig von der speziellen Wahl des Diskontierungsprozesses erhalten bleibt. Insbesondere besitzen Marktmodelle, die sich lediglich in ihren Diskontierungsprozessen voneinander unterscheiden, dieselben selbstfinanzierenden Handelsstrategien (auf der Menge der für *alle* betrachteten Marktmodelle zulässigen Handelsstrategien, die sich wegen (4.7) im Hinblick auf die Menge der Handelsstrategien, die bezüglich der diskontierten Preisprozesse integrierbar sind, unterscheiden können).

3. Differentielle Notation: $\mathrm{d}V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) = \boldsymbol{H}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}_t \iff \mathrm{d}\underset{\sim}{V}_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) = \boldsymbol{H}_t \cdot \mathrm{d}\underset{\approx}{\boldsymbol{S}}_t$

4. In Analogie zu Definition 2.42 im zeitdiskreten Mehrperiodenmarktmodell und zu Definition 3.24 im Black-Scholes-Modell wird nun die Arbitrage und die Arbitragefreiheit definiert, wobei hier und im Folgenden der Handelszeitraum $\mathbb{T}$ als *beschränkt*, d.h. $\mathbb{T} = [0, T]$, angenommen wird:

Definition 4.6 *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt eine **Arbitrage** in einem allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum $\mathbb{T} = [0, T]$, wenn für deren Wertprozess $V(\overline{\boldsymbol{H}}) = \Big(V_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ die folgenden Bedingungen gelten:*

1. $V_0(\boldsymbol{H}_0) \leq 0$
2. $V_T(\boldsymbol{H}_T) \geq 0 \quad \mathbb{P}$*-f.s.*
3. $\mathbb{P}\Big(V_T(\boldsymbol{H}_T) > 0\Big) > 0$

*Ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum heißt **arbitragefrei**, falls in ihm keine Arbitrage existiert.*

Bemerkungen:

1. Eine Arbitrage für einen *unbeschränkten* Handelszeitraum $\mathbb{T} = [0, \infty)$ kann auf unterschiedliche Art und Weise definiert werden: Zum einem könnte die *Existenz* eines (von der jeweiligen Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$ abhängigen) Zeitpunkts $T > 0$ gefordert werden, so dass die obigen Bedingungen 2. und 3. erfüllt sind.[3] Zum anderen könnte als zusätzliche Bedingung die fast

[3] siehe Steven E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models, Springer Verlag, 2004

sichere Existenz von $V_\infty(\boldsymbol{H}_\infty) := \lim_{t\to\infty} V_t(\boldsymbol{H}_t)$ verlangt werden, für das dann obige Bedingungen 2. und 3. erfüllt sein sollen.[4] Die überwiegende Anzahl der Autoren behandelt jedoch ausschließlich den Fall eines beschränkten Handelszeitraums. Es sei darauf hingewiesen, dass insbesondere die Definition einer lokalisierenden Folge (siehe Definition D.21), die beispielsweise für ein lokales Martingal verwendet wird, entscheidend davon abhängt, ob der Handelszeitraum beschränkt oder unbeschränkt ist.

2. In der Literatur wird häufig die Bedingung 1. durch

   1b. $V_0(\boldsymbol{H}_0) = 0$

   ersetzt. Dies stellt zwar eine Einschränkung derjenigen Handelsstrategien, die eine Arbitrage sind, dar, lässt aber die Eigenschaft des Modells, arbitragefrei zu sein, unberührt, da aufgrund des streng positiven Diskontierungsprozesses sich zu jeder Arbitrage, die Bedingung 1. erfüllt, eine Arbitrage finden lässt, die Bedingung 1b. erfüllt (siehe dazu auch Lemma 2.9): Sei nämlich $\overline{\boldsymbol{H}}$ eine Arbitrage gemäß Definition 4.6 mit $V_0(\boldsymbol{H}_0) < 0$. Dann ist

   $$H \;:=\; -\frac{V_0(\boldsymbol{H}_0)}{S_0^0}$$

   wegen $S_0^0 > 0$ eine positive, $\mathcal{F}_0$-messbare Zufallsgröße, für die

   $$V_0(\boldsymbol{H}_0) + H \cdot S_0^0 \;=\; 0$$

   gilt. Dann ist aber die Handelsstrategie $\overline{\hat{\boldsymbol{H}}} = \left(\hat{\boldsymbol{H}}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $\hat{\boldsymbol{H}}_t = \begin{pmatrix} \hat{H}_t^0 \\ \vdots \\ \hat{H}_t^N \end{pmatrix}$, definiert durch

   $$\hat{H}_t^i \;:=\; \begin{cases} H_t^0 + H & \text{für } i = 0 \\ H_t^i & \text{für } i = 1, \dots, N \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{T})$$

   wegen

   $$V_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t) \;=\; V_t(\boldsymbol{H}_t) + H \cdot S_0^0 \;=\; V_t(\boldsymbol{H}_t) - V_0(\boldsymbol{H}_0)$$

   eine Arbitrage mit $V_0(\hat{\boldsymbol{H}}_0) = 0$ und $V_T(\hat{\boldsymbol{H}}_T) > 0$ $\mathbb{P}$-f.s..

3. Wie im (zeitdiskreten) Mehrperiodenmarktmodell sind die Arbitrage-Bedingungen in Definition 4.6 äquivalent zu den entsprechenden Bedingungen unter Verwendung der diskontierten Werten

   $$\underset{\sim}{V}_0(\boldsymbol{H}_0) \le 0, \quad \underset{\sim}{V}_T(\boldsymbol{H}_T) \ge 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_T(\boldsymbol{H}_T) > 0\Big) > 0.$$

[4] siehe Freddy Delbaen und Walter Schachermayer, The Mathematics of Arbitrage, Springer Verlag, 2nd Printing 2008

4.3.2 Martingalmaß und lokales Martingalmaß

Im (zeitdiskreten) Mehrperiodenmarktmodell war die Arbitragefreiheit äquivalent zur Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes (1. Fundamentalsatz 2.47), wobei der Begriff des „äquivalenten Martingalmaßes" im allgemeinen zeitstetigen Marktmodell noch zu definieren ist. Dieses äquivalente Martingalmaß (in einem arbitragefreien zeitdiskreten Modell) konnte dann zur Bestimmung eines „fairen Preises" verwendet werden („Law of One Price" 2.52). Im *zeitstetigen* Fall zeigt sich bereits für das Black-Scholes-Modell, dass dieses bezüglich selbstfinanzierender Handelsstrategien *nicht* arbitragefrei ist (Lemma 3.25). Demnach ist für das allgemeine zeitstetige Marktmodell auch keine solch vergleichsweise einfache Aussage wie für das zeitdiskrete Mehrperiodenmarktmodell zu erwarten. Zunächst werden jedoch – analog zu Definition 2.45 und Definition 3.7 – für das hier betrachtete allgemeine zeitstetige Marktmodell die Begriffe des äquivalenten Martingalmaßes sowie des äquivalenten *lokalen* Martingalmaßes eingeführt:

Definition 4.7 *Gegeben sei ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen* $\Big(\mathbb{T},\ \big(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}},\mathbb{P}\big),\ S^0,\ \ldots,\ S^N\Big)$*. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{Q}$ *auf* $\big(\Omega,\mathcal{F}\big)$ *heißt* ***äquivalentes Martingalmaß*** *bzw.* ***äquivalentes lokales Martingalmaß*** *in diesem Modell, falls es folgende Eigenschaften besitzt:*

1. $\mathbb{Q}$ *ist äquivalent zu* $\mathbb{P}$*, d.h.,* $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{P}$ *besitzen dieselben Nullmengen.*
2. *Der* $\mathbb{R}^{N+1}$*-wertige diskontierte Preisvektorprozess* $\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist ein* $\mathbb{Q}$*-Martingal, d.h.*

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_t^i}{S_t^0}\mid\mathcal{F}_s\right)=\frac{S_s^i}{S_s^0}\quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}\quad \text{für alle } s<t,\ \ s,t\in\mathbb{T},\ \ i\in\{0,\ldots,N\},$$

bzw. ein lokales $\mathbb{Q}$*-Martingal , d.h., es gibt eine lokalisierende Folge* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, so dass die bei* τ_n *gestoppten diskontierten Preisvektorprozesse* $\left(\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}\right)^{\tau_n}$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{Q}$*-Martingale sind.*

Bemerkung: Falls in einem allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen ein äquivalentes lokales Martingalmaß $\mathbb{Q}$ existiert, so ergibt sich daraus – unter der Voraussetzung $H^i:=(H_t^i)_{t\in\mathbb{T}}\in\mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_{\underset{\sim}{S}^i}$, d.h. H^i vorhersagbar und $\mathbb{Q}\left(\int_0^t (H_s^i)^2\,\mathrm{d}[\underset{\sim}{S}^i]_s<\infty\right)=1$ für alle $t\in\mathbb{T}$ und $i=1,\ldots,N$, siehe (D.23) – wegen Satz D.27, (4.9) und der Vektorraum-Eigenschaft der lokalen Martingale, dass *jeder* diskontierte Wertprozess $\underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}})$ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$ ein *lokales* Martingal ist. Sollte $\mathbb{Q}$ ein „echtes" (d.h. nicht nur lokales) Martingalmaß sein, ergibt sich daraus trotz Satz D.16 allerdings *nicht*, dass jeder diskontierte Wertprozess ein „echtes" Martingal ist: Dies wäre lediglich dann der Fall, wenn für die Komponenten $H^1=(H_t^1)_{t\in\mathbb{T}},\ \ldots,$ $H^N=(H_t^N)_{t\in\mathbb{T}}$ der Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}$

$$H^i\in\mathcal{L}^2_{\underset{\sim}{S}^i}\quad (i=1,\ldots,N)$$

gelten würde. Für den allgemeineren Fall

$$H^i \in \mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_{\underset{\sim}{S}^i} \quad (i = 1, \ldots, N)$$

wird das Integral $\int\limits_0^t H^i_s \, \mathrm{d}\underset{\sim}{S}^i_s$ für $t \in \mathbb{T}$ und $i = 1, \ldots, N$ gemäß Definition D.26 wie für ein lokales Martingal gebildet, so dass in diesem Fall Satz D.27 „für lokale Martingale" angewendet werden muss. Selbst im Black-Scholes-Modell ist demnach der diskontierte Wertprozess lediglich ein lokales Martingal (siehe Bemerkung zu Lemma 3.27) und kein Martingal, was zur Existenz von Arbitragen führt (für die Arbitragefreiheit eines Modells ist die Supermartingal-Eigenschaft der relevanten diskontierten Wertprozesse hinreichend, siehe Satz 3.28). Die folgende Definition und der darauf folgende Satz sind unmittelbare Verallgemeinerungen von Definition 3.26 und Satz 3.28 im Black-Scholes-Modell.

Definition 4.8 *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \left(\boldsymbol{H}_t\right)_{t \in \mathbb{T}}$ im allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen heißt **regulär**, wenn es eine $\mathbb{Q}$-integrierbare Zufallsgröße Y gibt, so dass für den diskontierten Wertprozess $\underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}}) = \left(\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)\right)_{t \in \mathbb{T}}$ das Folgende gilt:*

$$\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t) \;\geq\; Y \qquad \textit{für alle} \;\; t \in \mathbb{T}.$$

*Ist $Y \equiv -\delta$ mit $\delta \in \mathbb{R}$, so heißt $\overline{\boldsymbol{H}}$ δ-**regulär** oder **streng regulär**.*

Bemerkungen:

1. Jede streng reguläre Handelsstrategie ist regulär. Jede δ_1-reguläre Handelsstrategie ist auch δ_2-regulär für $\delta_2 < \delta_1$.

2. Diese Definition einer regulären Handelsstrategie ist konsistent mit derjenigen im Black-Scholes-Modell, wo der *undiskontierte* Wertprozess betrachtet wurde, da im Black-Scholes-Modell der Diskontierungsprozess deterministisch ist und somit ein *diskontierter* Wertprozess genau dann regulär ist, wenn dies auch für den *undiskontierten* Wertprozess gilt. Bei allgemeinen Diskontierungsprozessen ist dies nicht immer der Fall.

Satz 4.9 *Existiert in einem allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum $\mathbb{T} = [0, T]$ ein äquivalentes lokales Martingalmaß, so ist das Modell arbitragefrei bezüglich regulärer Handelsstrategien.*

Beweis: Gemäß obiger Bemerkung sind bei Existenz eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes die diskontierten Wertprozesse von selbstfinanzierenden Handelsstrategien lokale Martingale (bezüglich des äquivalenten lokalen Martingalmaßes), insbesondere also diejenigen von regulären Handelsstrategien. Gemäß Lemma D.24 sind reguläre Handelsstrategien sogar Supermartingale bezüglich des äquivalenten lokalen Martingalmaßes, da der diskontierte Wertprozess zum Zeitpunkt Null $\mathbb{Q}$-fast sicher beschränkt und damit integrierbar ist. Die Aussage ergibt sich dann völlig analog zum Beweis von Satz 3.28.

■

Bemerkungen:

1. Die Voraussetzung der Regularität hätte dahingehend abgeschwächt werden können, dass diejenigen selbstfinanzierenden Handelsstrategien betrachtet werden, deren diskontierte Wertprozesse bezüglich des äquivalenten lokalen Martingalmaßes Supermartingale sind.

2. Bezüglich der Menge der selbstfinanzierenden Handelsstrategien mit *beschränktem* Wertprozess ist wegen Lemma D.23 jedes äquivalente lokale Martingalmaß ein (echtes) Martingalmaß.

3. Die Umkehrung von Satz 4.9 kann unter schärferen Voraussetzungen an die Handelsstrategien (streng regulär) und einer schwächeren Arbitrageforderung („asymptotische Arbitrage") gezeigt werden (siehe später Satz 4.12).

4. Für eine spezielle Struktur des Diskontierungsprozesses S^0 wird im folgenden Satz gezeigt, dass die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes bzw. lokalen Martingalmaßes äquivalent ist zu einer speziellen Struktur der Preisprozesse. Dazu ist allgemein zu bemerken, dass die Martingal-Eigenschaft eines Prozesses (und damit sowohl die lokale Martingal-Eigenschaft als auch die Semimartingal-Eigenschaft) von der speziellen Wahl des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ abhängt. Es kann allerdings gezeigt werden, dass ein Semimartingal bezüglich $\mathbb{P}$ auch ein Semimartingal bezüglich eines zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Maßes $\mathbb{Q}$ ist.

Lemma 4.10 *In einem allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen* $\Big(\mathbb{T}, \big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big), S^0, \ldots, S^N\Big)$ *sei der Diskontierungsprozess* S^0 *gegeben durch* $S^0_t := \mathrm{e}^{r(t)}$, *wobei* $r : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ *eine einmal stetig differenzierbare (deterministische) Funktion ist. Ein zu* $\mathbb{P}$ *äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{Q}$ *ist genau dann ein äquivalentes Martingalmaß bzw. lokales Martingalmaß, falls sich alle Preisprozesse* $S^0, \ldots, S^N$ *in der Form*

$$\mathrm{d}S^i_t \;=\; r'(t) \cdot S^i_t \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}M^i_t \qquad (i = 0, \ldots, N,\ t \in \mathbb{T}) \tag{4.10}$$

darstellen lassen, wobei $M^i = (M^i_t)_{t\in\mathbb{T}}$ $(i = 0, \ldots, N)$ *ein stetiges Martingal bzw. stetiges lokales Martingal bezüglich* $\mathbb{Q}$ *mit Startwert Null ist.*

Beweis: Die Funktion $t \in \mathbb{T} \mapsto \mathrm{e}^{-r(t)} \in (0, \infty)$ ist nach Voraussetzung stetig, so dass sie als Integrand sowohl von Itō- als auch von stochastischen Riemann-Stieltjes-Integralen verwendet werden kann. Für $S^0_t = \mathrm{e}^{r(t)}$ erhält man aus der Regel der partiellen Integration für Semimartingale (D.34) für $t \in \mathbb{T}$ und $i = 0, \ldots, N$

$$\underset{\sim}{S}{}^i_t \;=\; S^i_t \cdot \mathrm{e}^{-r(t)} \;=\; S^i_0 \cdot \mathrm{e}^{-r(0)} + \int_0^t S^i_s \,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-r(s)}\right) + \int_0^t \mathrm{e}^{-r(s)} \,\mathrm{d}S^i_s + \left[S^1, S^0\right]_t.$$

Da S^0 ein Prozess von beschränkter Variation ist, ist der Kovariationsprozess $\left(\left[S^1, S^0\right]_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ Null. Somit ergibt sich in differentieller Schreibweise

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i &= S_t^i \,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-r(t)}\right) + \mathrm{e}^{-r(t)}\,\mathrm{d}S_t^i \\ &\overset{(4.6)}{=} -r'(t)\cdot \mathrm{e}^{-r(t)}\cdot S_t^i\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-r(t)}\,\mathrm{d}S_t^i. \end{aligned}$$

„Multiplikation“ mit $\mathrm{e}^{r(t)}$ führt zu[5]

$$\mathrm{e}^{r(t)}\,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i = -r'(t)\cdot S_t^i\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}S_t^i,$$

also

$$\mathrm{d}S_t^i = r'(t)\cdot S_t^i\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{r(t)}\,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i. \tag{4.11}$$

Sei nun $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes (lokales) Martingalmaß, d.h. der stetige Prozess $\left(\underset{\sim}{S}_t^i\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ist für alle $i = 0,\ldots,N$ ein (lokales) Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$. Dann ist auch gemäß Satz D.16 bzw. Satz D.27 mit Bemerkungen

$$\left(\mathrm{e}^{r(t)}\,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i\right)_{t\in\mathbb{T}} = \left(\int_0^t \mathrm{e}^{r(s)}\,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_s^i\right)_{t\in\mathbb{T}} =: \left(M_t^i\right)_{t\in\mathbb{T}} \overset{M_0^i=0}{=} \left(\mathrm{d}M_t^i\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

ein stetiges (lokales) Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$ mit Startwert Null und man erhält die Richtung „$\Longrightarrow$“ der obigen Aussage. Ist umgekehrt $\left(M_t^i\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiges (lokales) Martingal mit Startwert Null bezüglich eines zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$, so gilt wegen der Eindeutigkeit der Semimartingaldarstellung und (4.11) für $i = 0,\ldots,N$ und $t\in\mathbb{T}$

$$\mathrm{d}M_t^i = \mathrm{e}^{r(t)}\,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i, \quad \text{also} \quad M_t^i = \int_0^t \mathrm{e}^{r(s)}\,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_s^i.$$

Aufgrund der Substitutionsregel ist dann

$$\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i = \mathrm{e}^{-r(t)}\,\mathrm{d}M_t^i, \quad \text{also} \quad \underset{\sim}{S}_t^i = \underset{\sim}{S}_0^i + \int_0^t \mathrm{e}^{-r(s)}\,\mathrm{d}M_s^i,$$

und wegen Satz D.16 bzw. Satz D.27 ebenfalls ein (lokales) Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$.

∎

Bemerkungen:

1. Wegen $S_t^0 = \mathrm{e}^{r(t)}$ ist in (4.10) $\mathrm{d}S_t^0 = r'(t) \cdot S_t^0 \,\mathrm{d}t$ und somit $M^0 \equiv 0$.

2. Dieses Lemma kann auf das Black-Scholes-Modell angewendet werden: Für den Diskontierungsprozess S^0 gilt dort $S_t^0 = \mathrm{e}^{r \cdot t}$ mit $r > 0$, d.h. $r(t) = r \cdot t$ sowie $r'(t) = r$. Bezüglich des dortigen äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ besitzt der Aktienpreisprozess S^1 mit $S_t^1 = s_0 \cdot \mathrm{e}^{\mu t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t}$ (wobei $W = (W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein Wienerprozess bezüglich $\mathbb{P}$ ist) die differentielle Darstellung

$$\mathrm{d}S_t^1 \;=\; r \cdot S_t^1 \,\mathrm{d}t + \sigma \cdot S_t^1 \,\mathrm{d}\tilde{W}_t,$$

wobei $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein Wienerprozess bezüglich $\mathbb{Q}$ ist. Aufgrund der Stetigkeit von S^1 ist $(\sigma \cdot S_t^1 \,\mathrm{d}\tilde{W}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ebenfalls ein stetiges Martingal mit Startwert Null.

4.3.3 Asymptotische Arbitrage und Vollständigkeit

Die Umkehrung von Satz 4.9 ist mit Hilfe folgender schwächeren Arbitragedefinition möglich:

Definition 4.11 *Eine Folge von selbstfinanzierenden Handelsstrategien*

$$\left(\overline{\boldsymbol{H}}^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \;=\; \left(\left(\boldsymbol{H}_t^{(k)}\right)_{t \in \mathbb{T}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

mit der dazugehörigen Folge von Wertprozessen

$$\left(V(\overline{\boldsymbol{H}}^{(k)})\right)_{k \in \mathbb{N}} \;=\; \left(\left(V_t(\boldsymbol{H}_t^{(k)})\right)_{t \in \mathbb{T}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

heißt eine ***asymptotische Arbitrage*** *in einem allgemeinen zeitstetigen Marktmodell mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum $\mathbb{T} = [0, T]$, wenn folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

[5] Tatsächlich steht hinter der Multiplikation in der differentiellen Schreibweise die Substitutionsregel für Itō-Integrale und stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale (siehe 2. Bemerkung zu Satz D.27):

$$\begin{aligned}
& & \mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i &= -r'(t) \cdot \mathrm{e}^{-r(t)} \cdot S_t^i \,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-r(t)} \,\mathrm{d}S_t^i \\
&\Longleftrightarrow & \underset{\sim}{S}_t^i - \underset{\sim}{S}_0^i &= -\int_0^t r'(s) \cdot \mathrm{e}^{-r(s)} \cdot S_s^i \,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{-r(s)} \,\mathrm{d}S_s^i \\
&\overset{(D.28)}{\Longrightarrow} & \int_0^t \mathrm{e}^{r(s)} \,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_s^i &= \int_0^t \mathrm{e}^{r(s)} \,\mathrm{d}\left(-\int_0^s r'(u) \cdot \mathrm{e}^{-r(u)} \cdot S_u^i \,\mathrm{d}u\right) + \int_0^t \mathrm{e}^{r(s)} \,\mathrm{d}\left(\int_0^s \mathrm{e}^{-r(u)} \,\mathrm{d}S_u^i\right) \\
&\overset{\text{Subst.}}{\Longleftrightarrow} & \int_0^t \mathrm{e}^{r(s)} \,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_s^i &= -\int_0^t \mathrm{e}^{r(s)} \cdot r'(s) \cdot \mathrm{e}^{-r(s)} \cdot S_s^i \,\mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{e}^{r(s)} \cdot \mathrm{e}^{-r(s)} \,\mathrm{d}S_s^i \\
&\Longleftrightarrow & \int_0^t \mathrm{e}^{r(s)} \,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_s^i &= -\int_0^t r'(s) \cdot S_s^i \,\mathrm{d}s + S_t^i - S_0^i \\
&\Longleftrightarrow & \mathrm{e}^{r(t)} \,\mathrm{d}\underset{\sim}{S}_t^i &= -r'(t) \cdot S_t^i \,\mathrm{d}t + \mathrm{d}S_t^i.
\end{aligned}$$

Durch „Multiplikation" mit $\mathrm{e}^{-r(t)}$ lässt sich ebenso die Umkehrung zeigen.

1. $V_0\Big(\boldsymbol{H}_0^{(k)}\Big) = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$

2. *Es existiert eine nichtnegative Zufallsgröße* $V^* \geq 0$ *mit*

$$\mathbb{P}\Big(V^* > 0\Big) \;>\; 0$$

und eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen $\Big(\delta^{(k)}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ *mit* $\lim\limits_{k\to\infty} \delta^{(k)} = 0$, *so dass*

$$V_T\Big(\boldsymbol{H}_T^{(k)}\Big) \;\geq\; V^* - \delta^{(k)} \quad \textit{f.s.}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum heißt ***asymptotisch arbitragefrei****, falls in ihm keine asymptotische Arbitrage existiert.*

Bemerkungen:

1. Der Begriff „asymptotische Arbitrage“ wird in der Literatur mit teilweise abweichender Bedeutung verwendet.

2. Jede Arbitrage $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $V_0\Big(\boldsymbol{H}_0\Big) = 0$ ist eine asymptotische Arbitrage (mit $\overline{\boldsymbol{H}}^{(k)} = \overline{\boldsymbol{H}}$ und $\delta^{(k)} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie $V^* \equiv 0$). Somit ist jedes asymptotisch arbitragefreie Marktmodell arbitragefrei. Dabei ist der Begriff „asymptotisch arbitragefrei“ im Sinn von „frei von asymptotischen Arbitragen“ zu verstehen.

3. Werden lediglich streng reguläre Handelsstrategien betrachtet, entspricht die asymptotische Arbitragefreiheit der in der Literatur verwendeten sogenannten NFLVR-Bedingung („No Free Lunch with Vanishing Risk“), die – wie auch der folgende Fundamentalsatz – auf Arbeiten von Freddy Delbaen (ETH Zürich) und Walter Schachermayer (Universität Wien) aus den 90er Jahren zurückgeht.

Satz 4.12 (1. Fundamentalsatz) *Ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum ist genau dann asymptotisch arbitragefrei bezüglich streng regulärer Handelsstrategien, wenn ein äquivalentes lokales Martingalmaß existiert.*

(Ohne Beweis)

Bemerkungen:

1. Sind die Preisprozesse außerdem noch beschränkt, ist die asymptotische Arbitragefreiheit bezüglich streng regulärer Handelsstrategien äquivalent zur Existenz eines äquivalenten (echten) Martingalmaßes.

2. Als nächtes ist die Bestimmung eines „fairen Preises“ für ein Auszahlungsprofil („contingent claim“) von Interesse. Die entsprechenden Begriffe werden im Folgenden eingeführt.

Definition 4.13 *Gegeben sei ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell* $\Big(\mathbb{T},\ \big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big),$ $S^0, \ldots, S^N\Big)$ *mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum* $\mathbb{T} = [0, T]$.

- *Eine Zufallsgröße* C *auf* $\big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\big)$ *heißt* ***Europäisches Auszahlungsprofil***. *Ist* C *messbar bezüglich* $\mathcal{F}_T$, *so heißt sie* ***Derivat***.
- *Die dazugehörige Zufallsgröße*

  $$\underset{\sim}{C} \;:=\; \frac{C}{S_T^0}$$

  heißt ***diskontiertes Europäisches Auszahlungsprofil***.
- *Ein Europäisches Auszahlungsprofil* C *heißt* ***replizierbar***, *falls eine selbstfinanzierende Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \big(\boldsymbol{H}_t\big)_{t\in\mathbb{T}}$ *existiert, so dass*

  $$V_T(\boldsymbol{H}_T) = C \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{4.12}$$

  gilt. Eine solche Handelsstrategie heißt ***replizierende Handelsstrategie***.
- *Das Marktmodell heißt* ***vollständig***, *wenn jedes Europäische Auszahlungsprofil replizierbar ist.*

Bemerkungen:

1. Eigenschaft (4.12) ist gleichbedeutend mit

   $$\underset{\sim}{V}_T(\boldsymbol{H}_T) = \underset{\sim}{C} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\ .$$

2. Diese Definition ist konsistent mit Definition 2.48 im (zeitdiskreten) Mehrperiodenmodell. Die im Black-Scholes-Modell zusätzlich vorausgesetzte Integrierbarkeit bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes (Definition 3.10) wird hier nicht verlangt, da die Existenz eines Martingalmaßes im betrachteten allgemeinen Marktmodell nicht vorausgesetzt wurde.

3. Der gesuchte „faire Preis" eines Auszahlungsprofils lässt sich im (zeitdiskreten) Mehrperiodenmodell als eindeutiger Erwartungswert bezüglich eines äquivalenten Martingalmaßes bestimmen (siehe Satz 2.52 „Law of One Price"). Voraussetzungen im zeitdiskreten Modell sind dabei die Arbitragefreiheit sowie Integrierbarkeitsbedingungen („strenge Replizierbarkeit") an die replizierenden Handelsstrategien. Diese beiden Voraussetzungen sorgen dafür, dass der diskontierte Wertprozess einer replizierenden Handelsstrategie ein Martingal bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes ist (siehe Lemma 2.51). Im *zeitdiskreten* Modell ist die Arbitragefreiheit äquivalent zur Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes, was im *zeitstetigen* Modell nicht der Fall ist. Die Existenz eines äquivalenten (lokalen) Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ sowie die $\mathbb{Q}$-Martingaleigenschaft des Wertprozesses der replizierenden Handelsstrategie müssen hier explizit gefordert werden.

Satz 4.14 („Law of One Price") *Gegeben sei ein allgemeines zeitstetiges Marktmodell* $\Big(\mathbb{T},\ \big(\Omega,\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}},\ \mathbb{P}\big),\ S^0,\ \ldots,\ S^N\Big)$ *mit stetigen Preisprozessen und beschränktem Handelszeitraum* $\mathbb{T} = [0,T]$, *für das ein äquivalentes lokales Martingalmaß* $\mathbb{Q}$ *existiert, sowie ein replizierbares Europäisches Auszahlungsprofil* C *mit der replizierenden Handelsstrategie* $\overline{\boldsymbol{H}} = \big(\boldsymbol{H}_t\big)_{t\in\mathbb{T}}$. *Ist der dazugehörige diskontierte Wertprozess* $\underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}}) = \Big(\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ *ein* $\mathbb{Q}$*-Martingal, so gilt:*

1. *Das diskontierte Europäische Auszahlungsprofil* $\underset{\sim}{C}$ *ist* $\mathbb{Q}$*-integrierbar und*

   $$V_t(\boldsymbol{H}_t) \;=\; S_t^0 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{C} \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad \text{f.s.} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

   Bezeichnung: $c_0(C) := \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(V_0(\boldsymbol{H}_0)\Big)$ *(„Preis des Europäischen Auszahlungsprofils* C*")*

2. *Unabhängig von der speziellen Wahl eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes* $\mathbb{Q}$, *für das* $\underset{\sim}{V}(\overline{\boldsymbol{H}})$ *ein Martingal ist, gilt*

   $$c_0(C) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_0^0) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C}).$$

3. *Das um den Prozess* $S^{N+1} := \overline{\boldsymbol{H}}$ *erweiterte allgemeine zeitstetige Marktmodell*

   $$\Big(\mathbb{T}, \big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big), S^0, \ldots, S^N, S^{N+1}\Big)$$

   ist bezüglich regulärer Handelsstrategien arbitragefrei.

Beweis: Zu 1.: Da $\Big(\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, ist $\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)$ $\mathbb{Q}$-integrierbar für alle $t \in \mathbb{T}$, und es gilt

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_T(\boldsymbol{H}_T) \mid \mathcal{F}_t\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t) \quad \text{f.s.} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Aus $\underset{\sim}{V}_T(\boldsymbol{H}_T) = \underset{\sim}{C}$ $\mathbb{Q}$-f.s. ergibt sich dann direkt die Aussage.
Zu 2.: Aufgrund der Martingaleigenschaft des diskontierten Wertprozesses stimmen die Erwartungswerte für jedes „Martingalmaß" überein.
Zu 3.: Da das betrachtete Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auch für den neu hinzugenommenen Preisprozess S^{N+1} ein äquivalentes lokales Martingalmaß ist, ergibt sich die Aussage aus Satz 4.9.

∎

Bemerkungen:

1. Es verbleibt die Frage nach der Charakterisierung der *Vollständigkeit*. Im (zeitdiskreten) Mehrperiodenmodell war die Vollständigkeit bei vorliegender Arbitragefreiheit gleichbedeutend mit der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes (2. Fundamentalsatz 2.56).

2. Für entsprechende Aussagen im allgemeinen zeitstetigen Marktmodell sind Einschränkungen an das Modell bzw. die zu replizierenden Europäischen Auszahlungsprofile erforderlich. Grundlagen hierfür sind in den meisten Fällen sogenannte Martingaldarstellungssätze.

3. Da beispielsweise im Black-Scholes-Modell die Stochastik auf dem Wienerprozess beruht, der ein L^2-Prozess ist, sind dort alle quadratisch integrierbaren Derivate replizierbar (siehe Satz 3.30).

4. In einem zeitstetigen Marktmodell mit *nichtnegativen* Preisprozessen ist die Vollständigkeit bezüglich *beschränkter* Derivate äquivalent zur Eindeutigkeit des äquivalenten lokalen Martingalmaßes.

5. In allgemeineren Modellen muss das Konzept der äquivalenten lokalen Martingalmaße auf dasjenige der sogenannten äquivalenten σ-Martingalmaße erweitert werden: In einem allgemeinen zeitstetigen Marktmodell ist die Vollständigkeit bezüglich *beschränkter* Derivate äquivalent zur Eindeutigkeit des äquivalenten σ-Martingalmaßes.

Anhang A

Anhang zur klassischen Finanzmathematik

A.1 Zinsberechnungsmethoden (*Day Count Conventions*)

- Zweck: Berechnung von Datumsdifferenzen als Jahresbruchteile (insbesondere im Zusammenhang mit Zinsrechnung)
- Andere Bezeichnungen: Zinsmethode, Zinsusance *(day count fraction, day count basis, day count method)*
- Es existieren verschiedene teilweise historisch gewachsene Konventionen. Eine Standardisierung (auch der Notationen) ist noch nicht erfolgt.

Definition A.1 *Ein **Datum** ist ein Tripel natürlicher Zahlen $(d, m, y) \subset \mathbb{N}^3$ mit genau einer der folgenden Eigenschaften:*

1. $(d, m) \in \{1, \ldots, 30\} \times \{4, 6, 9, 11\}$
2. $(d, m) \in \{1, \ldots, 31\} \times \{1, 3, 5, 7, 8, 10, 12\}$
3. $(d, m) \in \{1, \ldots, 28\} \times \{2\}$
4. $\Big((d, m) = (29, 2)\Big) \ \wedge \ \Big((400 \mid y) \ \vee \ \Big((4 \mid y) \ \wedge \ \neg(100 \mid y)\Big)\Big)$

*Die Menge aller Daten werde mit $\mathbb{D}$ bezeichnet. Für das Tripel (d, m, y) heißt d **Tag**, m **Monat** und y **Jahr**.*

Bemerkungen: $(d_1, m_1, y_1), (d_2, m_2, y_2) \in \mathbb{D}$:

- $(d_1, m_1, y_1) \ = \ (d_2, m_2, y_2) \quad \Longleftrightarrow \quad d_1 = d_2 \ \wedge \ m_1 = m_2 \ \wedge \ y_1 = y_2$

- $$(d_1, m_1, y_1) \preceq (d_2, m_2, y_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rl} & (y_1 < y_2) \\ \vee & \Big((y_1 = y_2) \ \wedge \ (m_1 < m_2)\Big) \\ \vee & \bigg(\Big((m_1, y_1) = (m_2, y_2)\Big) \ \wedge \ (d_1 \le d_2)\bigg) \end{array}$$

- $$(d_1, m_1, y_1) \prec (d_2, m_2, y_2) \iff \begin{array}{rl} & \Big((d_1, m_1, y_1) \preceq (d_2, m_2, y_2)\Big) \\ \wedge & \Big((d_1, m_1, y_1) \neq (d_2, m_2, y_2)\Big) \end{array}$$

- Die Menge $\mathbb{D}$ ist wohlgeordnet, d.h., jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{D}$ besitzt bezüglich „$\prec$“ ein kleinstes Element. Insbesondere besitzt jedes Element aus $\mathbb{D}$ einen Nachfolger und (bis auf $(1,1,1)$) einen Vorgänger. Der Nachfolger von $(d,m,y) \in \mathbb{D}$ werde mit $(d,m,y)^+$, der Vorgänger mit $(d,m,y)^-$ bezeichnet (für $(d,m,y) \succ (1,1,1)$).

Übungsaufgabe: Überprüfen Sie, welche der folgenden Eigenschaften die obigen Relationen „$\preceq$“ bzw. „$\prec$“ besitzen: Reflexivität, Irreflexivität, Transitivität, Drittengleichheit, Symmetrie, Antisymmetrie, Asymmetrie, Linearität, Konnexität, Trichotomie.

Definition A.2 *Es sei* $\mathbb{D}_2 := \{(x,y) \in \mathbb{D}^2 \mid x \preceq y\}$ *die Menge aller Datumspaare, bei denen das zweite Datum nicht kleiner als das erste ist. Eine **Zinsberechnungsmethode*** (day count convention) *ist eine Funktion* $\delta : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R}_{0+}$ *mit den Eigenschaften*

1. $\delta(x,x) = 0, \quad x \in \mathbb{D},$
2. $\delta(x,y) \le \delta(x,z) + \delta(z,y), \quad (x,y),(x,z),(z,y) \in \mathbb{D}_2.$

Bemerkung: Die Eigenschaft

$$\delta(x,y) = 0 \implies x = y, \quad (x,y) \in \mathbb{D}_2, \tag{A.1}$$

wird nicht gefordert. Tatsächlich besitzen viele in der Praxis verwendeten Zinsberechnungsmethoden diese Eigenschaft nicht. Somit ist die Verallgemeinerung $\delta^* : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}_{0+}$ von δ auf $\mathbb{D}^2$ mit

$$\delta^*(x,y) := \begin{cases} \delta(x,y) & \text{für } x \preceq y \\ \delta(y,x) & \text{sonst} \end{cases} \qquad (x, y \in \mathbb{D})$$

keine *Metrik*, sondern lediglich eine *Semimetrik* (bzw. *Pseudometrik*) auf $\mathbb{D}$.

A.1.1 30/360-Methoden

- Annahme: Jeder Monat hat 30 Tage und das gesamte Jahr 360 Tage.
- Historisch bedingte Methode zur Vereinfachung von Rechnungen
- Es gibt mehrere Varianten von 30/360-Methoden, die sich hinsichtlich der Behandlung der Monate mit 31 Tagen und des 28. und 29. Februars unterscheiden (siehe Tabelle A.1).

Bezeichnung	d_1^* für $d_1 = 31$	d_2^* für $d_2 = 31$ und $d_1 < 30$ | $d_1 \geq 30$	d_1^* für $(d_1, m_1, y_1)^+ =$ $(1, 3, y_1)$ [1] | $(29, 2, y_1)$ [2]	d_2^* für $(d_2, m_2, y_2)^+ =$ $(1, 3, y_2)$ | $(29, 2, y_2)$
30/360 [3]	d_1	d_2	d_1	d_2
30E/360 Eurobond	30	30	d_1	d_2
30E+/360	30	d_2 [4]	d_1	d_2
30E/360 Italian	30	30	30	30
30E/360 ISDA Typ I [5]	30	30	30 | d_1	30
30E/360 ISDA Typ II	30	30	30 | d_1	d_2
30U/360 US Typ I	30	d_2 | 30	d_1	d_2
30U/360 US Typ II	30	d_2 | 30	30 | d_1	30* | d_2

* falls zusätzlich noch $(d_1, m_1, y_1)^+ = (1, 3, y_1)$ gilt, ansonsten $d_2^* = d_2$

Tabelle A.1: Übersicht über gebräuchliche 30/360-Methoden (die Verwendung der Bezeichnungen erfolgt nicht einheitlich)

Definition A.3 *Eine* ***30/360-Methode*** $\delta : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R}_{0+}$ *ist eine Zinsberechnungsmethode der Form*

$$\delta\Big((d_1, m_1, y_1), (d_2, m_2, y_2)\Big) \ := \ y_2 - y_1 \ + \ \frac{m_2 - m_1}{12} \ + \ \frac{d_2^* - d_1^*}{360},$$

$\Big((d_1, m_1, y_1), (d_2, m_2, y_2)\Big) \in \mathbb{D}_2$, *wobei*

$$d_1^* \ := \ d_1^*(d_1, m_1, y_1) \ \in \ \{1, \ldots, 31\} \qquad \textit{und}$$

[1] Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass (d_1, m_1, y_1) der letzte Februartag ist, d.h. $d_1 = 29$ für ein Schaltjahr, ansonsten $d_1 = 28$.

[2] Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, dass (d_1, m_1, y_1) der 28. Februar in einem Schaltjahr ist, d.h. der vorletzte Februartag.

[3] auch bekannt als „deutsche kaufmännische Zinsmethode“

[4] Dies ist gleichbedeutend mit der Ersetzung durch den folgenden Monatsersten, wie in manchen Beschreibungen angegeben.

[5] ISDA – „International Swaps and Derivatives Association Inc.“

$$d_2^* \;:=\; d_2^*\Big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\Big) \;\in\; \{1,\dots,31\}$$

folgende Eigenschaften besitzen:

$$\begin{aligned} d_1^* &:= d_1 \quad \textit{für} \quad (d_1<31) \;\wedge\; \Big((d_1,m_1)\notin\{28,29\}\times\{2\}\Big) \qquad \textit{und}\\ d_2^* &:= d_2 \quad \textit{für} \quad \Big(d_2<31\Big) \;\wedge\; \Big((d_2,m_2)\notin\{28,29\}\times\{2\}\Big) \end{aligned}$$

Übungsaufgaben:

1. Finden Sie Beispiele, bei denen obige 30/360-Zinsberechnungsmethoden zu unterschiedlichen Ergebnissen führen.

2. Untersuchen Sie, welche der obigen 30/360-Methoden die Eigenschaft (A.1) besitzen und welche nicht.

A.1.2 Actual-Methoden

- Actual-Methoden basieren auf taggenauen Berechnungen von Datumsdifferenzen.

- Es gibt mehrere Varianten von Actual-Methoden, die sich u.a. hinsichtlich der Bezugsgröße (Kalendertage pro Jahr) unterscheiden (siehe Tabelle A.2).

- Bei einigen Actual-Methoden (z.B. „Act/365L“ und „Act/Act ICMA“) treten als Zusatzparameter noch die Anzahl der jährlichen Zahlungstermine $f \in \{1,2,3,4,6,12\}$ eines Referenzprodukts (*coupon frequency*, im Folgenden auch *Anzahl von Referenzzahlungen* genannt) sowie ein ausgewähltes Datum $(d,m,y) \in \mathbb{D}$ für diese Zahlungen (*coupon payment date*, im Folgenden auch *Referenzdatum* genannt) auf [6]. $f=1$ entspricht dabei einer jährlichen Zahlung, $f=2$ einer halbjährlichen, $f=4$ einer vierteljährlichen usw.. Der zeitliche Abstand in Monaten zwischen den entsprechenden Referenzzahlungen ist dann $\frac{12}{f}$.

Zunächst wird eine Funktion benötigt, die die Differenz (in Tagen) zwischen zwei Daten angibt:

Definition A.4 *Die Funktion* $\Delta : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{N}\cup\{0\}$, *definiert durch*

$$\begin{aligned} \Delta\left((1,1,1),(1,1,1)\right) &:= 0,\\ \Delta\left((1,1,1),(d,m,y)\right) &:= 1+\Delta\Big((1,1,1),(d,m,y)^-\Big),\ (d,m,y)\succ(1,1,1), \quad \textit{und}\\ \Delta\left((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\right) &:= \Delta\left((1,1,1),(d_2,m_2,y_2)\right)-\Delta\left((1,1,1),(d_1,m_1,y_1)\right),\\ &\quad\; (d_2,m_2,y_2)\succeq(d_1,m_1,y_1)\succ(1,1,1), \end{aligned}$$

heißt ***Tageszähler*** *(day counter).*

[6] Dies ist insbesondere wegen des Monatstages von Interesse.

Bemerkungen:

1. Der Wert des Tageszählers kann direkt über die Formel

$$\begin{aligned}
&\Delta\big((1,1,1),(d,m,y)\big)\\
=\ & d+\left\lfloor\frac{153\cdot\tilde m-2}{5}\right\rfloor+365\cdot\tilde y+\left\lfloor\frac{\tilde y}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\tilde y}{100}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\tilde y}{400}\right\rfloor-398,^{7}
\end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\text{mit}\quad (\tilde m,\tilde y):=\begin{cases}(m+12,y-1) & \text{für } m=1,2\\ (m,y) & \text{sonst.}\end{cases}$$

bestimmt werden. Diese Formel basiert auf der Gauß'schen Wochentagsformel und ihrer Modifikation durch Zeller 1882 (auch bekannt als „Zellers Kongruenz"). [8]

Für allgemeine Daten $(d_2,m_2,y_2)\succeq(d_1,m_1,y_1)$ erhält man (mit analogen Bezeichnungen $\tilde m_1$, $\tilde m_2$, $\tilde y_1$ und $\tilde y_2$ anstatt m_1, m_2, y_1 and y_2 gemäß (A.2))

$$\begin{aligned}
&\Delta\big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\big)\\
=\ &(d_2-d_1)+\left\lfloor\frac{153\cdot\tilde m_2-2}{5}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{153\cdot\tilde m_1-2}{5}\right\rfloor+\\
&+365\cdot(\tilde y_2-\tilde y_1)+\left\lfloor\frac{\tilde y_2}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\tilde y_1}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\tilde y_2}{100}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\tilde y_1}{100}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{\tilde y_2}{400}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{\tilde y_1}{400}\right\rfloor
\end{aligned}$$

2. Die umgekehrte Aufgabenstellung, d.h., das Ermitteln eines Datums $(d,m,y)\in\mathbb{D}$ anhand eines gegebenen Werts des Tageszählers $\Delta\big((1,1,1),(d,m,y)\big)$, wird in Abschnitt A.1.5 beschrieben.

Definition A.5 *Eine **Actual-Methode** $\delta_{f,(d,m,y)}:\mathbb{D}_2\to\mathbb{R}_{0+}$ mit den Parametern $f\in\{1,\,2,\,3,\,4,\,6,\,12\}$ (coupon frequency) und $(d,m,y)\in\mathbb{D}$ (coupon payment date) ist eine Zinsberechnungsmethode der Form*

$$\begin{aligned}
&\delta_{f,(d,m,y)}\Big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\Big)\ :=\\
&\frac{\Delta\Big((d_1,m_1,y_1),(\tilde d_1,\tilde m_1,\tilde y_1)\Big)}{n_1}+\tilde\delta\Big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\Big)+\frac{\Delta\Big((\tilde d_2,\tilde m_2,\tilde y_2),(d_2,m_2,y_2)\Big)}{n_2},
\end{aligned}$$

[8]Siehe Abschnitt A.1.4 für Einzelheiten. Hierbei ist zu beachten, dass sämtliche Formeln (und Wochentagsberechnungen) gemäß dem Gregorianischen Kalender erfolgen, der frühestens am 15. Oktober 1582 eingeführt wurde (auf Donnerstag, dem 4. Oktober 1582, folgte Freitag, der 15. Oktober 1582).

[8]„$\lfloor.\rfloor$" ist die sogenannte Entier- oder Gaußfunktion und bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich dem Ausdruck in der Klammer ist („Runden Richtung $-\infty$"). Beispielsweise ist $\lfloor-0.1\rfloor=-1$.

$\Big((d_1, m_1, y_1), (d_2, m_2, y_2)\Big) \in \mathbb{D}_2$, *mit*

$$(d_1, m_1, y_1) \preceq (\tilde{d}_1, \tilde{m}_1, \tilde{y}_1) \preceq (\tilde{d}_2, \tilde{m}_2, \tilde{y}_2) \preceq (d_2, m_2, y_2),$$

$$n_1, n_2 \in \{336, \ldots, 372\} \qquad \textit{und}$$

$$12 \cdot \tilde{\delta} \in \Big\{0, 1, \ldots, (y_2 - y_1) \cdot 12 + (m_2 - m_1) + 1\Big\}.$$

Die Ausdrücke $(\tilde{d}_1, \tilde{m}_1, \tilde{y}_1)$, $(\tilde{d}_2, \tilde{m}_2, \tilde{y}_2)$, n_1, n_2 *sowie* $\tilde{\delta}$ *können dabei sowohl von* (d_1, m_1, y_1) *und* (d_2, m_2, y_2) *als auch von den Parametern* f *und* (d, m, y) *abhängen.*

Bemerkungen:

1. Die Ausdrücke n_1 und n_2 in obiger Definition stellen inhaltlich mögliche „formale" Tage pro Jahr dar. Dass hierbei nicht nur die Werte 365 und 366 auftreten, hängt damit zusammen, dass bei manchen Berechnungsmethoden (z.B. „Act/Act ICMA") diese „formalen" Tage pro Jahr als (tatsächliche) Tage pro Berechnungseinheit (Halbjahr, Vierteljahr, Monat) multipliziert mit der Anzahl der Berechnungseinheiten pro Jahr (der *coupon frequency*, also $1, 2, 3, 4, 6$ oder 12) berechnet werden. Als „Extremwerte" ergeben sich $12 \cdot 28 = 336$ bzw. $12 \cdot 31 = 372$.

2. $12 \cdot \tilde{\delta}$ gibt in manchen Actual-Methoden die Anzahl der *ganzen* Monate an, die im betrachteten Zeitraum von (d_1, m_1, y_1) bis (d_2, m_2, y_2) enthalten sind. Diese kann eine durch (d_1, m_1, y_1) und (d_2, m_2, y_2) vorgegebene Obergrenze nicht überschreiten.

3. Der Darstellung einer Actual-Methode als Summe dreier Summanden liegt die Tatsache zugrunde, dass sich sämtliche praxisrelevante Actual-Methoden in einen zeitlichen „Anfangs-", „Mittel-" und „Schlussteil" aufspalten lassen, die sich von der rechnerischen Behandlung her unterscheiden können. Die Daten $(\tilde{d}_1, \tilde{m}_1, \tilde{y}_1)$ bzw. $(\tilde{d}_2, \tilde{m}_2, \tilde{y}_2)$ geben dabei das zeitliche Ende des Anfangsteils bzw. den zeitlichen Beginn des Schlussteils an.

Für die Angabe konkreter praxisrelevanter Actual-Methoden sind folgende Bezeichnungen hilfreich:

Definition A.6 *Die* ***tatsächliche Anzahl Tage im Jahr*** $y \in \mathbb{N}$ *werde mit*

$$\Delta_y := \Delta\Big((1, 1, y), (1, 1, y + 1)\Big)$$

bezeichnet.

Bemerkung: Es gilt $\Delta_y = 366$, falls y ein Schaltjahr (*leap year*) ist, ansonsten $\Delta_y = 365$.

Da im Folgenden auch Daten eine Rolle spielen, die gegenüber einem Referenzdatum um ganze Monate verschoben sind (um beispielsweise Daten für weitere Referenzzahlungszeitpunkte zu ermitteln), wird eine entsprechend geeignete Notation eingeführt:

Definition A.7 *Ein* ***um*** k ***Monate,*** $k \in \mathbb{Z}$, ***verschobenes Datum*** *werde mit*

$$(d, m, y)^{(k)} := \Big(d^{(k)}, m^{(k)}, y^{(k)}\Big) \in \mathbb{D}, \quad k > -\Big(m + (y-1) \cdot 12\Big),$$

bezeichnet. Dabei ist

$$\begin{aligned} y^{(k)} &:= y + \left\lfloor \frac{m+k-1}{12} \right\rfloor, \\ m^{(k)} &:= \Big((m+k-1) \mod 12\Big) + 1,^{9} \\ d^{(k)} &:= \begin{cases} 28 & \textit{für } (m^{(k)} = 2) \wedge \Big(d \in \{29, 30, 31\}\Big) \wedge (\Delta_{y^{(k)}} = 365) \\ 29 & \textit{für } (m^{(k)} = 2) \wedge \Big(d \in \{30, 31\}\Big) \wedge (\Delta_{y^{(k)}} = 366) \\ 30 & \textit{für } (d = 31) \wedge \Big(m^{(k)} \in \{4, 6, 9, 11\}\Big) \\ d & \textit{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung: Bezeichnet d einen Tag, der für manche Monate nicht existiert (z.B. für manche Fälle mit $d \in \{29, 30, 31\}$), so liefert $(d, m, y)^{(k)}$ in diesem Fall den letzten Tag des betreffenden Monats, z.B. $(30, 3, 2009)^{(-1)} = (28, 2, 2009)$.

Wie in den Bemerkungen zu Definition A.5 bereits angesprochen, kann sich „formal“ die Anzahl von Tagen im Jahr auch auf einen Referenzzeitraum (Halbjahr, Vierteljahr, Monat) beziehen und entsprechend auf das Jahr „hochgerechnet“ werden. Eine entsprechend modifizierte Anzahl von Tagen im Jahr wird durch folgende Definition bereitgestellt.

Definition A.8 *Die* ***auf eine Anzahl*** f ***von Referenzzahlungen pro Jahr und auf ein Referenz(end)datum*** $(d, m, y) \succeq (1, 1, 1)^{(\frac{12}{f})}, (d, m, y) \in \mathbb{D}$, ***bezogene Anzahl Tage im Jahr*** y *werde mit*

$$\Delta_{f,(d,m,y)} := f \cdot \Delta\Big((d, m, y)^{(-\frac{12}{f})}, (d, m, y)\Big)$$

bezeichnet.

Bemerkungen:

1. Für $y \in \mathbb{N}$ gilt $\Delta_y = \Delta_{1,(1,1,y+1)}$.
2. Für eine gegebene Anzahl f von Referenzzahlungen und ein gegebenes Referenzdatum $(d, m, y) \succeq (d, m, y)^{(\frac{12}{f})}$ heißt der Zeitraum $(d, m, y)^{(-\frac{12}{f})}$, $\Big((d, m, y)^{(-\frac{12}{f})}\Big)^{+}$, $\ldots$, (d, m, y) *Referenzperiode.*

[9] „$a \mod b$“ gibt den ganzzahligen Rest der Division a/b zweier ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, an. Es gilt $a = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b + a \mod b$. Für ein positives b gilt stets $a \mod b \geq 0$. Beispielsweise ist $-1 \mod 12 = 11$, da $(-1) \cdot 12 + 11 = -1$ ist.

Übungsaufgabe: Bestimmen Sie, welche Werte $\Delta_{f,(d,m,y)}$ für $f \in \{1,2,3,4,6,12\}$ und $(d,m,y) \in \mathbb{D}$ annehmen kann.

Bezeichnung	$(\tilde{d}_1, \tilde{m}_1, \tilde{y}_1)$	n_1	$(\tilde{d}_2, \tilde{m}_2, \tilde{y}_2)$	n_2	$\tilde{\delta}$
Act/360	(d_2, m_2, y_2)	360	– [10]	– [11]	– [12]
Act/365	(d_2, m_2, y_2)	365	–	–	–
Act/365L	(d_2, m_2, y_2)	365 bzw. 366 [13]	–	–	–
Act/Act ISDA [14]	$\min\Big((1,1,y_1+1), (d_2,m_2,y_2)\Big)$	Δ_{y_1}	(d_2,m_2,y_2) für $y_1 = y_2$, $(1,1,y_2)$ sonst	Δ_{y_2}	$\max(0, y_2 - y_1 - 1)$
Act/Act AFB [15]	$\tilde{y}_1 := y_1$ bzw. $y_1 + 1$ [16], $\tilde{m}_1 := m_2$, $\tilde{d}_1 := d_2$ bzw. 29 [17]	365 bzw. 366 [18]	–	–	$y_2 - \tilde{y}_1$
Act/Act ICMA [19]	$(d,m,y)^{(k_1)}$ [20]	$\Delta_{f,(\tilde{d}_1,\tilde{m}_1,\tilde{y}_1)}$	$(d,m,y)^{(k_2)}$ [20]	$\Delta_{f,(\tilde{d}_2,\tilde{m}_2,\tilde{y}_2)^{(\frac{12}{f})}}$	$\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 + \frac{\tilde{m}_2 - \tilde{m}_1}{12}$

Tabelle A.2: Übersicht über gebräuchliche Actual-Methoden

Übungsaufgaben:

1. Untersuchen Sie, welche Actual-Methoden unter welchen Bedingungen dieselben Ergebnisse erzeugen (betrachten Sie in diesem Zusammenhang insbesondere „Act/Act ICMA“ für $f = 1$).
2. Untersuchen Sie, welche Actual-Methoden die Eigenschaft (A.1) besitzen und welche nicht.
3. Untersuchen Sie anhand eines geeigneten Beispiels, inwieweit das Ergebnis der Methode „Act/Act ICMA“ von der Wahl der Parameter f und (d,m,y) abhängt.
4. Veranschaulichen Sie anhand geeigneter Beispiele die Unterschiede zwischen den drei „Act/Act“-Methoden für $f = 1$ und $f = 2$.

A.1.3 Business-252-Methoden

- Bei Business-252-Methoden werden ausschließlich die Arbeitstage innerhalb eines Zeitraums auf eine (feste) Anzahl von üblicherweise 252 Arbeitstagen bezogen.
- Arbeitstage sind Tage, die keine Wochenendtage oder Feiertage sind. Welche diese genau sind, unterscheidet sich von Land zu Land (teilweise sogar von Region zu Region).
- Business-252-Methoden unterscheiden sich auch noch hinsichtlich der Behandlung des End-

[10] In diesem Fall wird formal $(\tilde{d}_2, \tilde{m}_2, \tilde{y}_2) = (d_2, m_2, y_2)$ gesetzt, da dann $\Delta\Big((\tilde{d}_2, \tilde{m}_2, \tilde{y}_2), (d_2, m_2, y_2)\Big) = 0$ gilt.

[11] Wenn $\Delta\Big((\tilde{d}_2, \tilde{m}_2, \tilde{y}_2), (d_2, m_2, y_2)\Big) = 0$ ist, kann n_2 beliebig gewählt werden.

[12] entspricht $\tilde{\delta} \equiv 0$

[13] Hier ist die Anzahl der Zahlungstermine f und das Referenzdatum (d, m, y) von Bedeutung (für letzteres sollte sinnvollerweise $(d, m, y) \succeq (d_2, m_2, y_2)$ gelten):

$$n_1 := \begin{cases} 366 & \text{für} \quad \Bigg((f=1) \ \wedge \ \Bigg(\Big\{(d_1, m_1, y_1)^+, \ldots, (d, m, y)\Big\} \cap \bigcup_{\tilde{y}=y_1}^{y} \Big\{(29, 2, \tilde{y})\Big\} \ \neq \ \emptyset\Bigg)\Bigg) \\ & \qquad \vee \ \Bigg((f > 1) \ \wedge \ \Big((1, 3, y)^- = (29, 2, y)\Big)\Bigg) \\ 365 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Zahl 366 wird somit als Nenner gewählt, wenn im Fall $f = 1$ (Referenzzahlung erfolgt jährlich) ein 29. Februar im Datumsbereich zwischen dem Anfangsdatum (d_1, m_1, y_1) und dem Referenzdatum (d, m, y) enthalten ist. Im Fall $f > 1$ (Referenzzahlungen erfolgen mehrmals jährlich) wird die Zahl 366 als Nenner gewählt, wenn das Jahr y des Referenzdatums (d, m, y) ein Schaltjahr ist.

[14] Zugrundeliegende Regel: Tage in Schaltjahren werden durch 366 dividiert, andere Tage durch 365.

[15] AFB – „Association Française de Banques"

Zugrundeliegende Regel: Vollständige Jahre zwischen Anfangs- und Enddatum werden – beginnend von hinten mit dem Enddatum – „herausgeschnitten". Endet dann der verbleibende restliche Zeitraum (ausgehend vom Anfangsdatum) auf dem 28. Februar eines Schaltjahres, wird stattdessen der 29. Februar gesetzt.

[16] $$\tilde{y}_1 := \begin{cases} y_1 & \text{für } (m_2 > m_1) \ \vee \ \big((m_2 = m_1) \wedge (d_2 \geq d_1)\big) \\ y_1 + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

[17] $$\tilde{d}_1 := \begin{cases} 29 & \text{für } (y_2 > \tilde{y}_1) \ \wedge \ \Big((d_2, m_2, \tilde{y}_1)^+ = (29, 2, \tilde{y}_1)\Big) \\ d_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

[18] $$n_1 := \begin{cases} 366 & \text{für } \Big\{(d_1, m_1, y_1)^+, \ldots, (\tilde{d}_1, \tilde{m}_1, \tilde{y}_1)\Big\} \cap \Bigg(\Big\{(29, 2, y_1)\Big\} \cup \Big\{(29, 2, \tilde{y}_1)\Big\}\Bigg) \ \neq \ \emptyset \\ 365 & \text{sonst} \end{cases}$$

Regel: Falls die zusammengefügten Tage von Anfangs- und Endjahr einen 29. Februar enthalten, werden 366 Tage genommen, ansonsten 365 Tage.

[19] ICMA – „International Capital Market Association"

Auch hier ist die Anzahl der Zahlungstermine f und das Referenzdatum (d, m, y) von Bedeutung: Zunächst wird das erste (ggf. verschobene) Referenzdatum $(d, m, y)^{(k_1)}$ ermittelt, das nicht vor dem Anfangsdatum (d_1, m_1, y_1) liegt, dann das letzte Referenzdatum $(d, m, y)^{(k_2)}$, das nicht hinter dem Enddatum (d_2, m_2, y_2) liegt. Zwischen beiden Daten wird mit ganzen Monaten gerechnet. Im Anfangsbereich (d.h. bis $(d, m, y)^{(k_1)}$) wird mit der aus der jeweiligen Referenzperiode abgeleiteten Anzahl an Jahrestagen gewichtet (siehe Definition A.8), analog für den Endbereich (d.h. ab $(d, m, y)^{(k_2)}$). Dabei wird der erste Tag jeder Periode mitgezählt, der letzte nicht.

[20] $k_1 := \frac{12}{f} \cdot \min\Big\{k \in \mathbb{Z} \mid (d, m, y)^{(k \cdot \frac{12}{f})} \succeq (d_1, m_1, y_1)\Big\}$, $k_2 := \frac{12}{f} \cdot \max\Big\{k \in \mathbb{Z} \mid (d, m, y)^{(k \cdot \frac{12}{f})} \preceq (d_2, m_2, y_2)\Big\}$

datums bzw. des Zahltags (*payment date*) in Abhängigkeit davon, ob das Enddatum ein Arbeitstag ist oder nicht (die entsprechenden Regeln heißen **Date-Rolling-Conventions**):

- *Actual*: Der Zahltag bleibt unverändert.
- *Following*: Ist das Enddatum kein Arbeitstag, so wird der Zahltag auf den nächsten Arbeitstag verschoben.
- *Previous*: Ist das Enddatum kein Arbeitstag, so wird der Zahltag auf den vorangegangenen Arbeitstag verschoben.
- *Modified Following:* Wie *Following*, außer wenn der Zahltag (gegenüber dem Enddatum) im nächsten Monat liegt. In diesem Fall wird dann wie bei *Previous* verfahren.
- *Modified Previous:* Wie *Previous*, außer wenn der Zahltag (gegenüber dem Enddatum) im vorangegangenen Monat liegt. In diesem Fall wird dann wie bei *Following* verfahren.

Definition: Ein **Wochentags-Indikator** ist eine Funktion $w : \mathbb{D} \to \{0, \ldots, 6\}$ mit

$$w\left((d,m,y)\right) \;=\; \left(w\left((d,m,y)^-\right) + 1\right) \mod 7 \quad \text{für alle} \quad (d,m,y) \succ (1,1,1)$$

und

$$w\left((d,m,y)\right) \;=\; \left(w\left((d,m,y)^+\right) - 1\right) \mod 7 \quad \text{für alle} \quad (d,m,y) \succeq (1,1,1).$$

Bemerkungen:

1. Ist genau ein Wert des Wochentags-Indikators fixiert (z.B. $w\left((24,12,2009)\right) = 5$), dann lassen sich definitionsgemäß auch alle anderen Werte des Wochentags-Indikator ableiten, da sich die Folge $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 0,\ 1, \ldots$ von Funktionswerten des Wochentags-Indikators unendlich wiederholt.

2. Die Zuordnung der tatsächlichen Wochentagsnamen zu den Funktionswerten des Wochentags-Indikators ist nicht festgelegt, d.h., in Abhängigkeit des konkreten Wochentags-Indikators kann der Wert 0 beispielsweise sowohl für einen Sonntag als auch für jeden anderen Wochentag stehen.

3. Eine allgemein übliche Regel zur Bestimmung des Wochentags lässt sich aus Zellers Kongruenz ableiten (siehe Formel (A.2) bei den Bemerkungen zur Definition A.4 des Tageszählers). Der dazugehörige Wochentags-Indikator w_Z ist bestimmt durch

$$w_Z\left((d,m,y)\right) \;:=\; \left(d + \left\lfloor \frac{13 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor + \tilde{y} + \left\lfloor \frac{\tilde{y}}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\tilde{y}}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\tilde{y}}{400} \right\rfloor\right) \mod 7$$

$$\text{mit} \quad (\tilde{m}, \tilde{y}) \;:=\; \begin{cases} (m+12, y-1) & \text{für } m = 1,2 \\ (m,y) & \text{sonst} \end{cases}$$

für $(d, m, y) \in \mathbb{D}$. [21] Die Zuordnung zu den tatsächlichen Wochentagen geschieht dann gemäß

w_Z	0	1	2	3	4	5	6
Wochentag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag	Montag

Beispiel: Der 24. Dezember 2009 ist ein Donnerstag, da

$$\begin{aligned} & w_Z\left((24, 12, 2009)\right) \\ = \; & \left(24 + \left\lfloor \frac{154}{5} \right\rfloor + 2009 + \left\lfloor \frac{2009}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2009}{100} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2009}{400} \right\rfloor\right) \mod 7 \\ = \; & (24 + 30 + 2009 + 502 - 20 + 5) \mod 7 \;=\; 2550 \mod 7 \;=\; 2. \end{aligned}$$

Definition: Ein **Arbeitstag-Indikator** ist eine Funktion $b : \mathbb{D} \to \{0, 1\}$.

Bemerkungen:

1. Der Wert „1“ eines Arbeitstag-Indikators steht für einen Arbeitstag, der Wert „0“ für einen Wochenendstag oder einen Feiertag.

2. Ein einfacher Arbeitstag-Indikator wäre

$$b_{\{a,b\}}\left((d, m, y)\right) \;:=\; 1 - \mathbb{1}_{\{a,b\}}\Big(w_Z\left((d, m, y)\right)\Big) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } w_Z\left((d, m, y)\right) \in \{a, b\} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

   mit $a, b \in \{0, \ldots, 6\}$ und $a \neq b$, was gleichbedeutend ist mit einem „Nicht-Wochenende-Indikator“. Ist speziell $a = 4$ und $b = 5$, sind alle Tage außer Samstag und Sonntag Arbeitstage.

3. Die Konventionen für Nicht-Arbeitstage (auch für Wochenenden – beispielsweise in islamischen Ländern, in denen oft Freitag ein Feiertag ist) sind von Land zu Land verschieden (in Indien ist beispielsweise der Samstag ein normaler Arbeitstag – für eine globale Übersicht siehe `http://en.wikipedia.org/wiki/Workweek_and_weekend`). Demnach gibt es länderspezifische Arbeitstag-Indikatoren wie z.B. b_{USA}, b_{UK}, b_{PL}, b_{CH}, b_{A}, $b_{\mathsf{D}}, \ldots$ (siehe Tabelle A.3).

---

[21] Da lediglich der Wochentag und nicht die Anzahl an Tagen von Interesse ist, tritt hier im Unterschied zu Zellers Kongruenz lediglich der Summand $\tilde{y}$ anstatt $365 \cdot \tilde{y}$ auf, denn $(365 \cdot \tilde{y}) \mod 7 = (364 \cdot \tilde{y} + \tilde{y}) \mod 7 = \tilde{y} \mod 7$. Außerdem kann $\left\lfloor \frac{13 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor$ anstatt $\left\lfloor \frac{153 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor$ verwendet werden, da $\left\lfloor \frac{153 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor = 28 \cdot \tilde{m} + \left\lfloor \frac{13 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor$ und $(28 \cdot \tilde{m}) \mod 7 = 0$.

Bemerkung: In der Original-Version von Zellers Kongruenz wird $\left\lfloor \frac{13 \cdot (\tilde{m}+1)}{5} \right\rfloor$ anstatt $\left\lfloor \frac{13 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor$ verwendet. Wegen $\frac{13 \cdot (\tilde{m}+1)}{5} = \frac{13 \cdot \tilde{m} + 13}{5} = \frac{13 \cdot \tilde{m} - 2}{5} + 3$ bezeichnet „3“ den Dienstag, d.h. „0“ ist ein Samstag. In der Variante von Gauß tritt der Ausdruck $\left\lfloor \frac{13 \cdot (\tilde{m}-2) - 1}{5} \right\rfloor$ auf. Wegen $\frac{13 \cdot (\tilde{m}-2) - 1}{5} = \frac{13 \cdot \tilde{m} - 27}{5} = \frac{13 \cdot \tilde{m} - 2}{5} - 5$ bezeichnet dann „0“ den Sonntag.

4. Für einen effizienten und einfach zu implementierenden Algorithmus zur Bestimmung von länderspezifischen Feiertagen ist es vorteilhaft, die entsprechenden Daten für jedes Land jahresweise in Tabellenform abzuspeichern. Zur automatischen Berechnung der Feiertage ist insbesondere der Termin des Ostersonntags von Interesse, für dessen Bestimmung es Algorithmen gibt[22].

Tabelle A.3: Feiertagsübersicht für einige ausgewählte Länder

Name	Datum	USA	UK	PL	CH	A	D
Wochenende	Sa/So	X	X	X	X	X	X
Neujahr (*New Year's Day*)	Jan 1	X$^{(\pm)}$	X^{+}	X	X	X	X
Berchtoldstag	Jan 2				X		
Epiphanias (*Epiphany*)	Jan 6					X	(X)
Martin Luther King's Birthday	3. Mo im Jan	X					
Presidents' Day	3. Mo im Feb	X					
Josefstag	Mar 19					(X)	
Karfreitag (*Good Friday*)	OS -2		X		X	(X)	X
Ostermontag (*Easter Monday*)	OS $+1$		X	X	X	X	X
Christi Himmelfahrt (*Ascension Thursday*)	OS $+39$				X	X	X^{F}
Pfingstmontag (*Whit Monday*)	OS $+50$				X	X	X^{F}
Fronleichnam (*Corpus Christi*)	OS $+60$			X		X	(X)
Tag der Arbeit (*Labour Day*)	Mai 1			X	X	X	X
Florianstag	Mai 4					(X)	
Early May Bank	1. Mo im Mai		X				

[22] Es ist allerdings zu beachten, dass sich der Ostertermin im westeuropäischen Bereich von dem im osteuropäischen Bereich unterscheiden kann, da in Westeuropa (in katholischer Tradition) der „übliche“ gregorianische Kalender zur Bestimmung des Ostertermins verwendet wird, in Osteuropa (in orthodoxer Tradition) jedoch der julianische Kalender.

Name	Datum	USA	UK	PL	CH	A	D
Memorial Day / Spring Bank	letzter Mo im Mai	X	X				
Mariä Himmelfahrt (*Assumption of Mary*)	Aug 15			X			(X)
Summer Bank	letzter Mo im Aug		X				
US Labor Day	1. Mo im Sep	X					
Rupertstag	Sep 24					(X)	
Kärntner Volkabstimmung (*Carinthian Plebiscite*)	Okt 10					(X)	
Columbus Day	2. Mo im Okt	X^{N}					
Reformationstag (*Reformation Day*)	Okt 31						(X)
Allerheiligen (*All Saints*)	Nov 1			X		X	(X)
Veteran's Day / Martinstag	Nov 11	X$^{\pm N}$				(X)	
Leopoldstag	Nov 15					(X)	
Buß- und Bettag (*Repentance Day*)	Mi vor Nov 23						(X)
Thanksgiving	4. Do im Nov	X					
Mariä Empfängnis (*Immaculate Conception*)	Dez 8					X	
Heiligabend (*Christmas Eve*)	Dez 24					X	(X)$^{(F)}$
1. Weihnachtstag (*Christmas*)	Dez 25	X$^{\pm}$	X^{+}	X	X	X	X
2. Weihnachtstag (*Boxing Day*)	Dez 26		X‡	X	X	X	X
Silvester (*New Year's Eve*)	Dez 31					X	(X)$^{(F)}$
Nationalfeiertag(e)		Jul 4$^{\pm}$		Mai 3 Nov 11	Aug 1	Okt 26	Okt 3^{F}

OS – (Westeuropäischer) Ostersonntag

$^{\pm}$ Fällt der Feiertag auf einen Samstag, ist der Freitag davor arbeitsfrei, fällt der Feiertag auf einen Sonntag, ist der darauffolgende Montag arbeitsfrei.

$^{(\pm)}$ Wie $^{\pm}$, aber keine Verschiebung des freien Tages an der New York Stock Exchange

$^+$ Fällt der Feiertag auf einen Samstag oder Sonntag, ist der darauffolgende Montag arbeitsfrei.
‡ Fällt der Feiertag auf einen Samstag, ist der darauffolgende Montag arbeitsfrei, fällt der Feiertag auf einen Sonntag oder Montag, ist der darauffolgende Dienstag arbeitsfrei.
(X) Regionaler Feiertag
^{N} Kein Feiertag an der New York Stock Exchange
^{F} Kein Feiertag an der Frankfurter Börse
$^{(F)}$ Freier Tag an der Frankfurter Börse

Definition: Ein **Arbeitstagzähler** ist eine Funktion $\Delta_b : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, wobei b ein Arbeitstag-Indikator ist, mit

$$\Delta_b\left((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\right) := \sum_{(d,m,y)=(d_1,m_1,y_1)}^{(d_2,m_2,y_2)} b\left((d,m,y)\right), \quad \left((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\right) \in \mathbb{D}_2.$$

Bemerkungen:

1. Sowohl der erste Tag (d_1,m_1,y_1) als auch der letzte Tag (d_2,m_2,y_2) werden von einem Arbeitstagzähler Δ_b mit berücksichtigt, falls beide Tage Arbeitstage sind. Sind beispielsweise sowohl (d_1,m_1,y_1) als auch $(d_1,m_1,y_1)^+$ Arbeitstage, so ergibt sich

   $$\Delta_b\Big((d_1,m_1,y_1),(d_1,m_1,y_1)^+\Big) \;=\; 2.$$

   Im Gegensatz dazu würde der Tageszähler Δ folgendes Ergebnis liefern:

   $$\Delta\Big((d_1,m_1,y_1),(d_1,m_1,y_1)^+\Big) \;=\; 1.$$

2. Die Anzahl an Nicht-Wochenende-Tagen zwischen zwei Daten $\big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\big) \in \mathbb{D}_2$ kann mit Hilfe von Zellers Wochentags-Indikator w_Z, dem dazugehörigen Nicht-Wochenende-Indikator $b_{\{a,b\}}$ $(a,b \in \{0,\ldots,6\}$ und $a \neq b)$ und dem Tageszähler Δ unter Verwendung der Formel

   $$\begin{aligned} &\Delta_{b_{\{a,b\}}}\left((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\right) \\ = &\left\lfloor \frac{\Delta\left((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\right)+1}{7} \right\rfloor \times 5 + \\ + &\sum_{w=w_Z\big((d_1,m_1,y_1)\big)+1}^{w_Z\big((d_1,m_1,y_1)\big)+\Big[\Big(\Delta\big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\big)+1\Big) \mod 7\Big]} 1-\mathbb{1}_{\{a,b\}}(w) \end{aligned}$$

   mit $\sum\limits_{w=w_Z\big((d_1,m_1,y_1)\big)+1}^{w_Z\big((d_1,m_1,y_1)\big)} \ldots = 0$ bestimmt werden.

Definition: Eine **Business-252-Methode** $\delta_b : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{R}_{0+}$ mit einem Arbeitstag-Indikator b ist eine Zinsberechnungsmethode der Gestalt

$$\delta_b\big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\big) \;:=\; \frac{\Delta_b\big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\big) - i^*\big((d_2,m_2,y_2)\big)}{252},$$

$\big((d_1,m_1,y_1),(d_2,m_2,y_2)\big) \in \mathbb{D}_2$, mit $i^* : \mathbb{D} \to \{0,1\}$.

Bemerkungen:

1. Anstatt des Nenners 252 kann auch ein geeigneter anderen Nenner verwendet werden: Da die durchschnittliche Anzahl an Nicht-Wochenende-Tagen etwa 261 ist ($\approx \frac{365.25}{7} \times 5$), wird die tatsächliche Anzahl an Arbeitstagen durch die Feiertage bestimmt: Im UK sind dies 8, in des USA 10 bzw. 8 oder 7 (New York Stock Exchange), in der Bundesrepublik Deutschland 9 (bundesweite Feiertage), weswegen der Nenner 252 für diese Länder angemessen ist. In anderen Ländern mit mehr Feiertagen ist der Nenner 250 möglicherweise geeigneter.

2. Die Funktion i^* hängt von der gewählten Date-Rolling-Convention ab (siehe Tabelle A.5).

Date-Rolling-Convention	$i^* = 0$	$i^* = 1$
Actual	$b\big((d_2,m_2,y_2)\big) = 0$	sonst
Following	$b\big((d_2,m_2,y_2)\big) = 0$	sonst
Previous	–	immer
Modified Following	$b\big((d_2,m_2,y_2)\big) = 0 \;\wedge\; m^+ = m_2$ mit $(d^+,m^+,y^+) :=$ $\min\Big\{(d,m,y) \succ (d_2,m_2,y_2) \mid b\big((d,m,y)\big) = 1\Big\}$ [23]	sonst
Modified Previous	$b\big((d_2,m_2,y_2)\big) = 0 \;\wedge\; m^- \neq m_2$ mit $(d^-,m^-,y^-) :=$ $\max\Big\{(d,m,y) \prec (d_2,m_2,y_2) \mid b\big((d,m,y)\big) = 1\Big\}$ [24]	sonst

Tabelle A.5: Beziehung zwischen der gewählten Date-Rolling-Convention der Funktion i^*

[23] (d^+,m^+,y^+) bezeichnet den ersten Arbeitstag *nach* (d_2,m_2,y_2). Ist dieser in demselben Monat wie (d_2,m_2,y_2), wird das Enddatum wie „Following" modifiziert, ansonsten wie „Previous".

[24] (d^-,m^-,y^-) bezeichnet den letzten Arbeitstag *vor* (d_2,m_2,y_2). If it is *not* in the same month (d_2,m_2,y_2), then it is treated as "Following", otherwise as "Previous".

A.1.4 Herleitung der Tageszählerformel

Das Verständnis von Formel (A.2) hängt von zwei entscheidenden Ideen ab: Zum einen wird angenommen, dass das Jahr mit dem Monat März beginnt und die Monate Januar und Februar die Monate Nummer 13 und 14 des Vorjahres sind. Dies hat den Vorteil, dass der von der Tagesanzahl her problematische Monat Februar der jeweils letzte Monat eines „Jahres“ ist und somit die Tageszählung eines mit März beginnenden „Jahres“ nicht beeinflusst. Zum anderen kann der Wechsel der Monate mit 30 oder 31 Tagen durch den Ausdruck

$$\left\lfloor \frac{3 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor .$$

beschrieben werden.
Bemerkung: Ebenso hätte auch der Ausdruck $\left\lfloor \frac{3\cdot(\tilde{m}+1)}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3\cdot\tilde{m}+3}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3\cdot\tilde{m}-2}{5} + 1 \right\rfloor$ verwendet werden können.

Für $\tilde{m} = 3, \ldots, 14$ (März bis Februar) ergibt sich

Monat	Mar	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez	Jan	Feb
$\tilde{m}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\left\lfloor \frac{3\cdot\tilde{m}-2}{5} \right\rfloor$	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	7	8
Differenz	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	

Die „Differenz“ gibt genau an, ob es sich um einen 30-Tage-Monat (bei einer Differenz von 0) oder um einen 31-Tage-Monat (bei einer Differenz von 1) handelt. Der Ausdruck $\left\lfloor \frac{3\cdot\tilde{m}-2}{5} \right\rfloor$ kann daher als kumulativer Tage-Offset im Vergleich mit Monaten mit gleicher Tagesanzahl 30 betrachtet werden: Die „5“ für Oktober gibt beispielsweise an, dass zwischen dem ersten März (einschließlich) und dem ersten Oktober (ausschließlich) nicht nur 7×30 Tage liegen, sondern $7 \times 30 + 5$ (für Oktober) $- 1$ (für März) Tage, da die vier Monate März, Mai, Juli und August jeweils 31 Tage haben. Der auftretende Faktor „$3/5$“ ist insbesondere deswegen zu diesem Zweck gut geeignet, weil der durchschnittliche monatliche Offset

$$7/11 \;\approx\; 6/10 \;=\; 3/5$$

beträgt (von den 11 Monaten März bis Januar haben 7 Monate 31 Tage).

Um nun die Gesamtanzahl der Tage eines mit März beginnenden „Jahres“ zu erhalten, sind lediglich noch ein Vielfaches von 30-Tages-Monaten zu addieren, d.h.

$$30 \cdot \tilde{m} + \left\lfloor \frac{3 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor 30 \cdot \tilde{m} + \frac{3 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor \;=\; \left\lfloor \frac{153 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor .$$

Daraus ergibt sich

Month	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec	Jan	Feb
$\tilde{m}$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\left\lfloor \frac{153\cdot\tilde{m}-2}{5} \right\rfloor$	91	122	152	183	213	244	275	305	336	366	397	428
difference	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	

Das Subtrahieren von 398 in der Tageszähler-Formel (A.2) dient lediglich dazu, $\Delta\big((1,1,1), (1,1,1)\big) = 0$ zu erhalten.[25]

A.1.5 Berechnung des Datums aus einer gegebenen Tageszahl

Die Problemstellung hier besteht darin, ein Datum $(d,m,y) \in \mathbb{D}$ anhand einer gegebenen Tageszahl $\Delta\big((1,1,1),(d,m,y)\big)$ gemäß (A.2) zu bestimmen. Die Tageszahl wird im Folgenden kurz mit Δ bezeichnet. Um die Problematik der Schaltjahre in den Griff zu bekommen, wird analog zu den Betrachtungen in Abschnitt A.1.4 davon ausgegangen, dass jedes „Jahr“ mit dem 1. März beginnt und mit dem 28. oder 29. Februar endet. Zu diesem Zweck wird das Startdatum des Tageszählers von 1. Januar 0001 auf das (fiktive) Datum 1. März 0000 verschoben.[26] Das heißt, dass der Δ-Welt um 306 erhöht wird (um die Anzahl Tage zwischen dem „1. März 0000“ und dem 1. Januar 0001).

Die Bestimmung des Datums aus einer gegebenen Tageszahl Δ geschieht nun in folgenden Schritten:

1. $\Delta := \Delta + 306$ (Verschieben des Startdatums auf den „1. März 0000“)
2. Bestimmen des Jahrs y von Δ.
3. Bestimmen des Monats m von Δ.
4. Bestimmen des Tages d von Δ.

Bestimmung des Jahres

Die Jahre können in folgende vier „Zyklen“ gemäß den Regeln des Gregorianischen Kalenders eingeteilt werden:

1. Ein-Jahres-Zyklus: 365 Tage

   Der kleinste Zyklus ist ein Nicht-Schaltjahr mit 365 Tagen und wird als Ein-Jahres-Zyklus bezeichnet. Das Jahr vom „1. März 0000“ bis zum 1. März 0001 ist solch ein Ein-Jahres-Zyklus.

[25] Ansonsten wäre der Wert, der sich aus der Tageszähler-Formel ergibt, $d + \left\lfloor \dfrac{153\cdot\tilde{m}-2}{5} \right\rfloor = 1 + 397$ (siehe den Wert für Januar in obiger Tabelle).

[26] Tatsächlich gibt es kein Jahr „0“: Das Jahr vor 1 n. Chr. ist 1 v. Chr.

2. Vier-Jahres-Zyklus: 1.461 Tage

   Der nächste Zyklus besteht aus vier aufeinanderfolgenden Jahren, wobei von einem Schaltjahr und drei Nicht-Schaltjahren ausgegangen wird.[27] Der Vier-Jahres-Zyklus hat eine Länge von $4 \times 365 + 1 = 1461$ Tagen. Die Jahre vom „1. März 0000“ bis zum 1. März 0004 bilden einen solchen Zyklus.

3. 100-Jahres-Zyklus: 36.524 Tage

   Der nächste Zyklus besteht aus 100 aufeinanderfolgenden Jahren, wobei angenommen wird, dass genau ein Jahr darunter ist, dessen Jahreszahl durch 100, aber nicht durch 400 teilbar ist. Das heißt, dieser 100-Jahre-Zyklus besteht aus 25 Vier-Jahres-Zyklen, wobei einer dieser Vier-Jahres-Zyklen gar kein Schaltjahr enthält, d.h., einen Tag weniger besetzt. Demnach hat der 100-Jahres-Zyklus ist eine Länge von $25 \times 1461 - 1 = 36524$ Tagen. Die Jahre vom „1. März 0000“ bis zum 1. März 0100 bilden einen solchen Zyklus.

4. 400-Jahres-Zyklus: 146.097 Tage

   Der letzte Zyklus besteht aus 400 aufeinanderfolgenden Jahren. Dieser Zyklus enthält genau ein Jahr, dessen Jahreszahl durch 400 teilbar ist (ein Schaltjahr) und drei Jahre, deren Jahreszahlen durch 100, aber nicht durch 400 teilbar sind (keine Schaltjahre). Das heißt, der 400-Jahres-Zyklus besteht aus vier 100-Jahres-Zyklen sowie einem zusätzlichen Tag. Dieser Zyklus hat somit eine Länge von $4 \times 36524 + 1 = 146097$ Tagen. Die Jahre vom „1. März 0000“ bis zum 1. März 0400 bilden einen solchen Zyklus.

Die Idee besteht nun darin, beginnend mit dem größten Zyklus die Anzahl von Jahres-Zyklen einer gegebenen Tageszahl Δ zu bestimmen (wobei der Tageszähler mit dem „1. März 0000“ beginnt). Dies kann gemäß folgendem Rechenschema durchgeführt werden, wobei y die Anzahl der durch Δ bestimmten Jahre angibt:

1. $t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{146097} \right\rfloor$

   t bestimmt die Anzahl der vollständigen 400-Jahres-Zyklen. Somit ist

   $$y := 400 \cdot t \qquad \text{und} \qquad \Delta := \Delta - t \cdot 146097.$$

   Die verbleibende Jahresanzahl in Δ ist nun kleiner als 400.

2. $t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{36524} \right\rfloor$

   Ist $t \leq 3$, dann beschreibt t die Anzahl vollständiger 100-Jahres-Zyklen.

   Allerdings kann auch der Fall $t = 4$ auftreten, nämlich wenn $\Delta = 4 \cdot 36524 = 146096$. $t = 4$ ist aber inhaltlich nicht zutreffend, da das alle 400 Jahre auftretende Schaltjahr ignoriert

[27] Diese Annahme trifft nicht auf jede Folge von 4 Jahren zu, beispielsweise, wenn die Nicht-Schaltjahre 1700, 1800 and 1900 enthalten sind!

wurde. In diesem Fall wird daher $t := 3$ gesetzt, da erst mit $\Delta = 146097$ ein 400-Jahres-Zyklus vollständig wäre. Somit ist

$$y := y + 100 \cdot t \qquad \text{und} \qquad \Delta := \Delta - t \cdot 36524.$$

Die verbleibende Jahresanzahl in Δ ist nun kleiner als 100.

3. $t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{1461} \right\rfloor$

   t bestimmt die Anzahl vollständiger Vier-Jahres-Zyklen. Somit ist

   $$y := y + 4 \cdot t \qquad \text{und} \qquad \Delta := \Delta - t \cdot 1461.$$

   Die verbleibende Jahresanzahl in Δ ist nun kleiner als 4.

4. $t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{365} \right\rfloor$

   Ist $t \leq 3$, dann beschreibt t die Anzahl der vollständigen Ein-Jahres-Zyklen.

   Analog zum Fall der 100-Jahres-Zyklen kann auch hier der Fall $t = 4$ auftreten, nämlich wenn $\Delta = 4 \cdot 365 = 1460$. $t = 4$ ist aber inhaltlich nicht zutreffend, da das alle 4 Jahre auftretende Schaltjahr ignoriert wurde.[28] In diesem Fall wird daher $t := 3$ gesetzt, da erst mit $\Delta = 1461$ ein 4-Jahres-Zyklus vollständig wäre. Somit ist

   $$y := y + t \qquad \text{und} \qquad \Delta := \Delta - t \cdot 365.$$

   Der Wert Δ ist nun kleiner als 366, wobei Δ die verbleibende Tagesanzahl eines Jahres y ist, das am 1. März beginnt (beispielsweise steht $\Delta = 365$ für den 29. Februar des Jahres $y+1$, $\Delta = 364$ für den 28. Februar des Jahres $y+1$, $\Delta = 0$ für den 1. März des Jahres y).

Somit stellt sich der vollständige Algorithmus zur Bestimmung der Jahreszahl y aus einer Tageszahl Δ (mit Startdatum 1. März 0000) folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{llll}
t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{146097} \right\rfloor, & & y := 400 \cdot t, & \Delta := \Delta - t \cdot 146097 \\[2ex]
t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{36524} \right\rfloor, & \text{if } (t = 4) \text{ then } t := 3, & y := y + 100 \cdot t, & \Delta := \Delta - t \cdot 36524 \\[2ex]
t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{1461} \right\rfloor, & & y := y + 4 \cdot t, & \Delta := \Delta - t \cdot 1461 \\[2ex]
t := \left\lfloor \dfrac{\Delta}{365} \right\rfloor, & \text{if } (t = 4) \text{ then } t := 3, & y := y + t, & \Delta := \Delta - t \cdot 365
\end{array}$$

Dieser Algorithmus kann (aus Performance-Gründen) unter ausschließlicher Verwendung von Integer-Arithmetik implementiert werden. Darüber hinaus gibt es folgende kompaktere Variante des Algorithmus':

[28] Der Fall, dass eine durch 100, aber nicht durch 400 auftretende Jahreszahl enthalten ist, kann nicht auftreten, da eine solche Jahreszahl bereits in einem 100-Jahres-Zyklus enthalten wäre.

$$t := \left\lfloor \frac{4\cdot\Delta+3}{146097} \right\rfloor, \quad y := 100\cdot t, \quad \Delta := \Delta - t\cdot 36524 - \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor$$
$$t := \left\lfloor \frac{4\cdot\Delta+3}{1461} \right\rfloor, \quad y := y+t, \quad \Delta := \Delta - t\cdot 365 - \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor$$

Hierbei besteht die grundlegende Idee darin, zum einen die 400- und 100-Jahres-Zyklen und zum anderen die 4- und Ein-Jahres-Zyklen zusammenzufassen, wie im Folgenden für den Fall der 4- und Ein-Jahres-Zyklen gezeigt wird:

Wenn alle 400- und 100-Jahres-Zyklen bereits erkannt wurden, verbleiben somit weniger als 100 Jahre. In diesem Zeitbereich tritt genau alle 4 Jahre ein Schaltjahr auf, d.h., die durchschnittliche Länge eines Jahres in Tagen beträgt

$$\frac{1461}{4} = 365.25.$$

Sei nun Δ eine Tageszahl innerhalb der ersten vier Jahre, d.h. $0 \leq \Delta \leq 1461$. Mit Hilfe des Ausdrucks

$$\left\lfloor \frac{\Delta+x}{365.25} \right\rfloor, \tag{A.3}$$

soll nun die korrekte Jahreszahl ermittelt werden, wobei x geeignet gewählt werden muss. Dies ist der Fall, wenn die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \frac{n\cdot 365+x}{365.25} &\geq n > \frac{n\cdot 365-1+x}{365.25} \qquad \text{für } n=1,2,3 \quad \text{und} \\ \frac{n\cdot 365+x+1}{365.25} &\geq n > \frac{n\cdot 365+x}{365.25} \qquad \text{für } n=4, \end{aligned}$$

das heißt, x muss so gewählt werden, dass der erste Tag der Jahre $1,2,3$ und 4 (mit den jeweiligen Tageszahlen 365, $2\cdot 365$, $3\cdot 365$ und $4\cdot 365+1=1461$ – Schaltjahr!) korrekt von dem letzten Tag des jeweiligen Vorjahres (mit den jeweiligen Tageszahlen 364, $2\cdot 365-1$, $3\cdot 365-1$ und $4\cdot 365$) unterschieden werden kann. [29] Die Ungleichungen

$$\frac{n\cdot 365+x}{365.25} \geq n \quad \text{für } n=1,2,3$$

führen zu

$$x \geq 365.25\cdot n - 365\cdot n = \frac{n}{4} \qquad \text{für } n=1,2,3$$

und folglich

$$x \geq 0.75,$$

[29] Zur Erinnerung: Der erste Tag des Jahres 4 ist der 1. März 0004, der 29. Februar einen Tag zuvor gehört „formal" noch zum Jahr 0003, da die Tageszählung hier am 1. März 0000 beginnt.

die Ungleichung

$$n > \frac{n \cdot 365 + x}{365.25} \quad \text{für } n = 4$$

führt zu

$$x < 1.$$

Die übrigen Ungleichungen ergeben $x < 1 + \frac{n}{4}$ für $n = 1, 2, 3$ sowie $x \geq 0$ für $n = 4$. Demnach kann x in (A.3) beliebig aus dem Intervall $[0.75, 1)$ gewählt werden. Der Ausdruck (A.3) kann ebenfalls für alle anderen Jahre bis zum Jahr 99 verwendet werden (das Jahr 100 ist kein Schaltjahr, weswegen in diesem Fall die Formel nicht anwendbar ist), da

$$\frac{k \cdot 1461 + n \cdot 365 + x}{365.25} = 4 \cdot k + \frac{n \cdot 365 + x}{365.25}$$

für $k = 0, \ldots, 24$ und $n = 1, 2, 3, 4$ (mit $(k, n) \neq (24, 4)$) ist, d.h., die Konstellation der ersten vier Jahren wiederholt sich in den folgenden vier Jahren (á 1461 Tagen), so dass dasselbe x verwendet werden kann.

Da x beliebig aus dem Intervall $[0.75, 1)$ gewählt werden kann, ist es naheliegend, eine möglichst einfache Wahl zu treffen, z.B. so, dass Integer-Arithmetik verwendet werden kann. Dies ist beispielsweise der Fall für $x = 0.75$, denn

$$\left\lfloor \frac{\Delta + 0.75}{365.25} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4 \cdot \Delta + 3}{1461} \right\rfloor,$$

was genau die Formel aus der oben genannten kompakten Form des Algorithmus' darstellt.

Die Betrachtungen für die 100- und 400-Jahres-Zyklen (mit $146097/4 = 36524.25$ als durchschnittliche Tagesanzahl in 100 Jahren) sind analog.

Bestimmung des Monats

Es wird angenommen, dass $\Delta \leq 365$ als „Endprodukt“ des obigen Algorithmus' kein vollständiges Jahr mehr umfasst und das Jahr mit dem 1. März beginnt. Wird der Ausdruck

$$\left\lfloor \frac{153 \cdot \tilde{m} - 2}{5} \right\rfloor,$$

in Formel (A.2) zur Berechnung der Tageszahl für einen bestimmten Monat $\tilde{m}$ (wobei $\tilde{m} = 3, \ldots, 14$) gleich Δ gesetzt und (unter „freier Behandlung“ der Gaußfunktion) nach $\tilde{m}$ umgestellt, ergibt sich der Ausdruck

$$\left\lfloor \frac{5 \cdot \Delta + 2}{153} \right\rfloor.$$

Da Δ höchstens den Wert 365 annehmen kann, ist

$$\left\lfloor \frac{5 \cdot \Delta + 2}{153} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{5 \cdot 365 + 2}{153} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1827}{153} \right\rfloor = \left\lfloor 11\tfrac{16}{17} \right\rfloor = 11.$$

Die folgende Tabelle zeigt, dass sich mit Hilfe dieses Ausdrucks

$$m \; := \; \left\lfloor \frac{5 \cdot \Delta + 2}{153} \right\rfloor$$

für $m = 0$ der Monat März, für $m = 1$ der Monat April, für $m = 11$ der Monat Februar usw. ergibt, da der Ausdruck $5 \cdot \Delta + 2$ für den jeweils Monatsersten des Monats m um mindestens 0 und höchstens 4 größer ist als der Ausdruck $m \cdot 153$ (andernfalls würde sich für $\Delta - 1$ nicht der Vormonat ergeben):

	Mar 1	Apr 1	Mai 1	Jun 1	Jul 1	Aug 1	Sep 1	Okt 1	Nov 1	Dez 1	Jan 1	Feb 1
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Δ	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337
$5 \cdot \Delta + 2$	2	157	307	462	612	767	922	1072	1227	1377	1532	1687
$m \cdot 153$	0	153	306	459	612	765	918	1071	1224	1377	1530	1683

Um die tatsächliche Monatszahl zu erhalten, ist lediglich noch folgende Korrektur durchzuführen (für die Monate Januar und Februar ist auch die Jahreszahl zu erhöhen):

if $m > 9$ then
    $m := m - 9$
    $y := y + 1$
else
    $m := m + 3$

Bestimmung des Tages

Es wird angenommen, dass $\Delta \leq 365$ als „Endprodukt" des Algorithmus' zur Bestimmung des Jahres kein vollständiges Jahr mehr umfasst und der Monat m gemäß obigem Algorithmus (ohne die abschließende Korrektur) bekannt ist, d.h., das Jahr beginnt mit dem 1. März und $m = 0$ bezeichnet den Monat März, $m = 1$ bezeichnet den Monat April, $m = 11$ bezeichnet den Monat Februar usw.. Die Tagesanzahl in den vollen Monaten m ist dann

$$\left\lfloor \frac{153 \cdot m + 2}{5} \right\rfloor,$$

wie aus folgender Tabelle ersichtlich ist:

	Mar	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez	Jan	Feb
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\left\lfloor \frac{153 \cdot m + 2}{5} \right\rfloor$	0	31	61	92	122	153	184	214	245	275	306	337
Differenz	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	31	

Da der erste Tag eines Monats (nach Abzug der vollen Monaten) durch $\Delta = 0$ bestimmt ist, ergibt sich für den Tag eines Monats d

$$d \;:=\; 1 + \Delta - \left\lfloor \frac{153 \cdot m + 2}{5} \right\rfloor .$$

Der vollständige Algorithmus zur Bestimmung eines Datums (d, m, y) bei gegebener Tageszahl $\Delta\big((1,1,1),(d,m,y)\big)$ ist demnach

$$\Delta \;:=\; \Delta + 306$$

$$t := \left\lfloor \frac{4 \cdot \Delta + 3}{146097} \right\rfloor, \quad y := 100 \cdot t, \quad \Delta := \Delta - t \cdot 36524 - \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor$$

$$t := \left\lfloor \frac{4 \cdot \Delta + 3}{1461} \right\rfloor, \quad y := y + t, \quad \Delta := \Delta - t \cdot 365 - \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor$$

$$m \;:=\; \left\lfloor \frac{5 \cdot \Delta + 2}{153} \right\rfloor$$

$$d \;:=\; 1 + \Delta - \left\lfloor \frac{153 \cdot m + 2}{5} \right\rfloor$$

if $m > 9$ then

    $m := m - 9$

    $y := y + 1$

else

    $m := m + 3$

Anhang B

Anhang zur stochastischen Finanzmathematik in diskreter Zeit

B.1 Grundlagen aus der linearen Algebra

B.1.1 Vektorräume

Definition B.1 (Körper) *Ein Tripel $\Big(K, +, \cdot\Big)$, bestehend aus einer Menge K und zwei binären Verknüpfungen „$+$“ und „$\cdot$“ (die üblicherweise Addition und Multiplikation genannt werden), heißt* ***Körper****, wenn es folgende Eigenschaften für alle $a, b, c \in K$ besitzt:*

1. *Additive Eigenschaften:*

   (a) $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(Assoziativität)*

   (b) $a + b = b + a$ *(Kommutativität)*

   (c) *Es gibt ein Element $0 \in K$ mit $0 + a = a$ (additiv neutrales Element – „Null“).*

   (d) *Zu jedem $a \in K$ existiert das additiv inverse Element $-a$ mit $(-a) + a = 0$.*

2. *Multiplikative Eigenschaften:*

   (a) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(Assoziativität)*

   (b) $a \cdot b = b \cdot a$ *(Kommutativität)*

   (c) *Es gibt ein Element $1 \in K$ mit $1 \cdot a = a$ (multiplikativ neutrales Element – „Eins“) und es ist $1 \neq 0$.*

   (d) *Zu jedem $a \in K \setminus \{0\}$ existiert das multiplikativ inverse Element a^{-1} mit $a^{-1} \cdot a = 1$.*

   (e) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(Links-Distributivität)*

Bemerkungen:

1. Die Rechts-Distributivität folgt aus der multiplikativen Kommutativität und der Links-Distributivität.
2. $\Big(\mathbb{R}, +, \cdot\Big)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation ist ein Körper, $\Big(\mathbb{Z}, +, \cdot\Big)$ allerdings nicht (das multiplikativ inverse Element existiert nur für 1 und -1).
3. Ist klar, welche Addition und Multiplikation gemeint ist, wird ein Körper $\Big(K, +, \cdot\Big)$ auch kurz als K bezeichnet.

Definition B.2 (Vektorraum) *Es sei K ein Körper mit dem multiplikativ neutralen Element 1. Ein Tripel $\Big(V, +, \cdot\Big)$, bestehend aus einer Menge V und zwei Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} + : \quad V \times V &\to V \text{ (Addition)} \qquad \text{und} \\ \cdot : \quad K \times V &\to V \text{ (skalare Multiplikation}^1\text{)}, \end{aligned}$$

*wird **Vektorraum** genannt, wenn es folgende Eigenschaften für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ besitzt:*

1. *Additive Eigenschaften:*
   (a) $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(Assoziativität)*
   (b) $u + v = v + u$ *(Kommutativität)*
   (c) *Es gibt ein Element $\mathbf{0} \in V$ mit $\mathbf{0} + v = v$ (neutrales Element – „Nullvektor“).*
   (d) *Zu jedem $v \in V$ existiert das additiv inverse Element $-v$ mit $(-v) + v = \mathbf{0}$.*
2. *Skalar-multiplikative Eigenschaften:*
   (a) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
   (b) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ *($\alpha + \beta$ ist dabei die Körper-Addition)*
   (c) $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$ *($\alpha \cdot \beta$ ist dabei die Körper-Multiplikation)*
   (d) $1 \cdot v = v$

Bemerkungen:

1. Die Elemente eines Vektorraums werden auch **Vektoren** genannt.
2. Jeder Vektorraum enthält wenigstens den Nullvektor.
3. Es ist zwischen der Addition und Multiplikation innerhalb des Körpers und der Addition und skalaren Multiplikation des Vektorraums zu unterscheiden, auch wenn beide oftmals gleich bezeichnet werden.

[1] Ein Element eines Körpers wird als **Skalar** bezeichnet.

4. Ist klar, welche Addition und Multiplikation gemeint ist, wird ein Vektorraum $\left(V,+,\cdot\right)$ auch kurz als V bezeichnet.

5. Gilt $K = \mathbb{R}$, wird V auch als **reeller Vektorraum** bezeichnet.

6. $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ist mit der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation auf dem Körper $\mathbb{R}$ ein Vektorraum.

7. Für $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Jede Linearkombination ist selbst Element des Vektorraums.

8. Ist S eine Teilmenge von V, so wird die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus S die **lineare Hülle** von S genannt.

9. Eine Teilmenge S von V heißt **linear abhängig**, wenn sich der Nullvektor auf nicht-triviale Weise als eine Linearkombination von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in S$ ausdrücken lässt, ansonsten **linear unabhängig**. „Nicht-trivial“ bedeutet, dass mindestens ein Skalar (ein Koeffizient der Linearkombination) von Null verschieden ist.

10. Eine Teilmenge S von V heißt **Basis** von V, wenn sie linear unabhängig und die lineare Hülle von S gleich dem gesamten Vektorraum ist.

11. Die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V wird als **Dimension** von V bezeichnet. Bezeichung: $\dim V$.

    Speziell ist $\dim \mathbb{R}^n = n$ für $n \in \mathbb{N}$.

12. Eine nichtleere Teilmenge S von V heißt **Untervektorraum**, falls S selbst wiederum ein Vektorraum über demselben Körper ist. Eine nichtleere Teilmenge S von V ist genau dann ein Untervektorraum, wenn sie abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der skalaren Multiplikation ist.

B.1.2 Skalarprodukt

Definition B.3 (Skalarprodukt) *Sei V ein reeller Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** (oder **inneres Produkt**) auf V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R},$$

d.h., es gilt für alle $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $\langle u, u\rangle > 0$ *für* $u \neq \mathbf{0}$ *(positive Definitheit)*

2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ *(Symmetrie)*

3. $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \alpha\langle u, v\rangle + \beta\langle u, w\rangle$ *(Rechts-Linearität)*

Bemerkungen:

1. Die Links-Linearität folgt aus der Rechts-Linearität und der Symmetrie.

2. Eine Bilinearform ist eine Funktion, die zwei Vektoren einen skalaren Wert zuordnet und linear in ihren beiden Argumenten ist.

3. Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen **orthogonal**, wenn $\langle u, v\rangle = 0$ gilt. Bezeichung: $u \perp v$.

   Eine Teilmenge S von V heißt orthogonal, wenn alle darin enthaltenen Vektoren paarweise orthogonal sind. Eine orthogonale Teilmenge S von V ist stets linear unabhängig.

   Zwei Teilmengen S, T von V heißen orthogonal, wenn $s \perp t$ für alle $(s,t) \in S \times T$ gilt. Bezeichnung: $S \perp T$

   Ein Vektor $v \in V$ und eine Teilmenge S von V heißen orthogonal, wenn $\{v\} \perp S$ gilt. Bezeichnung: $v \perp S$.

B.1.3 Lineare Abbildungen

Definition B.4 (Lineare Abbildung) *Seien V, W Vektorräume über einem gemeinsamen Körper K. Eine Abbildung*

$$L : V \to W$$

*heißt **lineare Abbildung**, falls für alle $u, v \in V$ und für alle $\alpha, \beta \in K$*

$$L(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

gilt.

Definition B.5 (Bild) *Das **Bild** einer linearen Abbildung L (Bezeichung: $\operatorname{Im} L$ – „image“) ist die Menge aller Bildvektoren*

$$\operatorname{Im} L \;:=\; \Big\{w \in W \mid w = L(v), v \in V\Big\}.$$

Definition B.6 (Kern) *Der **Kern** einer linearen Abbildung L (Bezeichung: $\ker L$) ist die Menge aller Urbild-Vektoren $v \in V$, die auf den Bild-Nullvektor $\mathbf{0} \in W$ abgebildet werden, d.h.*

$$\ker L \;:=\; \Big\{v \in V \mid L(v) = \mathbf{0}\Big\}.$$

Bemerkungen:

1. $\operatorname{Im} L$ ist ein Untervektorraum von W, $\ker L$ ist ein Untervektorraum von V.

2. Für lineare Abbildungen L gilt der **Dimensionssatz**

$$\dim V \;=\; \dim \ker L + \dim \operatorname{Im} L.$$

3. Eine Sonderrolle nehmen die linearen Abbildungen von und in **endlichdimensionale Vektorräume** (d.h. $\dim V = m$ und $\dim W = n$ mit $n, m \in \mathbb{N}$) ein:

   (a) Jede lineare Abbildung (von und in endlichdimensionale Vektorräume) kann mit Hilfe einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ beschrieben werden. Umgekehrt kann eine Matrix $\boldsymbol{A}$ auch als lineare Abbildung $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ aufgefasst werden.

   (b) Der **Zeilenrang** einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen, aufgefasst als Vektoren des $\mathbb{R}^m$. Der **Spaltenrang** einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten, aufgefasst als Vektoren des $\mathbb{R}^n$. Allgemein gilt: Zeilenrang = Spaltenrang.

   Bezeichnung: $\operatorname{rg} \boldsymbol{A}$.

   (c) Es gilt $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = \dim \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$.

B.1.4 Adjungierte Abbildungen

Satz B.7 *Es seien V, W reelle Vektorräume mit den Skalarprodukten $\langle .,. \rangle_V$ bzw. $\langle .,. \rangle_W$ sowie $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung*

$$L^* : W \to V$$

mit der Eigenschaft

$$\langle w, Lv \rangle_W \;=\; \langle L^* w, v \rangle_V$$

*für alle $w \in W$ und $v \in V$. Diese Abbildung L^* heißt die zu L **adjungierte Abbildung**.*

Bemerkungen:

1. Die durch eine Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ beschriebene lineare Abbildung $\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ besitzt (bei Verwendung des üblichen Skalarprodukts) die adjungierte Abbildung $\boldsymbol{A}^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wobei $\boldsymbol{A}^T$ die transponierte Matrix von $\boldsymbol{A}$ ist.

2. Es gilt

$$\ker L \perp \operatorname{Im} L^* \quad \text{und} \quad \ker L^* \perp \operatorname{Im} L,$$

also insbesondere

$$\ker \boldsymbol{A} \perp \operatorname{Im} \boldsymbol{A}^T \quad \text{und} \quad \ker \boldsymbol{A}^T \perp \operatorname{Im} \boldsymbol{A}. \tag{B.1}$$

3. Es gilt

$$V \;=\; \ker L \oplus \operatorname{Im} L^* \quad \text{und} \quad W \;=\; \ker L^* \oplus \operatorname{Im} L,$$

also insbesondere

$$\mathbb{R}^m \;=\; \ker \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{A}^T \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^n \;=\; \ker \boldsymbol{A}^T \oplus \operatorname{Im} \boldsymbol{A}. \tag{B.2}$$

Dabei ist für zwei Untervektorräume S und T

$$S + T \;:=\; \Big\{ s + t \mid s \in S \;\wedge\; t \in T \Big\}.$$

Gilt außerdem $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, so schreibt man auch $S \oplus T$ (die sogenannte „direkte innere Summe“).

B.1.5 Trennungssatz

Satz B.8 *Sei $\hat{K}$ eine kompakte und konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und sei $\hat{L}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Wenn $\hat{L}$ und $\hat{K}$ disjunkt sind, so gibt es ein $\phi \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$\langle \phi, u \rangle > 0$ für alle $u \in \hat{K}$*
2. *$\langle \phi, v \rangle = 0$ für alle $v \in \hat{L}$*

B.2 Beweis des 1. Fundamentalsatzes im EPM$_K$

„Ein EPM$_K\Big(\boldsymbol{b},\boldsymbol{D}\Big)$ ist genau dann arbitragefrei, wenn eine Lösung $\boldsymbol{\psi}\in\mathbb{R}^K$ des linearen Gleichungssystems $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{\psi}\gg\boldsymbol{0}^K$ existiert."

Beweis: $\Longleftarrow$: Dies ist die Aussage von Satz 2.12.
$\Longrightarrow$: Gemäß Satz 2.11 ist die Existenz einer Lösung des LGS $\boldsymbol{D}\psi=\boldsymbol{b}$ gesichert, nicht aber die Existenz einer streng positiven Lösung.
Zum Beweis dieser Aussage wird der Trennungssatz B.8 benötigt.

- Seien zunächst

$$L:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{K+1}\quad\text{mit}\quad L(\boldsymbol{h}):=\begin{pmatrix}-V_0(\boldsymbol{h})\\ \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})\end{pmatrix}$$

  eine lineare Abbildung mit dem Bild

$$\hat{L}\ :=\ \operatorname{Im}L\ \subset\ \mathbb{R}^{K+1}$$

  und

$$\begin{aligned}\hat{K}\ &:=\ \Big\{\boldsymbol{x}:=(x_1,\ldots,x_{K+1})\in\mathbb{R}^{K+1}\mid\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}^{K+1}\ \wedge\ x_1+\ldots+x_{K+1}=1\Big\}\\ &\subset\ \mathbb{R}^{K+1}_{0+}\setminus\{\boldsymbol{0}^{K+1}\}\end{aligned}$$

  eine kompakte und konvexe Menge (Nachweis als Übungsaufgabe!).

- Offensichtlich gilt $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}^{K+1}$ für alle $\boldsymbol{x}\in\hat{K}$. Wegen der vorausgesetzten Arbitragefreiheit (d.h., es gibt kein Portfolio $\boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^N$ mit $L(\boldsymbol{h})>\boldsymbol{0}^{K+1}$) ist demnach

$$\hat{L}\ \cap\ \hat{K}\ =\ \emptyset.$$

- Damit sind die Voraussetzungen von Satz B.8 erfüllt. Insbesondere gibt es einen Vektor $\phi\in\mathbb{R}^{K+1}$ mit

$$\phi\cdot\boldsymbol{x}\ >\ 0\quad\text{für alle}\ \ \boldsymbol{x}\in\hat{K}\qquad\text{und}\tag{B.3}$$
$$\phi\cdot\boldsymbol{y}\ =\ 0\quad\text{für alle}\ \ \boldsymbol{y}\in\hat{L}.\tag{B.4}$$

- Für diesen Vektor $\phi\in\mathbb{R}^{K+1}$ gilt $\phi\gg\boldsymbol{0}^{K+1}$, denn offensichtlich sind die $K{+}1$-dimensionalen Standardbasisvektoren $\boldsymbol{e}_1:=(1,0,\ldots,0)^T,\ldots,\boldsymbol{e}_{K+1}:=(0,\ldots,0,1)^T\in\hat{K}$ und $\phi\cdot\boldsymbol{e}_j$ ergibt für $j=1,\ldots,K+1$ jeweils die j-te Komponente von ϕ, die gemäß (B.3) positiv ist.

- Aus (B.4) ergibt sich wegen $\hat{L}=\operatorname{Im}L$

$$\phi\cdot L(\boldsymbol{h})\ =\ 0\quad\text{für alle}\ \ \boldsymbol{h}\in\mathbb{R}^N.\tag{B.5}$$

- Der Vektor $\phi \gg \mathbf{0}^{K+1}$ möge nun geschrieben werden als

$$\phi \;=\; \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \phi_1 > 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\phi} \gg \mathbf{0}^K.$$

Aus (B.5) ergibt sich dann für alle $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$

$$0 \;=\; \phi \cdot L(\boldsymbol{h}) \;=\; \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -V_0(\boldsymbol{h}) \\ \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \end{pmatrix} \;=\; -\phi_1 V_0(\boldsymbol{h}) + \tilde{\phi} \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}).$$

Daraus folgt

$$\phi_1 V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \tilde{\phi} \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h})$$

und somit wegen $\phi_1 > 0$ und $\tilde{\phi} \gg \mathbf{0}^K$

$$V_0(\boldsymbol{h}) \;=\; \psi \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \quad \text{mit} \quad \psi := \frac{\tilde{\phi}}{\phi_1} \gg \mathbf{0}^K. \tag{B.6}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich (es handelt sich um eine reelle Zahl!)

$$\begin{aligned} \psi \cdot \boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{h}) \;&=\; \psi \cdot \Big(\boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h}\Big) \;=\; \psi^T \bullet \boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h} \\ &=\; \Big(\psi^T \bullet \boldsymbol{D}^T \bullet \boldsymbol{h}\Big)^T \;=\; \boldsymbol{h}^T \bullet \boldsymbol{D} \bullet \psi \\ &=\; \boldsymbol{h} \cdot \Big(\boldsymbol{D} \bullet \psi\Big). \end{aligned}$$

Wegen $V_0(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{b}$ ergibt sich aus (B.6)

$$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{h} \cdot \Big(\boldsymbol{D} \bullet \psi\Big) \quad \text{für alle } \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N,$$

also insbesondere auch für die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^N$. Daraus folgt

$$\boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{D}\psi \quad \text{mit} \quad \psi \gg \mathbf{0}^K.$$

■

B.3 Grundlagen aus der Maßtheorie

B.3.1 Mengensysteme

Bezeichnungen:

- Ω – beliebige Menge[2]
- $\mathscr{P}(\Omega)$ – Potenzmenge von Ω; andere Bezeichnung: 2^Ω

Def. Mengensystem (in Ω): Menge[2] von Teilmengen von Ω

Beispiele für $\Omega = \{1,2,3\}$: $\mathscr{P}(\Omega)$, $\{\emptyset\}$, $\{\Omega\}$, $\{\{1\}\}$, $\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$;
nicht Ω, $\{1\}$; **je nach Definition:** $\emptyset$

Spezielle Mengensysteme $\mathcal{F}$

Bezeichnung	definierende Eigenschaft(en)	Beispiele für $\Omega = \{1,2,3\}$
$\cap$-stabiles[3] Mengensystem	$A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$	$\mathscr{P}(\Omega)$, alle einelementigen Mengensysteme, $\{\emptyset, \Omega\}$, $\{\{1\}, \{1,2\}, \Omega\}$, **nicht** $\{\{1,2\}, \{2,3\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}\}$
Ring	(i) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$ [4] (ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$ [5] (iii) $\emptyset \in \mathcal{F}$ [6]	$\mathscr{P}(\Omega)$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{1\}\}$, **nicht** $\{\{1\}\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \Omega\}$
Algebra	Ring mit $\Omega \in \mathcal{F}$ [7]	$\mathscr{P}(\Omega)$, $\{\emptyset, \Omega\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$, **nicht** $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{1\}, \Omega\}$
σ-Algebra	Algebra mit $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ [8]	siehe Algebra[9]
Dynkin-System	(i) $\Omega \in \mathcal{F}$ (ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$ (iii) $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, paarw. disj. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ [10]	siehe Algebra[11]

[4] Somit ist bei einem Ring für jede **endliche** Folge $\left(A_i\right)_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ auch $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

[5] Jeder Ring ist $\cap$-stabil wegen $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

[6] Diese definierende Eigenschaft eines Rings wird nur dann benötigt, wenn leere Mengensysteme auftreten dürfen. Andernfalls folgt $\emptyset \in \mathcal{F}$ wegen $A \setminus A = \emptyset$ aus Eigenschaft (ii).

[2] Einige Autoren verlangen die Nichtleere.

[3] „durchschnittstabiles "

7 Damit ist bei einer Algebra für jedes $A \in \mathcal{F}$ auch $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Wegen $A \setminus B = \overline{\overline{A} \cup B}$ sind die definierenden Eigenschaften einer Algebra sogar

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies \overline{A} \in \mathcal{F}$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$

8 Bei einer σ-Algebra ist wegen $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n}$ auch $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

9 Jede **endliche** Algebra ist auch eine σ-Algebra.

10 Dynkin-Systeme und σ-Algebren unterscheiden sich nur in Eigenschaft (iii) voneinander. Allerdings sind Dynkin-Systeme i.Allg. *nicht* $\cap$-stabil. $\cap$-stabile Dynkin-Systeme sind σ-Algebren.

11 Für $|\Omega| \leq 3$ ist jedes Dynkin-System auch eine σ-Algebra. Für $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ist allerdings das von $\mathcal{E} = \Big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\Big\}$ erzeugte Dynkin-System *keine* σ-Algebra.

Bezeichnung: $\sigma(\mathcal{F})$ – kleinste σ-Algebra, die das Mengensystem $\mathcal{F}$ enthält

Beispiele: $\sigma(\{\emptyset\}) = \sigma(\{\Omega\}) = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \sigma\Big(\{\{1\}\}\Big) = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\},$

$$\sigma\Big(\{\{1\}, \{2\}\}\Big) = \sigma\Big(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\Big) = \mathscr{P}(\Omega)$$

B.3.2 σ-Algebra der Borel-Mengen

Definitionen:

- $\mathcal{I}$ – Menge aller rechts offenen Intervalle $[a, b[:= \Big\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\Big\}, \quad a, b \in \mathbb{R},$ in $\mathbb{R}$
- $\mathcal{F}$ – System aller Vereinigungsmengen von je **endlich** vielen Elementen aus $\mathcal{I}$
- $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I}) = \sigma(\mathcal{F})$ – σ-Algebra der Borel-Mengen von $\mathbb{R}$ (auch: Borel'sche σ-Algebra)

Bemerkungen:

1. $[a, b[\, = \emptyset$ für $a \geq b$
2. $\mathcal{F}$ ist ein Ring in $\mathbb{R}$.
3. Die Elemente von $\mathcal{B}$ heißen Borel-Mengen. Wegen

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a, b + 1/n[, \quad]a, b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, b[\quad \text{und} \quad]a, b] = [a, b] \setminus [a, a]$$

sind auch

- $[a,b] \in \mathcal{B}$ für $a,b \in \mathbb{R}$,
- $]a,b[\in \mathcal{B}$ für $a,b \in \mathbb{R}$,
- $]a,b] \in \mathcal{B}$ für $a,b \in \mathbb{R}$ und
- $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$ wegen $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [n,n]$ sowie $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$ ($\mathbb{Q}$ ist abzählbar.)

4. Die σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B}$ wird auch von der Menge der offenen bzw. abgeschlossenen bzw. links offenen Intervalle erzeugt. Ebenso ist die Menge der uneigentlichen Intervalle $]-\infty,x]$ bzw. $]-\infty,x[$ $(x \in \mathbb{R})$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}$.

5. Wird die Menge $\mathcal{I}^d$ der halboffenen Intervalle des $\mathbb{R}^d$ betrachtet, wobei „$\leq$" und „$<$" komponentenweise gilt, gelangt man analog zu dem Ring $\mathcal{F}^d$ und der σ-Algebra $\mathcal{B}^d$ der Borel-Mengen von $\mathbb{R}^d$.

6. Es gibt Teilmengen des $\mathbb{R}^d$, die keine Borel-Mengen sind, d.h., es gilt $\mathcal{B}^d \neq \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ (zum Beweis siehe z.B. Bauer, Maß- und Integrationstheorie, 1992, Satz 8.6).

B.3.3 Mengenfunktionen

Definition: Sei $\mathcal{F}$ ein Mengensystem. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{F} \to [-\infty, \infty]$ heißt **Mengenfunktion**[12].

Eine Mengenfunktion μ **auf einem Ring** $\mathcal{R}$ heißt **Inhalt**, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{R}$

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$

(iii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle **disjunkten** $A, B \in \mathcal{R}$ (endliche Additivität[13])

Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ heißt **Prämaß**, wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter* Mengen in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

gilt. Ist außerdem μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ definiert, so heißt μ ein **Maß**.

[12] Man beachte, dass eine Mengenfunktion die Werte $-\infty$ und ∞ annehmen kann.

[13] Somit gilt für jede **endliche** Folge $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkter Mengen $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

Beispiele:

- Es sei $\mathcal{F}$ das System der Vereinigungsmengen von je endlich vielen Intervallen aus $\mathcal{I}$. Für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ ist $\varepsilon_\omega : F \in \mathcal{F} \mapsto \varepsilon_\omega(F) := \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in F \\ 0 & \text{für } \omega \notin F \end{cases}$ ein Prämaß und dessen Fortsetzung auf die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}$ ein Maß, das sogenannte **Dirac-Maß**.

- Es sei $\mathcal{F}$ das System der Vereinigungsmengen von je endlich vielen Intervallen aus $\mathcal{I}$. Die Mengenfunktion $\lambda : \mathcal{F} \to [0, \infty]$, die jedem Intervall $[a, b[\, \in \mathcal{I} \subset \mathcal{F},\ a, b \in \mathbb{R}$, seinen sogenannten **Elementarinhalt**

  $$\lambda([a, b[) \ = \ \max(0, b - a)$$

  zuordnet, ist ein Prämaß und heißt **Lebesgue'sches Prämaß**.

  Da jedes $F \in \mathcal{F}$ als Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter Intervalle $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{I}$ dargestellt werden kann, gilt wegen der Additivität $\lambda(F) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$.

  Die Fortsetzung von λ auf die Borel'sche σ-Algebra $\mathcal{B}$ wird als **Lebesgue-Borel'sches Maß** bezeichnet. Es gilt

  $$\lambda([a, b[) \ = \ \lambda(]a, b]) \ = \ \lambda([a, b]) \ = \ \lambda(]a, b[) \ = \ \max(0, b - a)$$

  für alle $a, b \in \mathbb{R}$ sowie

  $$\lambda([a, a]) \ = \ 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} \quad \text{und somit} \quad \lambda(\mathbb{N}) \ = \ \lambda(\mathbb{Q}) \ = \ 0.$$

- Analog ist die Mengenfunktion $\lambda^d : \mathcal{F}^d \to [0, \infty]$, die jedem Intervall

  $$[a, b[\, \in \ \mathcal{I}^d \ \subset \ \mathcal{F}^d, \quad a := (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)^T \in \mathbb{R}^d,\ b := (\beta_1, \ldots, \beta_d)^T \in \mathbb{R}^d,$$

  den Elementarinhalt

  $$\lambda^d\Big([\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \, (\beta_1, \ldots, \beta_d) \, [\Big) \ = \ \begin{cases} (\beta_1 - \alpha_1) \cdot (\beta_2 - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (\beta_d - \alpha_d) & \text{für } b > a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  zuordnet, ein Prämaß und dessen Fortsetzung auf $\mathcal{B}^d$ ein Maß.

Wichtige Eigenschaften von Inhalten:

- Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ heißt **endlich**, wenn $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt.
  Ist insbesondere $\mathcal{R}$ eine Algebra, so ist μ genau dann endlich, wenn $\mu(\Omega) < \infty$ gilt.

- Ein Inhalt μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ heißt σ-**endlich** oder σ-**finit**, wenn eine Folge $\Big(A_n\Big)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$ mit $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ existiert, so dass $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bemerkungen:

- Jeder *endliche Inhalt* μ auf einer *Algebra* ist auch σ-finit. Dies gilt i.Allg. jedoch nicht für einen Inhalt auf einem *Ring*: Auf dem Ring $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ mit $\Omega \neq \emptyset$ existiert z.B. kein σ-finiter Inhalt.

- Das Lebesgue'sche Prämaß λ^d ist endlich (wegen $\mathbb{R}^d \notin \mathcal{F}^d$) und σ-finit, das Lebesgue-Borel'sche Maß λ^d dagegen nur σ-finit, aber nicht endlich (wegen $\mathbb{R}^d \in \mathcal{B}^d$ und $\mathbb{R}^d = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [n-1, n] \cup [-n, -n+1]$).

Wichtige Aussagen der Maßtheorie:

- **Fortsetzungssatz:** Jedes Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ kann auf der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ zu einem Maß fortgesetzt werden.

- **Eindeutigkeitssatz:** Sei $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Stimmen zwei Maße auf $\mathcal{E}$ überein und sind sie „auf $\mathcal{E}$ σ-finit“, so sind sie auch auf $\mathcal{A}$ gleich.

  (Insbesondere kann jedes σ-endliche Prämaß – wie z.B. das Lebesgue'sche Prämaß – auf eindeutige Weise zu einem Maß fortgesetzt werden.)

B.3.4 Messbare Abbildungen

Definition: Seien Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in Ω und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann heißt

- das Paar $\Big(\Omega, \mathcal{A}\Big)$ ein **messbarer Raum** und

- das Tripel $\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\Big)$ ein **Maßraum**.

Definition: Seien $\Big(\Omega, \mathcal{A}\Big)$ und $\Big(\Omega', \mathcal{A}'\Big)$ messbare Räume sowie $T : \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung. T heißt $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$**-messbar**, falls

$$T^{-1}(A') \;:=\; \Big\{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A'\Big\} \;\in\; \mathcal{A} \quad \text{für alle} \quad A' \in \mathcal{A}'$$

gilt. Schreibweise: $T : \Big(\Omega, \mathcal{A}\Big) \to \Big(\Omega', \mathcal{A}'\Big)$
Ist klar, welche σ-Algebren gemeint sind, heißt T einfach nur *messbar*.

Bemerkungen:

- Jede *konstante* Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ ist messbar.

- Jede *stetige* Abbildung $T : \Big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d\Big) \to \Big(\mathbb{R}^{d'}, \mathcal{B}^{d'}\Big)$ $(d, d' \in \mathbb{N})$ ist messbar.

- Sei $\Big(\Omega, \mathcal{A}\Big)$ ein messbarer Raum. Für $A \subset \Omega$ ist die Abbildung $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ mit

  $$\mathbb{1}_A(\omega) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \textbf{(Indikatorfunktion von } A\textbf{)}$$

  genau dann messbar, falls $A \in \mathcal{A}$ ist.

- $T^{-1}(\mathcal{A}') \;:=\; \Big\{A \subset \Omega :\; \exists A' \in \mathcal{A}' \text{ mit } A = T^{-1}(A')\Big\}$ ist die **Menge aller Urbilder** von T. Die Messbarkeit von T ist gleichbedeutend mit

  $$T^{-1}(\mathcal{A}') \;\subset\; \mathcal{A}.$$

  $T^{-1}(\mathcal{A}')$ ist ebenfalls eine σ-Algebra und heißt die **von T erzeugte** σ-Algebra.

  Schreibweise: $\sigma(T)$

  $\sigma(T)$ ist die kleinste σ-Algebra, bezüglich der T messbar ist.

- Durch die Abbildung T wird auf $\mathcal{A}'$ ein Maß

  $$\mu' :\; A' \in \mathcal{A}' \;\longmapsto\; \mu\Big(T^{-1}(A')\Big) = \mu\Big(\{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A'\}\Big)$$

  erzeugt, das sogenannte **Bildmaß** $T(\mu)$ bzw. μ_T.

  Messbare Abbildungen „transportieren" somit ein Maß von einem messbaren Raum in einen anderen.

B.3.5 Produktmaße

- **Mengenprodukt:** $\bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i \;:=\; \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$

- **Produkt von σ-Algebren:** $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \;:=\; \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_n \;:=\; \sigma\Big(\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i\Big)$

  $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ ist im Allgemeinen keine σ-Algebra.

- Es sei $\bigg(\Big(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i\Big)\bigg)_{i=1,\ldots,n}$ eine Folge von Maßräumen. Die Mengenfunktion

  $$\pi^* :\; \bigtimes_{i=1}^{n} A_i \;\in\; \bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \;\longmapsto\; \pi^*\Big(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\Big) \;:=\; \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i) \;\in\; [0,\infty]$$

  ist im Allgemeinen kein Maß. Sind $\mu_1, \ldots, \mu_n$ jedoch *σ-endlich*, so existiert eine eindeutige Fortsetzung der Mengenfunktion π^* auf $\bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$ zu einem Maß π auf $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$, dem sogenannten **Produktmaß**

  $$\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \;:=\; \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n \;:=\; \pi.$$

  Das Tupel $\Big(\bigtimes_{i=1}^{n} \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i\Big)$ ist dann ein Maßraum.

B.3.6 Faltungen

- Seien nun speziell $\Omega_i \equiv \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{B}^d$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *endliche* Maße.

  Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei im Folgenden $d = 1$.

  Dann ist $\left(\bigtimes_{i=1}^{n} \mathbb{R}, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \right) = \left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \right)$ ein Maßraum.

- Die (Summations-)Abbildung

$$F_n : \ (x_1, \ldots, x_n) \ \in \ \mathbb{R}^n \ \longmapsto \ \sum_{i=1}^{n} x_i \ \in \ \mathbb{R}$$

  erzeugt auf dem messbaren Raum $\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}\right)$ das Maß $\left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \right)_{F_n}$:

$$\begin{aligned} B \ \in \ \mathcal{B} \ \longmapsto \ & \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \right)_{F_n} (B) \ := \\ & \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \right) \left(\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \in B \right\} \right) \ \in \ [0, \infty[, \end{aligned}$$

  das sogenannte **Faltungsprodukt**

$$\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_n \ := \ \left(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i \right)_{F_n} .$$

B.4 Grundlagen aus der Integrationstheorie

B.4.1 μ-Integrale

Gegeben sei ein Maßraum $\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\Big)$.

- E – Menge der Elementarfunktionen (reellwertig, nichtnegativ, $\mathcal{A}$-messbar, nimmt nur endlich viele Werte an)

  $\boxed{\text{Für } f \in E \text{ ist } \int f \,\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i).}$ $A_1, \ldots, A_n$ paarw. disjunkt, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}_{0+}$

  – Das Integral hängt nicht von der speziellen Darstellung von f ab.

  – Die maßtheoretische Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$ ist zu berücksichtigen.

- Numerische Funktion: Funktion mit Werten in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$

- E^* – Menge der $\mathcal{A}$-messbaren, nichtnegativen numerischen Funktionen

  Es gilt: $E^* = \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_0^+ \;\middle|\; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \text{ isoton mit } f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \right\}$

  $$\boxed{\text{Für } f \in E^* \text{ ist } \int f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \,\mathrm{d}\mu.}$$

  – Das Integral hängt nicht von der speziellen Wahl der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab, d.h., Integration und Supremumsbildung „dürfen“ vertauscht werden.

  – Das Integral von f aus E^* ist auch für den Fall $\int f \,\mathrm{d}\mu = \infty$ definiert.

  – Aus $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ folgt wegen der maßtheoretischen Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$ im Allgemeinen NICHT $f < \infty$, da $\{f = \infty\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = \infty\}$ eine μ-Nullmenge sein kann. Allerdings gilt in diesem Fall $f < \infty$ μ-fast überall.

- Integration von beliebigen numerischen Funktionen:

  $$\begin{aligned} f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ ist } \mu\text{-integrierbar} \quad :\Longleftrightarrow \quad & f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar} \\ \text{und} \quad & \int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty, \quad f^+ := \max(f, 0), \\ \text{und} \quad & \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty, \quad f^- := \max(-f, 0) \end{aligned}$$

  $$\boxed{\text{Für integrierbare numerische Funktionen } f \text{ ist } \int f \,\mathrm{d}\mu := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu.}$$

  – Alternative Bezeichnung: $\displaystyle\int f(\omega) \,\mathrm{d}\mu(\omega) := \int f \,\mathrm{d}\mu$

- Ist f $\mathcal{A}$-messbar, so sind $f^+, f^- \in E^*$, d.h., die Integrale $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ und $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ sind (auch für $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu = \infty$ und $\int f^- \,\mathrm{d}\mu = \infty$) definiert. Die Endlichkeitsforderungen $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ und $\int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$ dienen zur Vermeidung des undefinierten Ausdrucks „$\infty - \infty$" in obiger Definition.
- Die Integrierbarkeit einer Funktion hängt somit auch vom verwendeten Maß μ ab, weswegen manchmal genauer von der μ-**Integrierbarkeit** und vom μ-Integral gesprochen wird.
- Im Spezialfall $\mu = \lambda^d$ spricht man von **Lebesgue-Integrierbarkeit** bzw. vom Lebesgue-Integral. Ist μ ein Borel-Maß, d.h. auf $\mathcal{B}^d$ definiert, spricht man auch von **(Lebesgue-) Stieltjes-Integrierbarkeit** bzw. vom (Lebesgue-)Stieltjes-Integral.

- Die Eigenschaft η gilt μ-fast überall. $:\Longleftrightarrow$ Es existiert eine μ-Nullmenge N $(\in \mathcal{A})$, so dass alle $\omega \in \overline{N}$ die Eigenschaft η besitzen.

  Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß (d.h. $\mu(\Omega) = 1$), so sagt man auch „μ-fast sicher" anstatt „μ-fast überall".
- f integrierbar $\Longrightarrow$ $|f| < \infty$ μ-fast überall
- f integrierbar und $f = g$ μ-fast überall $\Longrightarrow$ g integrierbar
- f integrierbar und $f = g$ μ-fast überall $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu$
- f, g integrierbar: $f \le g$ $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu \le \int g \,\mathrm{d}\mu$
- Weitere Verallgemeinerung des Integralbegriffs auf fast überall definierte messbare numerische Funktionen:

  f (messbar, numerisch) μ-fast überall auf Ω definiert
  und f' integrierbare Fortsetzung von f auf Ω $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int f \,\mathrm{d}\mu := \int f' \,\mathrm{d}\mu$
- Einschränkung des Integrationsbereichs auf $A \in \mathcal{A}$ für integrierbares f:

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int \mathbb{1}_A \cdot f \,\mathrm{d}\mu$$

B.4.2 Maße mit Dichten

Gegeben sei ein Maßraum $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\big)$.

- Für jedes $f \in E^*$ (d.h., f ist $\mathcal{A}$-messbar, numerisch und nichtnegativ) wird durch

$$\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu, \qquad A \in \mathcal{A},$$

ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ definiert. f heißt **Dichte** des Maßes ν bezüglich μ.

Schreibweise: $\nu = f\mu$ oder $f = \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$

- Für $\varphi \in E^*$ und $\nu = f\mu$ mit $f \in E^*$ gilt: $\displaystyle\int \varphi \,\mathrm{d}\nu \;=\; \int \varphi \cdot f \,\mathrm{d}\mu$
- Für $f, g \in E^*$ gilt: $\quad f = g \;\; \mu$-fast überall $\quad\Longrightarrow\quad f\mu = g\mu$

  (Umkehrung gilt, falls f oder g zusätzlich noch μ-integrierbar sind, d.h. $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ oder $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$)
- Ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ heißt **μ-stetig** (andere Bezeichnung: **absolutstetig** bezüglich μ), wenn jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist.

  Schreibweise: $\nu \ll \mu$
- **Satz von Radon-Nikodym:** Ist das Maß μ σ-finit, so besitzt ein Maß ν auf $\mathcal{A}$ genau dann eine Dichte $f \in E^*$ bezüglich μ, wenn ν μ-stetig ist.

  Diese Dichte f ist μ-fast überall eindeutig bestimmt.

  Ist darüber hinaus auch ν σ-endlich, so gilt $f < \infty$ μ-fast überall.

B.4.3 Integration bezüglich eines Bildmaßes

Gegeben seien ein Maßraum $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\big)$, ein messbarer Raum $\big(\Omega', \mathcal{A}'\big)$ sowie eine $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-messbare Abbildung $T : \Omega \to \Omega'$ mit Bildmaß μ_T auf $\mathcal{A}'$.

- Für jede $(\mathcal{A}', \overline{\mathcal{B}})$-messbare Funktion $f' : \Omega' \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

  $$f' \text{ ist } \mu_T\text{-integrierbar} \quad\Longleftrightarrow\quad f'(T) = f' \circ T \text{ ist } \mu\text{-integrierbar}$$

  und (in diesem Fall)

  $$\int f' \,\mathrm{d}\mu_T \;=\; \int f'(T) \,\mathrm{d}\mu \tag{B.7}$$

  Alternative Bezeichnung: $\displaystyle\int f'(x) \,\mathrm{d}\mu_T(x) \;:=\; \int f' \,\mathrm{d}\mu_T$

B.4.4 Beziehung zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral

- **Integrierbarkeit auf einem kompakten Intervall:** Ist eine messbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f auch auf $[a, b]$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt

  $$\int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda \;=\; \int\limits_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

  Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht (Gegenbeispiel: $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}|_{[a,b]}$).

- Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge der Unstetigkeitsstellen von f auf dem Intervall $]a,b[$ das Lebesgue-Maß Null besitzt.
- **Uneigentliche Integrierbarkeit:** Sei eine messbare Funktion $f : (a,b) \subset \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ für alle Intervalle $[c,d] \subset (a,b)$ Riemann-integrierbar. Dann ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

  Aus der uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit von f folgt jedoch im Allgemeinen nicht die Lebesgue-Integrierbarkeit von f (Gegenbeispiel: $f : x \in (0,\infty) \mapsto \sin x/x$).

B.4.5 Satz von Fubini

- Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume mit zwei σ-finiten Maßen μ_1, μ_2 und $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$ nichtnegative messbare oder eine $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbare Funktion.

  Dann gilt
$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \left(\int f(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1(\omega_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(\omega_2) \\ &= \int \left(\int f(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2(\omega_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(\omega_1).\end{aligned}$$

B.4.6 $\mathcal{L}^p$-Räume

Definition: Sei $\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\Big)$ ein Maßraum. Dann bezeichnet

- $\mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\Big)$ für $1 \le p < \infty$ die Menge aller p-fach integrierbaren Funktionen auf Ω,
- $\mathcal{L}^\infty\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\Big)$ die Menge aller messbaren, μ-fast überall *beschränkten* Funktionen auf Ω,
- $\mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\Big)$ die Menge aller messbaren, μ-fast überall *endlichen* Funktionen auf Ω.

- Abkürzende Bezeichung: $\mathcal{L}^p \ := \ \mathcal{L}^p(\mu) \ := \ \mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{A}, \mu\Big)$ für $p \in [1,\infty] \cup \{0\}$.
- Für endliche Maße μ ist $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$ für $p > q$.
- **Integrierbarkeit des Produkts von integrierbaren Funktionen:** Für $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ mit $p, q \in [1,\infty]$ und $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (wobei $\frac{1}{\infty} := 0$) gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1$.

B.5 Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition: Sei $\left(\Omega, \mathcal{A}\right)$ ein messbarer Raum.

- Ein Maß $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{A}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls

  $$\mathbb{P}\left(\Omega\right) = 1$$

  gilt.

- Ein Maßraum $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$ heißt **Wahrscheinlichkeitsraum**, falls $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

- Die Elemente der σ-Algebra $\mathcal{A}$ werden **Ereignisse** genannt.

- Eine messbare Abbildung X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$ heißt **Zufallsgröße** oder **Zufallsvariable**[14].

- Das Bildmaß $X(\mathbb{P})$ bzw. $\mathbb{P}_X$ von X heißt **Verteilung** von X.

- Ist X $\mathbb{P}$-integrierbar, so heißt das Integral

  $$\int X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

  Erwartungswert von X. Bezeichnung: $\mathrm{E}(X)$

  In diesem Fall gilt (siehe (B.7))

  $$\mathrm{E}X = \int \mathrm{Id} \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \int x \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

  wobei Id die Identität $\mathrm{Id} : x \in \overline{\mathbb{R}} \mapsto x \in \overline{\mathbb{R}}$ bezeichnet.

- Ist X^2 integrierbar, so heißt

  $$\mathrm{Var}\,(X) := \int \left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2 \mathrm{d}\mathbb{P} = \int \left(x - \mathrm{E}(X)\right)^2 \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

  die **Varianz** von X und $\sqrt{\mathrm{Var}\,(X)}$ die **Standardabweichung** von X. Es gilt

  $$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2.$$

[14] Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ist für die Messbarkeit allerdings ohne Bedeutung.

B.5.1 Unabhängigkeit

Definition: Sei $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{A}$ heißen **unabhängig**, falls

  $$\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

  gilt.

- Eine Familie $\left(A_i\right)_{i \in I}$ $(I \subset \mathbb{N})$ von Ereignissen aus $\mathcal{A}$ heißt unabhängig, wenn für jede nichtleere endliche Teilmenge $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$ von I

  $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) \;=\; \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_{i_j}\right)$$

  gilt.

  Bemerkung: Die *paarweise* Unabhängigkeit ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Unabhängigkeit.

- Eine Familie $\left(\mathcal{A}_i\right)_{i \in I}$ $(I \subset \mathbb{N})$ von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{A}$ heißt unabhängig, wenn jede Familie $\left(A_i\right)_{i \in I}$ von Ereignissen mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ unabhängig ist.

- Eine Familie $\left(X_i\right)_{i \in I}$ $(I \subset \mathbb{N})$ von Zufallsgrößen auf dem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\right)$ heißt unabhängig, wenn die Familie $\left(\sigma(X_i)\right)_{i \in I}$ der von Ihnen erzeugten σ-Algebren unabhängig ist.

- **Charakterisierung der Unabhängigkeit durch das Produkt der Verteilungen:** Endlich viele Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Verteilung des Vektors $(X_1, \ldots, X_n)^T$ gleich dem Produkt der Einzelverteilungen ist, d.h.

  $$\mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_n)^T} \;=\; \bigotimes_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{X_i}.$$

- **Multiplikationssatz:** Für n unabhängige und integrierbare oder nichtnegative Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_n$ gilt

  $$\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(X_i\right).$$

- **Verteilung der Summe unabhängiger Zufallsgrößen:** Die Verteilung einer Summe $S := X_1 + \ldots, X_n$ von n unabhängigen Zufallsgrößen $X_1, \ldots, X_n$ ist gleich dem Faltungsprodukt der Einzelverteilungen, d.h.

  $$\mathbb{P}_S \;=\; \mathbb{P}_{X_1} * \ldots * \mathbb{P}_{X_n}.$$

B.5.2 Unkorreliertheit

- Für zwei integrierbare Zufallsgrößen X und Y, deren Produkt XY integrierbar ist, heißt

$$\operatorname{cov}(X, Y) \;:=\; \mathrm{E}\Big(\big(X - \mathrm{E}(X)\big) \cdot \big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)\Big) \;=\; \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$$

  die **Kovarianz** von X und Y.

- Gilt

$$\operatorname{cov}(X, Y) \;=\; 0,$$

  so heißen X und Y **unkorreliert**.

- Zwei unabhängige, integrierbare Zufallsgrößen sind unkorreliert. Die Umkehrung gilt jedoch nicht immer.

- **Gleichheit von Bienaymé:** Für endlich viele paarweise unkorrelierte Zufallsgrößen $X_1, \ldots,$ X_n gilt

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i)\,.$$

B.6 Beweis des 1. Fundamentalsatzes im EPM

Von Satz 2.31 verbleibt zu zeigen, dass aus der Arbitragefreiheit des EPM die Existenz eines risikoneutralen Maßes folgt, das darüber hinaus noch eine beschränkte Dichte bezüglich $\mathbb{P}$ besitzt. Dafür wird der folgende Trennungssatz benötigt:

Lemma B.9 *Sei $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere konvexe Menge mit $\mathbf{0}^n \notin \mathcal{C}$. Dann gibt es ein $\phi \in \mathbb{R}^n$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $\phi \cdot \boldsymbol{x} \;\geq\; 0$ *für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$*

2. $\phi \cdot \boldsymbol{x}_0 \;>\; 0$ *für wenigstens ein $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{C}$*

Beweis: Siehe Föllmer/Schied

Nun zu dem verbleibenden Beweisteil von Satz 2.31. Die Beweisidee beruht darauf, die Existenz eines Maßes $\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n^{-0} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0^{-0}\Big) \;=\; \mathbf{0}^N$$

zu zeigen. Obiger Trennungssatz B.9 wird dann dazu verwendet, die Gegenannahme („Es gibt kein Maß $\mathbb{Q}$ mit $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n^{-0} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0^{-0}\Big) = \mathbf{0}^N$.“) zum Widerspruch zur vorausgesetzten Arbitragefreiheit zu führen.

- Sei $\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;:=\; \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n^{-0} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0^{-0}$.

  Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}\Big)$ ist das Integral $\mathrm{E}^{\mathbb{P}^*}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big)$ wohldefiniert, da $\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}$ (aufgrund der Nichtnegativität von $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n^{-0}$) nach unten durch den konstanten Vektor $-\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0^{-0}$ beschränkt ist und somit für den Negativteil $\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big)^-$ von $\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}$

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{P}^*}\Big((\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0})^-\Big) \;\leq\; \mathrm{E}^{\mathbb{P}^*}\Big((-\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0^{-0})^-\Big) \;=\; (-\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0^{-0})^- \;<\; \infty \cdot \mathbf{1}^N$$

  gilt. Somit ist

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{P}^*}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big) \;:=\; \begin{cases} \infty \cdot \mathbf{1}^N & \text{für } \mathrm{E}^{\mathbb{P}^*}\Big((\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0})^+\Big) = \infty \\ \mathrm{E}^{\mathbb{P}^*}\Big((\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0})^+\Big) - \mathrm{E}^{\mathbb{P}^*}\Big((\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0})^-\Big) & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Insbesondere ist ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ genau dann ein risikoneutrales Maß (d.h. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n) = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0$), wenn

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big) \;=\; \mathbf{0}^N \tag{B.8}$$

  gilt. Die 0-te Komponente der $N+1$-dimensionalen Vektoren $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n$ und $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_0$ braucht wegen $\underset{\sim}{S}_n^0 = \underset{\sim}{S}_0^0 = 1$ und somit $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{S}_n^0 - \underset{\sim}{S}_0^0\Big) = 0$ nicht berücksichtigt zu werden.

- Für ein verkürztes Portfolio $\boldsymbol{h}^{-0} \in \mathbb{R}^N$ ist

$$\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;=\; \underset{\sim}{V}_n^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}) - \underset{\sim}{V}_0^{-0}(\boldsymbol{h}^{-0}).$$

Demnach ist gemäß Lemma 2.29 die Existenz einer Arbitrage im EPM äquivalent mit der Existenz eines verkürzten Portfolios $\boldsymbol{h}^{-0} \in \mathbb{R}^N$ mit

$$\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;\geq\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;>\; 0\Big) \;>\; 0. \tag{B.9}$$

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(|\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|\Big) \;<\; \infty \quad \text{mit} \quad |\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}| \;:=\; \sqrt{\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}}. \tag{B.10}$$

Andernfalls kann anstatt $\mathbb{P}$ das Maß $\hat{\mathbb{P}}$ mit der Dichte

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \;=\; \frac{\dfrac{1}{1 + |\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|}}{c} \quad \text{mit} \quad c \;:=\; \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1 + |\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|}\right)$$

verwendet werden, das folgende Eigenschaften besitzt:

1. Wegen $0 \leq |\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}| < \infty$ ist $0 < \dfrac{1}{1 + |\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|} \leq 1$. Somit ist auch $0 < c \leq 1$ und $\hat{\mathbb{P}}$ wegen der erfolgten Normierung durch c ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Außerdem ist $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ beschränkt. Insbesondere besitzt dann jedes Maß $\mathbb{Q}$, das bezüglich $\hat{\mathbb{P}}$ eine beschränkte Dichte besitzt, wegen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \;=\; \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}} \cdot \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$$

ebenfalls eine bezüglich $\mathbb{P}$ beschränkte Dichte.

2. Wegen $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathbb{P}}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} > 0$ sind $\mathbb{P}$ und $\hat{\mathbb{P}}$ äquivalent. Insbesondere wird durch den Übergang von $\mathbb{P}$ zu $\hat{\mathbb{P}}$ die Arbitragefreiheit des EPM nicht gefährdet.

3. Wegen

$$\mathrm{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\Big(|\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|\Big) \;=\; \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{|\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|}{1+|\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|}\right)}{c} \;\leq\; \frac{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}(1)}{c} \;=\; \frac{1}{c}$$

ist $\mathrm{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\Big(|\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}|\Big) < \infty$, da $c > 0$ ist.

- Sei nun $\mathcal{Q}$ die Menge aller zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße, die eine beschränkte Dichte $\dfrac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ bezüglich $\mathbb{P}$ besitzen. $\mathcal{Q}$ ist eine konvexe Menge, denn für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}$ gilt für

$$\mathbb{Q}_\alpha \;:=\; \alpha \cdot \mathbb{Q}_1 + (1 - \alpha) \cdot \mathbb{Q}_0 \quad \text{mit} \quad \alpha \in (0, 1) \tag{B.11}$$

und alle $F \in \mathcal{F}$

1. $\mathbb{P}(F) = 0 \iff \mathbb{Q}_0(F) = \mathbb{Q}_1(F) = 0 \iff \mathbb{Q}_\alpha(F) = \alpha \cdot \mathbb{Q}_1(F) + (1-\alpha) \cdot \mathbb{Q}_0(F) = 0$ („$\Longleftarrow$“ wegen $\alpha,\ 1-\alpha > 0$ und $\mathbb{Q}_1,\ \mathbb{Q}_0 \geq 0$) sowie
2. $\mathbb{Q}_\alpha(F) = \int\limits_F \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_F (1-\alpha) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_0}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_F \left(\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}} + (1-\alpha) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_0}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right) \mathrm{d}\mathbb{P}$, wobei $\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}} + (1-\alpha) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_0}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ beschränkt ist, da $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ und $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_0}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ beschränkt sind.

Außerdem ist $\mathcal{Q}$ nichtleer, da $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}$ ist und $\mathbb{P}$ bezüglich sich selbst die beschränkte Dichte 1 (Einsfunktion) besitzt.

- Die Menge

$$\mathcal{C} \ := \ \left\{ \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right) \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \right\} \ \subset \ \mathbb{R}^N$$

ist die Menge aller (endlichen) Erwartungswerte von $\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}$, die durch zu $\mathbb{P}$ äquivalente Maße mit beschränkter Dichte bezüglich $\mathbb{P}$ gebildet werden. Gemäß (B.8) ist $\mathbf{0}^N \in \mathcal{C}$ gleichbedeutend mit der Existenz eines risikoneutralen Maßes.

Diese Menge soll im Folgenden im Zusammenhang mit Lemma B.9 verwendet werden, so dass zunächst überprüft werden muss, ob im Bezug auf die Menge $\mathcal{C}$ die Voraussetzungen von Lemma B.9 erfüllt sind:

1. $\mathcal{C}$ enthält wegen (B.10) und der Beschränktheit der Dichten bezüglich $\mathbb{P}$ ausschließlich endliche Werte, so dass $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^N$ gesichert ist (siehe Anhang B.4.6: Das Produkt einer integrierbaren und einer beschränkten Funktion ist stets integrierbar).
2. $\mathcal{C}$ ist nichtleer, da $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}$ und somit $\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right) \in \mathcal{C}$ ist.
3. $\mathcal{C}$ ist konvex: Zu allen Vektoren $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \in \mathcal{C}$ gibt es Maße $\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_1 \in \mathcal{Q}$, so dass

$$\boldsymbol{x}_0 \ = \ \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_0}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x}_1 \ = \ \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right)$$

gilt. Da $\mathcal{Q}$ konvex ist, ist auch $\mathbb{Q}_\alpha$ gemäß (B.11) mit $\alpha \in (0,1)$ in $\mathcal{Q}$ enthalten und somit auch $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_\alpha}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right) \in \mathcal{C}$. Für diesen Erwartungswert gilt nun, da $\mathbb{Q}_\alpha$ die Dichte $\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}} + (1-\alpha) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_0}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$ bezüglich $\mathbb{P}$ besitzt,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_\alpha}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right) &= \int \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_\alpha \\
&= \int \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}} + (1-\alpha) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_0}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\right) \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \alpha \int \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_1}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\,\mathrm{d}\mathbb{P} + (1-\alpha) \int \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_0}{\mathrm{d}\mathbb{P}}\,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \alpha \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right) + (1-\alpha)\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_0}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\right) \ = \ \alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0,
\end{aligned}$$

d.h. $\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{C}$.

4. Die Eigenschaft $\mathbf{0}^N \notin \mathcal{C}$ wird im Folgenden angenommen werden, um diese zum Widerspruch zur Arbitragefreiheit zu führen.

- Angenommen, es ist $\mathbf{0}^N \notin \mathcal{C}$. Dann gibt es gemäß Lemma B.9 einen Vektor $\boldsymbol{h}^{-0} \in \mathbb{R}^N$ mit

  1. $\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \boldsymbol{x} \;\geq\; 0$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}$ und
  2. $\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \boldsymbol{x}_0 \;>\; 0$ für wenigstens ein $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{C}$.

  Dies ist gleichbedeutend mit

  1. $\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big) \;\geq\; 0$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ und
  2. $\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^*}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}^*}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big) \;>\; 0$ für wenigstens ein $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{Q}$.

  Für $\mathbb{Q}^*$ ergibt sich daher sofort

  $$\mathbb{Q}^*\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;>\; 0\Big) \;>\; 0,$$

  was aufgrund der Äquivalenz von $\mathbb{Q}^*$ und $\mathbb{P}$ gleichbedeutend ist mit

  $$\mathbb{P}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;>\; 0\Big) \;>\; 0.$$

  Gemäß (B.9) würde dann die Gültigkeit von

  $$\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;\geq\; 0 \quad \mathbb{P}\text{- bzw. } \mathbb{Q}^*\text{-f.s.}$$

  die Existenz einer Arbitrage im EPM implizieren, was ein Widerspruch zur vorausgesetzten Arbitragefreiheit wäre. Daraus würde $\mathbf{0}^N \in \mathcal{C}$ und gemäß (B.8) die Existenz eines risikoneutralen Maßes folgen. Es verbleibt demnach zu zeigen, dass die Eigenschaft $\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. – unter der Annahme $\mathbf{0}^N \notin \mathcal{C}$ – tatsächlich gilt.

- Es wird im folgenden letzten Schritt

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} < 0\}}\Big) \;\geq\; 0$$

  gezeigt, woraus dann – wie gewünscht –

  $$\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \;\geq\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

  folgt. Sei nun $(\phi_n)_{n=2,3,\ldots}$ mit

  $$\phi_n \;:=\; \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdot \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} < 0\}} + \frac{1}{n} \cdot \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \geq 0\}}$$

  eine Folge von Zufallsgrößen. Offensichtlich ist

  $$\lim_{n \to \infty} \phi_n \;=\; \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} < 0\}}.$$

Gemäß dem Satz von der majorisierten Konvergenz („Satz von Lebesgue") ist dann

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \mathbb{1}_{\{\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} < 0\}}\Big) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \phi_n\Big).$$

Es genügt demnach,

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \phi_n\Big) \;\geq\; 0 \qquad \text{für alle } n = 2, 3, \ldots$$

zu zeigen. Wegen

$$\frac{1}{n} \;\leq\; \phi_n \;\leq\; 1 - \frac{1}{n}$$

ist auch $\frac{1}{n} \leq \mathrm{E}^{\mathbb{P}}(\phi_n) \leq 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n = 2, 3, \ldots$ und somit

$$\frac{\phi_n}{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}(\phi_n)}$$

eine beschränkte streng positive Dichte bezüglich $\mathbb{P}$. Somit sind die Maße

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_n}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \;:=\; \frac{\phi_n}{\mathrm{E}^{\mathbb{P}}(\phi_n)} \quad \text{für } n = 2, 3, \ldots$$

sämtlich in $\mathcal{Q}$ enthalten und folglich gilt – gemäß obiger Argumentation unter der Annahme $\mathbf{0}^N \notin \mathcal{C}$ –

$$\mathrm{E}^{\mathbb{P}}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0} \cdot \phi_n\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_n}\Big(\boldsymbol{h}^{-0} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{Y}}^{-0}\Big) \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{P}}(\phi_n) \;\geq\; 0$$

für alle $n = 2, 3, \ldots$. ∎

B.7 Beweis des 2. Fundamentalsatzes im EPM

Von Satz 2.35 verbleibt zu zeigen, dass aus der Eindeutigkeit des risikoneutralen Maßes die Vollständigkeit folgt. Außerdem soll in diesem Fall $\dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \le N+1$ gelten.

Zunächst jedoch soll die Menge der replizierbaren Auszahlungprofile mit Hilfe von $\mathcal{L}^p$-Räumen charakterisiert werden.

Lemma B.10 *Gegeben seien ein arbitragefreies* EPM $\Big(n, \mathbb{T}, \Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big), S^0, \ldots, S^N\Big)$ *sowie*

$$\underset{\sim}{\mathcal{V}} := \Big\{ \underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{h}) \mid \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^{N+1} \Big\}$$

die Menge aller zu replizierbaren Auszahlungsprofilen gehörigen diskontierten Auszahlungsprofile. Dann gilt

$$\dim \underset{\sim}{\mathcal{V}} \le \dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big).$$

Ist das EPM *darüber hinaus noch vollständig, gilt sogar*

$$\dim \underset{\sim}{\mathcal{V}} = \dim \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

Beweis: In einem arbitragefreien EPM ist jedes zu einem replizierbaren Auszahlungsprofil C gehörige diskontierte Auszahlungsprofil $\underset{\sim}{C}$ integrierbar bezüglich jedes beliebigen risikoneutralen Maßes $\mathbb{Q}$, d.h.,

$$\underset{\sim}{\mathcal{V}} \subset \mathcal{L}^1\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\Big).$$

Allgemein ist (da jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ein endliches Maß ist)

$$\mathcal{L}^1\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\Big) \subset \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\Big),$$

wobei $\mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\Big)$ die Menge der $\mathbb{Q}$-f.s. endlichen (d.h. reellwertigen) Zufallsgrößen beschreibt. Aufgrund der Äquivalenz von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ ist

$$\mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}\Big) = \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big),$$

folglich

$$\underset{\sim}{\mathcal{V}} \subset \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$$

und somit

$$\dim \underset{\sim}{\mathcal{V}} \le \dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big).$$

Ist das EPM außerdem noch vollständig, ist jede reellwertige Zufallsgröße replizierbar. In diesem Fall stimmen – bis auf $\mathbb{P}$-Nullmengen – $\underset{\sim}{\mathcal{Y}}$ und $\mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ überein. Demnach gilt

$$\dim \underset{\sim}{\mathcal{Y}} \;=\; \dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big). \qquad \blacksquare$$

Bemerkung: Die Menge $\underset{\sim}{\mathcal{Y}}$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit

$$\dim \underset{\sim}{\mathcal{Y}} \;\leq\; N+1.$$

Im Fall der Arbitragefreiheit und Vollständigkeit eines gegebenen EPM ist somit auch

$$\dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \;\leq\; N+1.$$

Die Zustandsmenge Ω lässt sich demnach in diesem Fall in höchstens $N+1$ „Hauptbestandteile" aufspalten, die in folgender Definition als „Atome" bezeichnet werden.

Definition B.11 *Sei* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Ereignis* $A \in \mathcal{F}$ *heißt* ***Atom*** *von* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$*, falls*

$$\mathbb{P}(A) \;>\; 0 \qquad \textit{und} \qquad \mathbb{P}(B) \;\in\; \{0, \mathbb{P}(A)\} \quad \textit{für alle } B \subset A$$

gilt.

Bemerkung: Die Hinzunahme einer beliebigen Nullmenge zu einem Atom erzeugt wieder ein Atom. Atome sind demnach bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt.

Lemma B.12 *Für alle* $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ *gilt*

$$\begin{aligned} &\dim \mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \\ =\;\; &\sup\Big\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \textit{ Partition } A_1, \ldots, A_n \textit{ von } \Omega \textit{ mit } A_i \in \mathcal{F} \textit{ und } \mathbb{P}(A_i) > 0 \ (i = 1, \ldots, n)\Big\}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Außerdem ist $n_0 := \dim \mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) < \infty$ *genau dann, wenn eine Partition von* Ω *in* n_0 *Atome von* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ *existiert.*

Beweis: Sei $A_1, \ldots, A_n$ eine Partition von Ω (d.h. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$) mit $A_i \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(A_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann sind die Zufallsgrößen $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ linear unabhängige Vektoren in $\mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ (da die Indikatorfunktionen beschränkt sind, sind sie in $\mathcal{L}^\infty$ und damit auch in allen $\mathcal{L}^p$ mit $p \in \{0\} \cup [1, \infty]$ enthalten) und es gilt folglich

$$\dim \mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \;\geq\; n.$$

Für

$$\sup\Big\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ Partition } A_1, \ldots, A_n \text{ von } \Omega \text{ mit } A_i \in \mathcal{F} \text{ und } \mathbb{P}(A_i) > 0 \; (i = 1, \ldots, n)\Big\} \;=\; \infty$$

ist die Gleichheit (B.12) offensichtlich. Ist nun

$$\sup\Big\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ Partition } A_1, \ldots, A_n \text{ von } \Omega \text{ mit } A_i \in \mathcal{F} \text{ und } \mathbb{P}(A_i) > 0 \; (i = 1, \ldots, n)\Big\} \;<\; \infty$$

sowie n_0 das entsprechende Maximum und $A_1, \ldots, A_{n_0}$ die dazugehörige Partition, so sind $A_1, \ldots, A_{n_0}$ Atome, da ansonsten n_0 kein Maximum wäre. In diesem Fall ist jede Zufallsgröße auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ auf den Ereignissen $A_1, \ldots, A_{n_0}$ $\mathbb{P}$-f.s. konstant und folglich $\mathbb{P}$-f.s. gleich einer Linearkombination der Zufallsgrößen $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_{n_0}}$, die somit eine Basis des $\mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ bilden, d.h.

$$\dim \mathcal{L}^p\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \;=\; n_0. \qquad \blacksquare$$

Das folgende Lemma liefert eine hinreichende Bedingung für die Replizierbarkeit, die im darauf folgenden Satz von entscheidender Bedeutung sein wird.

Lemma B.13 *In einem arbitragefreien* EPM *sei für ein Auszahlungsprofil C die Menge $\mathcal{Q}(C)$ diejenige Menge von risikoneutralen Maßen, für die das diskontierte Auszahlungsprofil $\underset{\sim}{C}$ integrierbar ist. Ist dann die dazugehörige Menge*

$$\underset{\sim}{\mathcal{C}}_0(C) \;:=\; \Big\{\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{C}) \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}(C)\Big\}$$

einelementig, so ist C replizierbar.

Ohne Beweis.

Satz B.14 *Ist in einem arbitragefreien* EPM *das risikoneutrale Maß eindeutig bestimmt, so ist das* EPM *vollständig. Außerdem gilt $\dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \leq N + 1$.*

Beweis: Sei C ein Auszahlungsprofil, dessen dazugehöriges diskontiertes Auszahlungsprofil $\underset{\sim}{C}$ $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt ist, d.h.

$$\underset{\sim}{C} \;\in\; \mathcal{L}^\infty\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big).$$

Somit ist $\underset{\sim}{C}$ nicht nur bezüglich $\mathbb{P}$, sondern auch bezüglich des zu $\mathbb{P}$ äquivalenten (als eindeutig bestimmt vorausgesetzten) risikoneutralen Maßes integrierbar und die Menge $\underset{\sim}{\mathcal{C}}_0(C)$ aus Lemma B.13 besteht nur aus einem einzigen Element, woraus die Replizierbarkeit von C folgt. Folglich ist

$$\mathcal{L}^\infty\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \;\subset\; \underset{\sim}{\mathcal{V}}$$

und somit

$$\dim \mathcal{L}^\infty\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \;\leq\; \dim \underset{\sim}{\mathcal{V}} \;\leq\; N + 1.$$

Da gemäß Lemma B.12 die Dimension aller $\mathcal{L}^p$-Räume übereinstimmt, ist demnach auch

$$\dim \mathcal{L}^0\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big) \;\leq\; N+1$$

und es gibt eine Partition von Ω in höchstens $N+1$ Atome. Jede Zufallsgröße auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ ist auf jedem dieser Atome $\mathbb{P}$-f.s. konstant. Da es nur endlich viele Atome gibt, ist daher jede Zufallsgröße auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ (d.h. jedes Auszahlungsprofil und auch jedes diskontierte Auszahlungsprofil) $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt und folglich – analog zur Argumentation am Anfang dieses Beweises – replizierbar, d.h., das EPM ist vollständig. ∎

B.8 Beweis des Lemmas 2.43 im MPM

(d) $\Rightarrow$ (a) Klar.

(a) $\Rightarrow$ (b) Es seien $\overline{\hat{\boldsymbol{H}}} = \Big(\hat{\boldsymbol{H}}_0, \ldots, \hat{\boldsymbol{H}}_{n-1}\Big)$ eine Arbitrage in $\mathcal{M}$ und

$$t \;:=\; \min\Big\{ s \in \{0, \ldots, n-1\} \mid \underset{\sim}{V}_{s+1}(\hat{\boldsymbol{H}}_s) \geq 0 \;\mathbb{P}\text{-f.s. und } \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_{s+1}(\hat{\boldsymbol{H}}_s) > 0\Big) > 0 \Big\}. \tag{B.13}$$

Der Zeitpunkt t ist wohldefiniert, da nach Voraussetzung (siehe (2.15))

$$\underset{\sim}{V}_n(\hat{\boldsymbol{H}}_{n-1}) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_n(\hat{\boldsymbol{H}}_{n-1}) > 0\Big) > 0$$

gilt. Da t der kleinste Zeitpunkt mit der Eigenschaft (B.13) ist, gilt für $t \geq 1$ (da ansonsten $\hat{\boldsymbol{H}}_{t-1}$ nicht definiert wäre)

$$\mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_{t-1}) < 0\Big) > 0 \quad \text{oder} \quad \underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_{t-1}) \leq 0 \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\text{entweder} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_{t-1}) < 0\Big) > 0 \quad \text{oder} \quad \underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_{t-1}) = 0 \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.}. \tag{B.14}$$

Da jede Arbitrage selbstfinanzierend ist, ist (B.14) gleichbedeutend mit

$$\text{entweder} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_{t}) < 0\Big) > 0 \quad \text{oder} \quad \underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_{t}) = 0 \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.}. \tag{B.15}$$

Diese Eigenschaft gilt auch für $t = 0$, da bei einer Arbitrage $\underset{\sim}{V}_0(\hat{\boldsymbol{H}}_0) \leq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. vorausgesetzt wird.

Sei nun $\overline{\hat{\boldsymbol{H}}}^{-0} = \Big(\hat{\boldsymbol{H}}_0^{-0}, \ldots, \hat{\boldsymbol{H}}_{n-1}^{-0}\Big)$ die zu $\overline{\hat{\boldsymbol{H}}}$ gehörige verkürzte Handelsstrategie. Allgemein gilt (allerdings nur bei Betrachtung der *diskontierten* Portfoliowerte!) für $s \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $\hat{\boldsymbol{H}}_s := \Big(\hat{H}_s^0, \ldots, \hat{H}_s^N\Big)^T$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{V}_{s+1}(\hat{\boldsymbol{H}}_s) - \underset{\sim}{V}_s(\hat{\boldsymbol{H}}_s) &= \hat{H}_s^0 + \underset{\sim}{V}_{s+1}^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_s^{-0}) - \Big(\hat{H}_s^0 + \underset{\sim}{V}_s^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_s^{-0})\Big) \\ &= \underset{\sim}{V}_{s+1}^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_s^{-0}) - \underset{\sim}{V}_s^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_s^{-0}). \end{aligned} \tag{B.16}$$

Es werden die Fälle von (B.15) unterschieden:

Fall 1: $\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t) = 0 \quad \mathbb{P}$-f.s.

Für diesen Fall ergibt sich wegen (B.16)

$$\underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_t^{-0}) - \underset{\sim}{V}_t^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_t^{-0}) \;=\; \underset{\sim}{V}_{t+1}(\hat{\boldsymbol{H}}_t) - \underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t) \;=\; \underset{\sim}{V}_{t+1}(\hat{\boldsymbol{H}}_t) \;\geq\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

so dass $\boldsymbol{H}^{-0} := \hat{\boldsymbol{H}}_t^{-0}$ wegen (B.13) die Bedingung (2.16) erfüllt.

Fall 2: $\mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t) < 0\Big) > 0$

In diesem Fall erfüllt mit $\hat{\boldsymbol{H}}_t^{-0} := \Big(\hat{H}_t^1, \ldots, \hat{H}_t^N\Big)^T$

$$\boldsymbol{H}^{-0} \;:=\; \hat{\boldsymbol{H}}_t^{-0} \cdot \mathbb{1}_{\{\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t)<0\}} \;:=\; \begin{pmatrix} \hat{H}_t^1 \cdot \mathbb{1}_{\{\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t)<0\}} \\ \vdots \\ \hat{H}_t^N \cdot \mathbb{1}_{\{\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t)<0\}} \end{pmatrix}$$

die Bedingung (2.16), denn wegen (B.16) und $\underset{\sim}{V}_{t+1}(\hat{\boldsymbol{H}}_t) \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. (siehe (B.13)) ergibt sich

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}(\boldsymbol{H}^{-0}) - \underset{\sim}{V}_t^{-0}(\boldsymbol{H}^{-0}) &= \Big(\underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_t^{-0}) - \underset{\sim}{V}_t^{-0}(\hat{\boldsymbol{H}}_t^{-0})\Big) \cdot \mathbb{1}_{\{\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t)<0\}} \\ &= \Big(\underset{\sim}{V}_{t+1}(\hat{\boldsymbol{H}}_t) - \underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t)\Big) \cdot \mathbb{1}_{\{\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t)<0\}} \\ &\geq -\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t) \cdot \mathbb{1}_{\{\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t)<0\}} \quad \mathbb{P}\text{-f.s. .} \end{aligned} \tag{B.17}$$

Der Ausdruck (B.17) ist aber nicht-negativ und sogar mit positiver Wahrscheinlichkeit positiv, da hier der Fall $\mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_t(\hat{\boldsymbol{H}}_t) < 0\Big) > 0$ betrachtet wird.

(b) $\Rightarrow$ (c) Für den Zeitpunkt $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ und das verkürzte Portfolio $\boldsymbol{H}^{-0}$ z. Ztpkt. t aus (b) gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\mathbb{P}\bigg(\underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) > \underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) \;\text{ und }\; \Big|\boldsymbol{H}^{-0}\Big| \leq c\bigg) > 0$$

gilt. Dabei bezeichnet für $\boldsymbol{H}^{-0} := \Big(H^1, \ldots, H^N\Big)^T$

$$\Big|\boldsymbol{H}^{-0}\Big| \;:=\; \max_{i\in\{1,\ldots,N\}} \Big|H^i\Big|.$$

Denn: Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$Z^k \;:=\; \bigg\{\omega \in \Omega : \underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big)(\omega) > \underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big)(\omega) \;\text{ und }\; \max_{i\in\{1,\ldots,N\}} \Big|H^i(\omega)\Big| \leq k\bigg\}.$$

Offensichtlich ist

$$Z^1 \subset Z^2 \;\ldots \quad \text{und} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} Z^k = \bigg\{\omega \in \Omega : \underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big)(\omega) > \underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big)(\omega)\bigg\}.$$

Aufgrund der Stetigkeit des Maßes $\mathbb{P}$ (siehe z.B. Bauer ...) gilt nach Voraussetzung

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\Big(Z^k\Big) \;=\; \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z^k\bigg) \;=\; p \;>\; 0.$$

Somit gibt es für jedes ε mit $0 < \varepsilon < p$ ein $k_0 := k_0(\varepsilon)$, so dass für alle $k \geq k_0$

$$\mathbb{P}\Big(Z^k\Big) \;\geq\; p - \varepsilon \;>\; 0$$

gilt.

(c) $\Rightarrow$ (d) Grafische Veranschaulichung:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
s & 0 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & n-1 \quad n \\
\hline
\boldsymbol{H}_s = \begin{pmatrix} H_s^0 \\ \boldsymbol{H}_s^{-0} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ \boldsymbol{0}^N \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \boldsymbol{0}^N \end{matrix} & \begin{matrix} -\underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) \\ \boldsymbol{H}^{-0} \end{matrix} & \begin{matrix} \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \\ \boldsymbol{0}^N \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \\ \boldsymbol{0}^N \end{matrix} \\
\hline
\underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_s\Big) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) & \cdots & \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \\
\underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_{s-1}\Big) & & & 0 & 0 & \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) & \cdots & \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \quad \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \\
& & & & & \multicolumn{3}{l}{= \underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) - \underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) \quad \text{aus (b)}}
\end{array}
$$

Mit Hilfe des Zeitpunkts $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ aus (b) und des verkürzten Portfolios $\boldsymbol{H}^{-0}$ z. Ztpkt. t aus (c) lässt sich folgende verkürzte Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0} = \Big(\boldsymbol{H}_0^{-0}, \boldsymbol{H}_1^{-0}, \ldots, \boldsymbol{H}_{n-1}^{-0}\Big)$ erzeugen:

$$\boldsymbol{H}_t^{-0} := \boldsymbol{H}^{-0} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{H}_s^{-0} \equiv \boldsymbol{0}^N \quad \text{für } s \in \{0, \ldots, n-1\} \setminus \{t\} \tag{B.18}$$

Offensichtlich ist $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0}$ beschränkt.

Diese verkürzte Handelsstrategie wird nun folgendermaßen zu einer nicht verkürzten Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}} = \Big(\boldsymbol{H}_0, \boldsymbol{H}_1, \ldots, \boldsymbol{H}_{n-1}\Big)$ mit

$$\boldsymbol{H}_s := \begin{pmatrix} H_s^0 \\ \boldsymbol{H}_s^{-0} \end{pmatrix} \quad (s = 0, \ldots, n-1)$$

erweitert:

1. $H_0^0 := -\underset{\sim}{V}_0^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_0^{-0}\Big)$
   Damit ist
   $$\underset{\sim}{V}_0\Big(\boldsymbol{H}_0\Big) = H_0^0 + \underset{\sim}{V}_0^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_0^{-0}\Big) = 0. \tag{B.19}$$

2. Für $s = 1, \ldots, n-1$ sei iterativ
   $$H_s^0 := \underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_{s-1}\Big) - \underset{\sim}{V}_s^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_s^{-0}\Big). \tag{B.20}$$
   Damit ist
   $$\underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_s\Big) = H_s^0 + \underset{\sim}{V}_s^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_s^{-0}\Big) = \underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_{s-1}\Big)$$
   für $s = 1, \ldots, n-1$, d.h., $\overline{\boldsymbol{H}}$ ist selbstfinanzierend.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\overline{\boldsymbol{H}}$ eine Arbitrage ist:

– Aufgrund der Konstruktion ist gemäß (B.19) $\underset{\sim}{V}_0\Big(\boldsymbol{H}_0\Big) = 0$.

– Für $t \geq 1$ ist wegen (B.18) $\boldsymbol{H}_0^{-0} \equiv \mathbf{0}^N$ und somit $H_0^0 = -\underset{\sim}{V}_0^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_0^{-0}\Big) = 0$.
In diesem Fall ergibt sich für $s < t$ $(s \geq 0)$ wegen $\boldsymbol{H}_s^{-0} \equiv \mathbf{0}^N$

$$\underset{\sim}{V}_s^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_s^{-0}\Big) = 0,$$

woraus man aus (B.20) wegen $H_0^0 = 0$ für $s \geq 1$ induktiv $\boldsymbol{H}_{s-1} \equiv \mathbf{0}^{N+1}$ sowie $\underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_{s-1}\Big) = 0$ und $H_s^0 = 0$ erhält. Daraus folgt (für den Fall $t \geq 1$)

$$\boldsymbol{H}_{t-1} \equiv \mathbf{0}^{N+1}. \tag{B.21}$$

– Für $t = 0$ ist wegen (B.18) $H_0^0 = -\underset{\sim}{V}_0^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_0^{-0}\Big) = -\underset{\sim}{V}_0^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big)$.
Für $t \geq 1$ ist wegen (B.21) und (B.18)

$$H_t^0 \;=\; \underset{\sim}{V}_t\Big(\boldsymbol{H}_{t-1}\Big) - \underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_t^{-0}\Big) \;=\; -\underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_t^{-0}\Big) \;=\; -\underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big). \tag{B.22}$$

Somit gilt (B.22) auch für $t \geq 0$, und es ergibt sich

$$\underset{\sim}{V}_t\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \;=\; H_t^0 + \underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) \;=\; 0.$$

– Für $t+1$ erhält man dann

$$\underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big) \;=\; H_t^0 + \underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_t^{-0}\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) + H_t^0 \;=\; \underset{\sim}{V}_{t+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big) - \underset{\sim}{V}_t^{-0}\Big(\boldsymbol{H}^{-0}\Big).$$

Folglich gilt wegen (2.16) gemäß Voraussetzung

$$\underset{\sim}{V}_{t+1}(\boldsymbol{H}_t) \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\Big(\underset{\sim}{V}_{t+1}(\boldsymbol{H}_t) > 0\Big) > 0 \tag{B.23}$$

Für $t = n-1$ ist somit bereits gezeigt, dass $\overline{\boldsymbol{H}}$ eine Arbitrage ist.

– Für $t < n-1$ und $s > t$ $(s \leq n-1)$ gilt $\underset{\sim}{V}_s^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_s^{-0}\Big) = 0$, da wegen (B.18) $\boldsymbol{H}_s^0 \equiv \mathbf{0}^N$ ist. Somit ergibt sich aus (B.20)

$$H_s^0 \;=\; \underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_{s-1}\Big) - \underset{\sim}{V}_s^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_s^{-0}\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_{s-1}\Big).$$

Wegen $\underset{\sim}{V}_{s+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_s^{-0}\Big) = 0$ erhält man weiter

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{V}_{s+1}\Big(\boldsymbol{H}_s\Big) \;&=\; H_s^0 + \underset{\sim}{V}_{s+1}^{-0}\Big(\boldsymbol{H}_s^{-0}\Big) \\ &=\; H_s^0 \;=\; \underset{\sim}{V}_s\Big(\boldsymbol{H}_{s-1}\Big), \end{aligned}$$

woraus rekursiv

$$\underset{\sim}{V}_{s+1}\Big(\boldsymbol{H}_s\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big),$$

also insbesondere

$$\underset{\sim}{V}_{n+1}\Big(\boldsymbol{H}_n\Big) \;=\; \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big)$$

folgt. Wegen (B.23) ist somit gezeigt, dass $\overline{\boldsymbol{H}}$ eine Arbitrage ist.

■

B.9 Bedingte Erwartungen

Definition: Es seien $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{C}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und X eine integrierbare oder nichtnegative Zufallsgröße auf $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$.
Eine $\mathcal{C}$-messbare und integrierbare oder nichtnegative Zufallsgröße Y heißt **bedingte Erwartung von X bez. $\mathcal{C}$**, falls

$$\int\limits_C Y \,\mathrm{d}\mathbb{P} \;=\; \int\limits_C X \,\mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{für alle } C \in \mathcal{C}$$

gilt. **Bezeichnung:** $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{C}) := Y$

Bemerkung: $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{C})$ ist nur $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig bestimmt. Sämtliche Aussagen, bei denen bedingte Erwartungen auftreten, gelten somit im Allgemeinen auch nur $\mathbb{P}$-fast sicher.

Beispiel: Sei $(B_i)_{i\in I},\ I \subset \mathbb{N}$, eine disjunkte Zerlegung von Ω mit $B_i \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(B_i) > 0$ sowie $\mathcal{C}_{(B_i)_{i\in I}}$ die von $(B_i)_{i\in I}$ erzeugte Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.
Dann ist $\mathrm{E}\Big(X \mid \mathcal{C}_{(B_i)_{i\in I}}\Big) \;=\; \sum\limits_{i\in I} \mathrm{E}\left(X \mid B_i\right) \cdot \mathbb{1}_{B_i}$ mit $\mathrm{E}\left(X \mid B_i\right) \;:=\; \dfrac{\int_{B_i} X \,\mathrm{d}\mathbb{P}}{\mathbb{P}(B_i)}$.

Eigenschaften: Es seien X, Y integrierbare oder nichtnegative Zufallsgrößen auf $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$ und $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$.

1. X $\mathcal{C}$-messbar: $\quad \mathrm{E}(X \mid \mathcal{C}) = X \quad \mathbb{P}$-f.s. **Spezialfall:** $\mathrm{E}(X \mid \mathcal{F}) = X \quad \mathbb{P}$-f.s.
2. $\mathrm{E}(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \mathrm{E}X$
3. $X \;\le\; Y \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{E}\left(X \mid \mathcal{C}\right) \;\le\; \mathrm{E}\left(Y \mid \mathcal{C}\right) \quad \mathbb{P}$-f.s.
4. $\mathrm{E}\left(\alpha X + \beta Y \mid \mathcal{C}\right) \;=\; \alpha\, \mathrm{E}\left(X \mid \mathcal{C}\right) + \beta\, \mathrm{E}\left(Y \mid \mathcal{C}\right) \quad \mathbb{P}$-f.s. $\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha, \beta \ge 0)$
5. $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$: $\quad \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\left(X \mid \mathcal{C}_1\right) \mid \mathcal{C}_2\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\left(X \mid \mathcal{C}_2\right) \mid \mathcal{C}_1\Big) \;=\; \mathrm{E}\left(X \mid \mathcal{C}_1\right) \quad \mathbb{P}$-f.s.
   („Tower property“, „Die kleinste σ-Algebra gewinnt.“)
6. $\mathcal{C}_1$ unabhängig von $\sigma\Big(\sigma(X), \mathcal{C}\Big)$: $\quad \mathrm{E}\Big(X \mid \sigma(\mathcal{C}, \mathcal{C}_1)\Big) \;=\; \mathrm{E}\left(X \mid \mathcal{C}\right) \quad \mathbb{P}$-f.s.
   Spezialfall: $\mathcal{C}$ unabhängig von $\sigma(X)$: $\quad \mathrm{E}\left(X \mid \mathcal{C}\right) \;=\; \mathrm{E}X \quad \mathbb{P}$-f.s.
   („Unabhängige σ-Algebren können weggelassen werden.“)
7. X $\mathcal{C}$-messbar und $\mathrm{E}|XY| < \infty$ oder X, Y nichtnegativ:
   $\mathrm{E}\left(XY \mid \mathcal{C}\right) \;=\; X\mathrm{E}\left(Y \mid \mathcal{C}\right) \quad \mathbb{P}$-f.s. („Taking out what is known.“)
   $X \in \mathcal{L}^p(\mathbb{P}),\ Y \in \mathcal{L}^q(\mathbb{P})\ (1 \le p, q \le \infty)$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1 \;\Longrightarrow\; \mathrm{E}|XY| < \infty$ [15]
   Spezialfälle: X beschränkt $(p = \infty)$, X, Y quadratisch integrierbar $(p, q = 2)$

[15] $\mathcal{L}^p(\mathbb{P})$ – Menge aller p-fach $\mathbb{P}$-integrierbaren Zuf.gr. $(1 \le p < \infty)$ bzw. $\mathbb{P}$-f.s. beschränkten Zuf.gr. $(p = \infty)$

8. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathrm{E}|\varphi(X)| < \infty$: $\quad \mathrm{E}(\varphi(X) \mid \mathcal{C}) \;\geq\; \varphi\Big(\mathrm{E}(X \mid \mathcal{C})\Big) \quad \mathbb{P}$-f.s.
(Jensen'sche Ungleichung)

B.10 Beweis des 1. Fundamentalsatzes im MPM

Von Satz 2.47 verbleibt zu zeigen, dass aus der Arbitragefreiheit des MPM die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes folgt, das darüber hinaus noch eine beschränkte Dichte bezüglich $\mathbb{P}$ besitzt.

- Ein MPM kann als Verkettung von n EPM betrachtet werden, wobei die Preise der Finanzinstrumente am Anfang der jeweiligen Handelsperiode nicht – wie im „klassischen“ EPM – als konstant, sondern als messbar bezüglich einer σ-Algebra $\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ angesehen werden. Für die t-te Handelsperiode ($t \in \{1, \ldots, n\}$) zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t wäre speziell

  $$\tilde{\mathcal{F}} \; = \; \mathcal{F}_{t-1} \qquad \text{sowie} \qquad \mathcal{F} \; = \; \mathcal{F}_t.$$

  Die definierende Eigenschaft (2.9) für ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}$ wäre dann entsprechend

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\Big) \; = \; \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t-1} \; \mathbb{P}\text{-f.s.} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}\Big) \; = \; 0 \; \mathbb{P}\text{-f.s.}, \tag{B.24}$$

  wobei in diesem Fall zusätzlich noch

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\Big) \; < \; \infty$$

  gefordert werden muss (das Integral $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\Big)$ existiert wegen $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \geq 0$ zwar stets, hat aber evtl. den Wert ∞).

- Nun wird durch Rückwärtsinduktion (von n nach 1) gezeigt, dass es für jedes, aus einer Handelsperiode $t \in \{1, \ldots, n\}$ abgeleitete EPM ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}_t$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

  1. $\mathbb{Q}_t$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$.
  2. $\mathbb{Q}_t$ besitzt eine beschränkte Dichte bezüglich $\mathbb{P}$.
  3. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k\Big) \; < \; \infty$ für alle $k = t, t+1, \ldots, n$
  4. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \; = \; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$ für alle $k = t, t+1, \ldots, n$

  In diesem Fall wäre nämlich $\mathbb{Q}_1$ das gesuchte äquivalente Martingalmaß, denn aus 4. ergäbe sich für $s < t$, $s, t \in \{0, \ldots, n\}$, mit den bekannten Eigenschaften von bedingten Erwartungen

  $$\begin{aligned} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_s \mid \mathcal{F}_s\Big) \; &= \; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\Big(\sum_{k=s+1}^{t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1}\Big) \mid \mathcal{F}_s\Big) \\ = \; \sum_{k=s+1}^{t} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_s\Big) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=s+1}^{t} \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\Big(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\big) \mid \mathcal{F}_s\Big) \;=\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und somit die charakteristische Martingal-Eigenschaft

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_1}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \mid \mathcal{F}_s\big) \;=\; \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_s \quad \mathbb{Q}_1\text{-f.s. .}$$

- Da n.V. das MPM arbitragefrei ist, gibt es gemäß Lemma 2.43 auch keine Einperioden-Arbitrage. Somit sind alle im Folgenden betrachteten EPM arbitragefrei.

- Induktionsanfang für $t = n$: Es wird die Handelsperiode zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n betrachtet. Satz 2.31 gilt auch in dieser (allgemeineren) Situation (siehe auch Bemerkung zu Satz 2.31), d.h., es gibt ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q}_n$ mit den Eigenschaften

  1. $\mathbb{Q}_n$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$.
  2. $\mathbb{Q}_n$ besitzt eine beschränkte Dichte bezüglich $\mathbb{P}$.
  3. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_n}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n\big) \;<\; \infty$
  4. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_n}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_n - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) \;=\; 0 \quad \mathbb{P}$-f.s.

- Die obigen genannten 4 Eigenschaften mögen nun für $t+1$ mit $1 \leq t < n-1$ gelten.

- Für t wird dann ein EPM mit dem physischen Maß $\mathbb{Q}_{t+1}$ betrachtet. Es ergibt sich aus der verallgemeinerten Version von Satz 2.31

  1. $\mathbb{Q}_t$ ist äquivalent zu $\mathbb{Q}_{t+1}$.
  2. $\mathbb{Q}_t$ besitzt eine beschränkte Dichte bezüglich $\mathbb{Q}_{t+1}$.
  3. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\big) \;<\; \infty$
  4. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}\big) \;=\; 0 \quad \mathbb{Q}_{t+1}$-f.s.

  Aufgrund der (gemäß Induktionsannahme) Äquivalenz von $\mathbb{Q}_{t+1}$ und $\mathbb{P}$ ergibt sich sofort

  1. $\mathbb{Q}_t$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$.
  4. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}\big) \;=\; 0 \quad \mathbb{P}$-f.s.

  Da (n. Ind.an.) $\mathbb{Q}_{t+1}$ eine beschränkte Dichte bezüglich $\mathbb{P}$ besitzt, besitzt auch $\mathbb{Q}_t$ die beschränkte Dichte

  $$\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{P}} \;=\; \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$$

  bezüglich $\mathbb{P}$. Somit gilt Eigenschaft 2. .

- Zu Eigenschaft 3.:

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k\Big) \;<\; \infty$$

gilt auch für $k = t+1, \ldots, n$, denn für ein beliebiges, aber festes $k = t+1, \ldots, n$ ist

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\bigg(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}\bigg).$$

Da (n. Ind.ann.) $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_{t+1})$ und $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}$ beschränkt ist, also $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}} \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{Q}_{t+1})$ gilt, ist auch

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}} \;\in\; \mathcal{L}^1(\mathbb{Q}_{t+1})$$

(siehe Abschnitt B.4.6), d.h. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}\Big) < \infty$ und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k\Big) \;<\; \infty.$$

- Es verbleibt zu zeigen, dass Eigenschaft 4.

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \;=\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{auch für } k = t+1, \ldots, n$$

gilt. Dies geschieht, indem

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{für } k = t+1, \ldots, n$$

nachgewiesen wird: Sei $k = t+1, \ldots, n$ beliebig, aber fest. Wegen $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k\Big) < \infty$ existiert auch $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big)$ und somit $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big)$ wegen

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

ebenfalls. Gemäß Definition der bedingten Erwartung und wegen der Eigenschaften von Maßen mit Dichten, der $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit der Dichte $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}$ sowie der Äquivalenz von $\mathbb{Q}_t$ und $\mathbb{Q}_{t+1}$ gilt für alle $F \in \mathcal{F}_{k-1}$ ($k-1 \geq t$!)

$$\begin{aligned}
\int_F \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_t \;&=\; \int_F \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1}\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_t \\
=\; &\int_F \Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1}\Big) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1} \\
=\; &\int_F \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\bigg(\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1}\Big) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\bigg)\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1} \\
=\; &\int_F \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\bigg(\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1}\Big) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}} \mid \mathcal{F}_{k-1}\bigg) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_F \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}_{t+1}}{\mathrm{d}\mathbb{Q}_t}\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_t \\
&= \int_F \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big)\,\mathrm{d}\mathbb{Q}_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}
\end{aligned}
$$

und folglich

$$
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}_t}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}_{t+1}}\Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_k - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}\ .
$$

B.11 Beweis des Lemmas 2.51 im MPM

Es ist zu zeigen, dass $\underset{\sim}{V}$ folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\underset{\sim}{V}$ ist adaptiert an $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t=0,\ldots,n}$.
2. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(|\underset{\sim}{V}_t|) < \infty$ für alle $t = 0, \ldots, n$
3. $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{V}_t \mid \mathcal{F}_s) = \underset{\sim}{V}_s$ $\mathbb{Q}$-f.s. für alle $s < t,\ \ s, t \in \{0, \ldots, n\}$.

Zu 1.: $\underset{\sim}{V}_t(\boldsymbol{H}_t)$ ist für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ offensichtlich $\mathcal{F}_t$-messbar und $\underset{\sim}{V}_n(\boldsymbol{H}_{n-1})$ ist $\mathcal{F}_n$-messbar. Es ist zu bemerken, dass das Auszahlungsprofil C trotz der Replizierbarkeit (d.h. $C = V_n(\boldsymbol{H}_{n-1})$ $\mathbb{P}$-f.s.) nicht $\mathcal{F}_n$-messbar zu sein braucht, da es auf $\mathbb{P}$-Nullmengen, die möglicherweise nicht in $\mathcal{F}_n$ enthalten sind, von $V_n(\boldsymbol{H}_{n-1})$ abweichen kann.

Zu 3.:

- Die angegebene Eigenschaft ist gleichbedeutend mit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t) \ = \ \underset{\sim}{V}_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s. für alle } t \in \{0, \ldots, n-1\}, \tag{B.25}$$

  da zum einen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ äquivalent sind und zum anderen aus (B.25) für $t \in \{1, \ldots, n\}$ und $m := m(t) \in \{1, \ldots, t\}$ wegen Eigenschaft 5 von bedingten Erwartungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_t \mid \mathcal{F}_{t-m}\Big) &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\ldots \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\Big) \mid \mathcal{F}_{t-2}\Big) \ldots \mid \mathcal{F}_{t-m}\Big) \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\ldots \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-2}\Big) \ldots \mid \mathcal{F}_{t-m}\Big) \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\ldots \underset{\sim}{V}_{t-2} \ldots \mid \mathcal{F}_{t-m}\Big) \\
&= \underset{\sim}{V}_{t-m} \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

  folgt.

- Allgemein gilt für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$, da $\overline{\boldsymbol{H}}$ selbstfinanzierend ist (d.h. $\underset{\sim}{V}_{t+1} = \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_{t+1}\Big)$ $= \underset{\sim}{V}_{t+1}\Big(\boldsymbol{H}_t\Big)$ $\mathbb{P}$-f.s. für $t \in \{0, \ldots, n-2\}$),

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{V}_{t+1} - \underset{\sim}{V}_t &= \boldsymbol{H}_t \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \boldsymbol{H}_t \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \\
&= \boldsymbol{H}_t \cdot \Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\Big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.,}
\end{aligned}$$

  woraus

$$\underset{\sim}{V}_t \ = \ \underset{\sim}{V}_{t+1} - \boldsymbol{H}_t \cdot \Big(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\Big) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{B.26}$$

  folgt.

- Betrachtet werde der Fall, dass die verkürzte replizierende Handelsstrategie $\overline{\boldsymbol{H}}^{-0}$ $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt ist:

  – Analog zu (2.17) ist

$$\underset{\sim}{V}_t \;=\; \underset{\sim}{V}_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \sum_{i=1}^{N} H_s^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{s+1}^i - \underset{\sim}{S}_s^i) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{für } t \in \{1, \ldots, n\}. \tag{B.27}$$

  – $\underset{\sim}{V}_0$ ist aufgrund der $\mathcal{F}_0$-Messbarkeit $\mathbb{P}$-f.s. konstant, somit sowohl $\mathbb{P}$-f.s. als auch $\mathbb{Q}$-f.s. beschränkt und folglich $\mathbb{Q}$-integrierbar.

  – H_s^i ist für $s \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $i \in \{1, \ldots, N\}$ nach Voraussetzung $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt und somit auch $\mathbb{Q}$-f.s. beschränkt, d.h. $H_s^i \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{Q})$.

  – $(\underset{\sim}{S}_{s+1}^i - \underset{\sim}{S}_s^i)$ ist für $s \in \{0, \ldots, n-1\}$ und $i \in \{1, \ldots, N\}$ $\mathbb{Q}$-integrierbar, da der diskontierte Preivektorprozess $\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right)_{t=0,\ldots,n}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, d.h., $(\underset{\sim}{S}_{s+1}^i - \underset{\sim}{S}_s^i) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$.

  – Somit ist auch das Produkt $H_s^i \cdot (\underset{\sim}{S}_{s+1}^i - \underset{\sim}{S}_s^i) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$ und folglich ebenfalls $\underset{\sim}{V}_t \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$, d.h., die Zufallsgrößen $\underset{\sim}{V}_0, \ldots, \underset{\sim}{V}_n$ sind $\mathbb{Q}$-integrierbar.

  – Analog zum Beweis von Lemma 2.46 ergibt sich

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\boldsymbol{H}_t \cdot \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \;=\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

  und somit

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) \;=\; \underset{\sim}{V}_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

  für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$.

  – Für den Fall einer $\mathbb{P}$-f.s. beschränkten verkürzten replizierenden Handelsstrategie ist damit alles gezeigt. Die folgenden Überlegungen betreffen somit ausschließlich den Fall von stark replizierbaren Auszahlungsprofilen, deren verkürzte replizierende Handelsstrategien nicht $\mathbb{P}$-f.s. beschränkt sind, da hier zunächst weder die Integrierbarkeit von $\underset{\sim}{V}_0, \ldots, \underset{\sim}{V}_n$ noch die Existenz der in 3. benötigten bedingten Erwartungen vorausgesetzt werden kann.

- O.B.d.A. sei $\underset{\sim}{C} \geq 0$, denn andernfalls können die folgenden Betrachtungen für den Positivteil $\underset{\sim}{C}^+ := \left(\underset{\sim}{C}\right)^+$ bzw. den Negativteil $\underset{\sim}{C}^- := \left(-\underset{\sim}{C}\right)^+$ und deren replizierende Handelsstrategien (die nach Voraussetzung existieren) getrennt durchgeführt werden.

- Zunächst wird

$$\underset{\sim}{V}_t \;\geq\; 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s} \tag{B.28}$$

  für alle $t \in \{0, \ldots, n\}$ durch Rückwärtsinduktion gezeigt.

  Für $t = n$ ist dies wegen $\underset{\sim}{V}_n = \underset{\sim}{C}$ $\mathbb{P}$-f.s. klar.

Die Behauptung (B.28) gelte für $t+1 \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Für t erhält man aus (B.26)

$$\underset{\sim}{V}_t = \underset{\sim}{V}_{t+1} - \boldsymbol{H}_t \cdot \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.},$$

woraus wegen der Induktionsannahme

$$\underset{\sim}{V}_t \geq -\boldsymbol{H}_t \cdot \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

folgt.

Sei nun ein beliebiges $c > 0$ gegeben. Multiplikation mit $\mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}}$ führt – unter Verwendung der Notation $\boldsymbol{H}_t^{(c)} := \boldsymbol{H}_t \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}}$ – zu

$$\underset{\sim}{V}_t \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} = \boldsymbol{H}_t^{(c)} \cdot \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \geq -\boldsymbol{H}_t^{(c)} \cdot \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right) \quad \mathbb{P}\text{-f.s. .}$$

Da $\boldsymbol{H}_t^{(c)}$ beschränkt und sowohl $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t$ als auch $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1}$ aufgrund der Martingaleigenschaft $\mathbb{Q}$-integrierbar sind, sind die Produkte auf beiden Seiten der Ungleichung $\mathbb{Q}$-integrierbar. Somit „dürfen" bedingte Erwartungen gebildet werden, und es ergibt sich, da $\underset{\sim}{V}_t \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}}$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist, aus den Eigenschaften 1 und 3 von bedingten Erwartungen sowie analog zum Beweis von Lemma 2.46

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{V}_t \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{V}_t \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&\geq -\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\boldsymbol{H}_t^{(c)} \cdot \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= -\boldsymbol{H}_t^{(c)} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s. .}
\end{aligned}$$

Somit ist $\underset{\sim}{V}_t \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für ein beliebiges $c > 0$, und man erhält für $c \to \infty$ die für diesen Beweisschritt gewünschte Aussage.

- Somit sind zunächst die bedingten Erwartungen von $\underset{\sim}{V}_0, \ldots, \underset{\sim}{V}_n$ wohldefiniert. Sei nun wieder wie im vorangegangenen Beweisschritt ein beliebiges $c > 0$ gegeben und $\boldsymbol{H}_t^{(c)} = \boldsymbol{H}_t \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}}$ für $t \in \{0, \ldots, n-1\}$. Mit den bekannten Begründungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\right) - \underset{\sim}{V}_t\right) \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{V}_{t+1} \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} \mid \mathcal{F}_t\right) - \underset{\sim}{V}_t \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{V}_{t+1} \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} - \underset{\sim}{V}_t \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\boldsymbol{H}_t^{(c)} \cdot \left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t\right) \mid \mathcal{F}_t\right) \\
&= \boldsymbol{H}_t^{(c)} \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{t+1} - \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_t \mid \mathcal{F}_t\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s. .}$$

Somit ist $\left(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\Big) - \underset{\sim}{V}_t\right) \cdot \mathbb{1}_{\{|\boldsymbol{H}_t| \leq c\}} = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. für ein beliebiges $c > 0$, und man erhält für $c \to \infty$

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\Big) - \underset{\sim}{V}_t \quad = \quad 0 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und folglich

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t\Big) \quad = \quad \underset{\sim}{V}_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s. .}$$

Zu 2.: Es erfolgt eine Induktion über $t = 0, \ldots, n$:
Für $t = 0$ ergibt sich, dass $\underset{\sim}{V}_0$ $\mathcal{F}_0$-messbar, also $\mathbb{P}$-f.s. konstant und somit $\mathbb{Q}$-integrierbar ist.
Sei nun $\underset{\sim}{V}_t$ $\mathbb{Q}$-integrierbar $(t \in \{0, \ldots, n-1\})$.
Für $t+1$ erhält man (wegen $\underset{\sim}{V}_0, \ldots, \underset{\sim}{V}_n \geq 0$)

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(|\underset{\sim}{V}_{t+1}|) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{V}_{t+1}) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(\underset{\sim}{V}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t)\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\underset{\sim}{V}_t\Big) \;=\; \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(|\underset{\sim}{V}_t|\Big) \;<\; \infty.$$

■

B.12 Beweis Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des CRR-Modells

- Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}\Big)$ ist gemäß Definition genau dann ein äquivalentes Martingalmaß, falls es folgende Eigenschaften besitzt:

  1. $\mathbb{Q}$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$.
  2. Der $\mathbb{R}^{N+1}$-wertige diskontierte Preisvektorprozess ist ein $\mathbb{Q}$-Martingal, d.h. $\Big(\underset{\approx}{S}_t\Big)_{t=0,\ldots,n}$

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_t^i}{S_t^0} \mid \mathcal{F}_s\right) = \frac{S_s^i}{S_s^0} \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } s < t,\ \ s,t \in \{0,\ldots,n\},\ i \in \{0,\ldots,N\}.$$

  Eigenschaft 2. ist im Falle des CRR-Modells gleichbedeutend mit

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_{t+1}^1}{(1+r)^{t+1}} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{S_t^1}{(1+r)^t} \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in \{0,\ldots,n-1\}$$

  (siehe dazu auch (B.25)), was wiederum gleichbedeutend ist mit

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_{t+1}^1 \mid \mathcal{F}_t) = (1+r)\cdot S_t^1 \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in \{0,\ldots,n-1\}. \tag{B.29}$$

- Zunächst wird untersucht, welche Eigenschaften ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ besitzen muss, um (B.29) zu erfüllen (die Äquivalenz von $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ wird dabei noch nicht berücksichtigt):

  – Da der Grundraum Ω endlich ist, existieren alle auftretenden bedingten Erwartungen.

  – Sei nun $t \in \{0,\ldots,n-1\}$ fest, aber beliebig. Es ergibt sich wegen $S_t^1 > 0$ und aufgrund der Eigenschaft 7 von bedingten Erwartungen

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(S_{t+1}^1 \mid \mathcal{F}_t) \ = \ \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(S_t^1 \cdot \frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} \mid \mathcal{F}_t\right) \ = \ S_t^1 \cdot \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} \mid \mathcal{F}_t\right) \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}\ .$$

  Somit ist (B.29) gleichbedeutend mit

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} \mid \mathcal{F}_t\right) \ = \ 1+r \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}\ . \tag{B.30}$$

  – Der Quotient $\dfrac{S_{t+1}^1}{S_t^1}$ kann gemäß der Definition eines CRR-Modells lediglich die Werte u und d annehmen. Trivialerweise gilt

  $$\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} \ = \ u \cdot \mathbb{1}_{\left\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1}=u\right\}} + d \cdot \mathbb{1}_{\left\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1}=d\right\}}$$

  und somit wegen $\mathbb{Q}\Big(A \mid \mathcal{F}_t\Big) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t\Big)$ $(A \in \mathcal{F})$

  $$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} \mid \mathcal{F}_t\right) \ = \ u \cdot \mathbb{Q}\left(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u \mid \mathcal{F}_t\right) + d \cdot \mathbb{Q}\left(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = d \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$\begin{aligned} &= u \cdot \mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u \mid \mathcal{F}_t\Big) + d \cdot \Big(1 - \mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u \mid \mathcal{F}_t\Big)\Big) \\ &= \mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u \mid \mathcal{F}_t\Big) \cdot (u-d) + d \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.,} \end{aligned}$$

woraus wegen (B.30)

$$\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u \mid \mathcal{F}_t\Big) = \frac{1+r-d}{u-d} = q \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}$$

folgt.

– Insbesondere gilt $\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Big) = q$, denn wegen der Eigenschaften 2 und 5 von bedingten Erwartungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Big) &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{1}_{\left\{\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t}=u\right\}}\Big) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{1}_{\left\{\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t}=u\right\}} \mid \mathcal{F}_0\Big) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{1}_{\left\{\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t}=u\right\}} \mid \mathcal{F}_t\Big) \mid \mathcal{F}_0\Big) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u \mid \mathcal{F}_t\Big) \mid \mathcal{F}_0\Big) \\ &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}(q) = q. \end{aligned}$$

– Da grundsätzlich $\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Big) \in [0,1]$ gilt, erhält man aus $\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Big) = q = \frac{1+r-d}{u-d} \geq 0$

$$d \leq 1+r$$

und aus $\frac{1+r-d}{u-d} \leq 1$ zunächst $1+r-d \leq u-d$ und somit

$$u \geq 1+r,$$

also $d \leq 1+r \leq u$.

- Nun kann „$\Longrightarrow$“ und (2.24) gezeigt werden: Da das CRR-Modell arbitragefrei ist, existiert gemäß Satz 2.45 (1. Fundamentalsatz) ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Martingalmaß. Für das obige Wahrscheinlickeitsmaß $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Big) = q$ für $t \in \{0,\ldots,n-1\}$ konnte bereits gezeigt werden, dass der diskontierte Preisvektorprozess für $d \leq 1+r \leq u$ ein Martingal bezüglich $\mathbb{Q}$ ist. Da das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ außerdem noch äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist, besitzt es – außer der leeren Menge – keine weiteren Nullmengen. Somit ist sowohl der Fall $\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Big) = 0$ als auch der Fall $\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = d\Big) = 0$ ausgeschlossen. Daraus folgt $0 < q < 1$ wegen $\mathbb{Q}\Big(\frac{S^1_{t+1}}{S^1_t} = u\Big) = q$ und somit analog zu obigen Überlegungen $d < 1+r < u$.

- Die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen $\frac{S_1^1}{S_0^1}, \ldots, \frac{S_n^1}{S_{n-1}^1}$ wird gezeigt: Aus $\mathbb{Q}\Big(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u \mid \mathcal{F}_t\Big) = q$ $\mathbb{Q}$-f.s. für ein beliebiges, aber festes $t \in \{0, \ldots, n-1\}$ folgt aufgrund der Eigenschaft 5 von bedingten Erwartungen

$$\mathbb{Q}\Big(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u \mid \mathcal{F}_s\Big) = q \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.} \quad \text{für } s \leq t.$$

Aus dieser Eigenschaft ergibt sich zunächst die Unabhängigkeit des Ereignisses $\Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}$ von der σ-Algebra $\mathcal{F}_s$, denn aus

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\Big(\mathbb{1}_{\Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}} \mid \mathcal{F}_s\Big) = q \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}$$

ergibt sich aufgrund der Definition der bedingten Erwartung

$$\int_A \mathbb{1}_{\Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}} \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \;=\; \int_A q \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_s,$$

was wegen

$$\int_A q \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \;=\; q \cdot \mathbb{Q}(A) \;=\; \mathbb{Q}\Big(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big) \cdot \mathbb{Q}(A)$$

und

$$\int_A \mathbb{1}_{\Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}} \,\mathrm{d}\mathbb{Q} \;=\; \int_{A \cap \Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}} \mathrm{d}\mathbb{Q} \;=\; \mathbb{Q}\Big(A \cap \Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}\Big)$$

gleichbedeutend ist mit

$$\mathbb{Q}\Big(A \cap \Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}\Big) \;=\; \mathbb{Q}(A) \cdot \mathbb{Q}\Big(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_s.$$

Mit dem Ereignis $\Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = u\Big\}$ ist auch das Gegenereignis $\Big\{\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1} = d\Big\}$ unabhängig von der σ-Algebra $\mathcal{F}_s$ und somit auch $\sigma\Big(\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1}\Big)$.

Wegen $\mathcal{F}_s = \sigma\Big(S_0^1, \ldots, S_s^1\Big)$ ist jede σ-Algebra, die aus einer beliebigen Auswahl aus den Zufallsgrößen $\frac{S_1^1}{S_0^1}, \ldots, \frac{S_s^1}{S_{s-1}^1}$ gebildet wird, eine Teilmenge von $\mathcal{F}_s$ und somit ebenfalls unabhängig von $\frac{S_{t+1}^1}{S_t^1}$.

- Aus der Unabhängigkeit der Zufallsgrößen $\frac{S_1^1}{S_0^1}, \ldots, \frac{S_n^1}{S_{n-1}^1}$ ergibt sich

$$\mathbb{Q}\Big(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}\Big) \;=\; \mathbb{Q}\Big(\frac{S_1^1}{S_0^1} = \omega_1, \ldots, \frac{S_n^1}{S_{n-1}^1} = \omega_n\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{t=1}^{n} \mathbb{Q}\Big(\tfrac{S_t^1}{S_{t-1}^1} = \omega_t\Big) \\
&= \prod_{t=1}^{n} q^{\mathbb{1}_{\{u\}}(\omega_t)} \cdot (1-q)^{\mathbb{1}_{\{d\}}(\omega_t)} \\
&= q^{|\{t:\omega_t = u\}|} \cdot (1-q)^{|\{t:\omega_t = d\}|}
\end{aligned}
$$

und somit (2.25).

- Nun wird „$\Longleftarrow$“ gezeigt: Für $d < 1+r < u$ kann für $q = \dfrac{1+r-d}{u-d}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ durch

  $$\mathbb{Q}\Big(\Big\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\Big\}\Big) \;:=\; q^{|\{t:\omega_t = u\}|} \cdot (1-q)^{|\{t:\omega_t = d\}|}$$

  konstruiert werden. Dieses ist – wie sich aus obigen Überlegungen in umgekehrter Reihenfolge ergibt – ein äquivalentes Martingalmaß. Somit ist das CRR-Modell arbitragefrei.

- Die Vollständigkeit des CRR-Modells ergibt sich wegen Satz 2.56 (2. Fundamentalsatz) aus der Eindeutigkeit des Parameters q, woraus die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ folgt.

Anhang C

Anhang zum Black-Scholes-Modell

C.1 Beweis der Nichtdifferenzierbarkeit der Pfade des Wienerprozesses

- O.B.d.A. sei $\mathbb{T} = [0, \infty)$: Ist nämlich ein Pfad $W_{\bullet}(\omega)$ des Wienerprozesses auf $[0, \infty)$ nirgendwo differenzierbar, dann erst recht nicht auf $[0, T]$ für $T > 0$.

- Im Folgenden wird gezeigt, dass die Menge
$$A \ := \ \Big\{\omega \in \Omega : W_{\bullet}(\omega) \text{ ist an wenigstens einer Stelle differenzierbar}\Big\}$$
die *Teilmenge* einer $\mathbb{P}$-Nullmenge ist. Damit umgeht man auch mögliche Messbarkeitsprobleme für A.

- Die Menge A ist eine Teilmenge der Menge
$$B \ := \ \Big\{\omega \in \Omega : W_{\bullet}(\omega) \text{ ist an wenigstens einer Stelle Lipschitz-stetig}\Big\}$$
Ein spezieller Pfad $W_{\bullet}(\omega^*)$ ist an der Stelle $t_0 = t_0(\omega^*) \in \mathbb{T}$ Lipschitz-stetig, wenn es eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass für alle t aus einer Umgebung $U_\delta(t_0) \subset \mathbb{T}$ um t_0
$$\Big|W_t(\omega^*) - W_{t_0}(\omega^*)\Big| \ \leq \ L \cdot |t - t_0|$$
für ein $L > 0$ gilt.

- Ist $W_{\bullet}(\omega^*)$ an der Stelle t_0 Lipschitz-stetig, so gibt es eine natürliche Zahl $k = k\Big(U_\delta(t_0)\Big) \in \mathbb{N}$ sowie eine natürliche Zahl $j = j(k) \in \mathbb{N}$, so dass
$$\frac{j}{k} \geq t_0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{j}{k}, \frac{j+3}{k}\right] \in U_\delta(t_0),$$
d.h., es gibt ein Gitter $\Big\{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots\Big\}$, so dass wenigstens 4 Gitterpunkte rechts von t_0 in der δ-Umgebung um t_0 enthalten sind, und zwar $\frac{j}{k}$, $\frac{j+1}{k}$, $\frac{j+2}{k}$ und $\frac{j+3}{k}$. Dies ist insbesondere deswegen möglich, weil die Menge $\mathbb{T}$ rechtsoffen ist. Dass es mindestens 4 Gitterpunkte sind, ist für den weiteren Verlauf entscheidend.

- Ist $W_{\bullet}(\omega^*)$ an der Stelle t_0 Lipschitz-stetig, so gilt in Bezug auf obige Gitterpunkte wegen der Dreiecksungleichung und $\frac{j+3}{k} - t_0 \leq \frac{4}{k}$ bzw. $\frac{j+2}{k} - t_0 \leq \frac{3}{k}$ für $i = j+1, j+2, j+3$

$$\begin{aligned}
\Big|W_{i/k}(\omega^*) - W_{(i-1)/k}(\omega^*)\Big| &= \Big|\Big(W_{i/k}(\omega^*) - W_{t_0}(\omega^*)\Big) - \Big(W_{(i-1)/k}(\omega^*) - W_{t_0}(\omega^*)\Big)\Big| \\
&\leq \Big|W_{i/k}(\omega^*) - W_{t_0}(\omega^*)\Big| + \Big|W_{(i-1)/k}(\omega^*) - W_{t_0}(\omega^*)\Big| \\
&\leq L \cdot \Big|\tfrac{i}{k} - t_0\Big| + L \cdot \Big|\tfrac{i-1}{k} - t_0\Big| \\
&\leq L \cdot \Big(\tfrac{4}{k} + \tfrac{3}{k}\Big) \;=\; L \cdot \tfrac{7}{k}
\end{aligned}$$

- Insbesondere ist somit für obige spezielle t_0, L, k und j

$$\begin{aligned}
&\Big\{\omega \in \Omega : \Big|W_t(\omega) - W_{t_0}(\omega)\Big| \leq L \cdot |t - t_0| \;\forall t \in U_\delta(t_0)\Big\} \\
\subset\; &\Big\{\omega \in \Omega : \Big|W_{i/k}(\omega) - W_{(i-1)/k}(\omega)\Big| \leq L \cdot \tfrac{7}{k}\Big\} \;=:\; C_{k,i}^L
\end{aligned}$$

für $i = j+1, j+2, j+3$ und somit

$$\begin{aligned}
&\Big\{\omega \in \Omega : \Big|W_t(\omega) - W_{t_0}(\omega)\Big| \leq L \cdot |t - t_0| \;\forall t \in U_\delta(t_0)\Big\} \\
\subset\; &\bigcap_{i=j+1}^{i=j+3} C_{k,i}^L \;=:\; D_{k,j}^L
\end{aligned}$$

- Wegen der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse sowie $W_0 = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_{k,j}^L) &= \prod_{i=j+1}^{j+3} \mathbb{P}(C_{k,i}^L) \;=\; \prod_{i=j+1}^{j+3} \mathbb{P}(C_{k,1}^L) \;=\; \mathbb{P}(C_{k,1}^L)^3 \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big\{|W_{1/k}| \leq L \cdot \tfrac{7}{k}\Big\}\Big)^3
\end{aligned}$$

Da $W_{1/k}$ normalverteilt ist mit Mittelwert 0 und Varianz $1/k$, erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\Big\{|W_{1/k}| \leq L \cdot \tfrac{7}{k}\Big\}\Big) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi/k}} \int\limits_{-L\cdot\frac{7}{k}}^{L\cdot\frac{7}{k}} \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2/k}}}_{\leq 1} \,\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2\pi}} \cdot 14L \cdot \frac{1}{k} \;=\; \frac{c(L)}{\sqrt{k}} \qquad \text{mit } \; c(L) := \frac{14L}{\sqrt{2\pi}},
\end{aligned}$$

also

$$\mathbb{P}(D_{k,j}^L) \;\leq\; \frac{c(L)^3}{k^{3/2}}$$

Der Exponent $3/2$ ist dabei die direkte Folge davon, dass oben 4 Gitterpunkte innerhalb der δ-Umgebung gewählt wurden.

- Das Ereignis $D_{k,j}^L$ beschreibt – im Wesentlichen – die Lipschitz-Stetigkeit für eine bestimmte Lipschitzkonstante L, eine besimmte Gittergröße $1/k$ sowie ein bestimmtes Zeitintervall $[j/k, j+3/k]$. Die Untersuchung muss demnach noch auf die gesamten Wertebereiche ausgedehnt werden. Zunächst wird der untersuchte Zeitbereich auf $[0, n+2/k]$, $n \in \mathbb{N}$, erweitert, indem

$$\bigcup_{j=0}^{k \cdot n-1} D_{k,j}^L \;=:\; E_{k,n}^L$$

betrachtet wird. Es ergibt sich

$$\mathbb{P}(E_{k,n}^L) \;\leq\; \sum_{j=0}^{k \cdot n-1} \mathbb{P}(D_{k,j}^L) \;\leq\; \sum_{j=0}^{k \cdot n-1} \frac{c(L)^3}{k^{3/2}} \;=\; k \cdot n \cdot \frac{c(L)^3}{k^{3/2}} \;=\; n \cdot \frac{c(L)^3}{\sqrt{k}}$$

Der Ausdruck „$\sqrt{k}$“ im Nenner ist wiederum eine Folge der Wahl von 4 Gitterpunkten.

- Nun wird das durch $k \in \mathbb{N}$ spezifizierte Gitter fein genug gewählt, um alle Stellen zu erfassen, an denen Lipschitz-Stetigkeit vorliegt. Ein Grenzübergang $k \to \infty$ (und folglich $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbb{P}(E_{k,n}^L) = 0$) wäre dafür bereits ausreichend, allerdings soll das dazugehörige Ereignis noch mengentheoretisch beschrieben werden. Hierfür ist der mengentheoretische Limes inferior geeignet:

$$F_n^L \;:=\; \liminf_{k \to \infty} E_{k,n}^L \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=k}^{\infty} E_{m,n}^L$$

enthält diejenigen $\omega \in \Omega$, die schließlich eine hinreichende „Gitterfeinheit“ aufweisen, um Stellen mit Lipschitz-Stetigkeit im Zeitbereich $[0, n+2/k]$ zu „entdecken“. Es ergibt sich

$$\mathbb{P}(F_n^L) \;\leq\; \liminf_{k \to \infty} \mathbb{P}(E_{k,n}^L) \;=\; \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}(E_{k,n}^L) \;=\; 0$$

- Um für den gesamten Zeitbereich $\mathbb{T}$ und alle Lipschitzkonstanten L die zugehörigen Stellen mit Lipschitz-Stetigkeit zu erfassen, muss schließlich noch

$$\bigcup_{L=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^L \;\supset\; B$$

betrachtet werden. Da aber abzählbare Vereinigungen von $\mathbb{P}$-Nullmengen wiederum $\mathbb{P}$-Nullmengen ergeben, ist

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{L=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^L\Big) \;=\; 0$$

und der Satz somit bewiesen.

Bemerkung: Diese Aussage wurde erstmals bereits 1931 von Raymond Payley (englischer Mathematiker, 1907-1933, starb bei einem Skiunfall), Norbert Wiener und Antoni Zygmund (polnisch-amerikanischer Mathematiker, 1900-1992) gezeigt.

C.2 Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen

- Üblicherweise werden *normalverteilte* Zufallszahlen oder *gleichverteilte* Zufallszahlen benötigt.

- Jede Programmiersprache (oder andere Kalkulationssysteme wie z.B. Excel) enthält üblicherweise einen (Pseudo-)Zufallszahlengenerator, der im Intervall $[0,1]$ bzw. $[0,1)$ (im Rahmen der Maschinengenauigkeit) gleichverteilte Zufallszahlen erzeugt (Befehl für `Excel`: `ZUFALLSZAHL()`). Normalverteilte Zufallszahlen können aus gleichverteilten Zufallszahlen erzeugt werden (s.u.).

- Ausgehend von einem oder mehreren Initialisierungswerten (den sogenannten „Seeds"), erzeugen Zufallszahlengeneratoren üblicherweise eine *deterministische* Folge von Zahlen gemäß einem bestimmten Algorithmus. Diese Zahlen werden daher auch als *Pseudo-Zufallszahlen* bezeichnet. Die Möglichkeit, ausgehend von Startwerten eine Folge von „Zufallszahlen" reproduzieren zu können, ist für die Nachvollziehbarkeit von Simulationen von entscheidender Bedeutung. Außerdem ist es insbesondere bei Simulationen mit einer sehr langen Folge von Zufallszahlen effizient, zum Zweck der Reproduzierbarkeit nicht die gesamte Folge, sondern lediglich die Seeds zu speichern.

- Zur zufälligen Initialisierung von Seeds kann von der Computerhardware verursachtes „Systemrauschen" („`/dev/random`" unter `UNIX`) verwendet werden.

- Die Güte eines Zufallszahlengenerators ist unter anderem gekennzeichnet durch die Länge der Periode, ab der sich die Zahlenfolge wiederholt, sowie die Erfüllung von Verteilungs- und Unabhängigkeitsannahmen. Die Periode eines Zufallszahlengenerators sollte aufgrund theoretischer Untersuchungen bekannt sein (eine Periode von wenigstens 10^{20} wäre wünschenswert). Die Verteilungsannahmen können mit Hilfe deskriptiver Statistiken (z.B. Berechnung der zentralen Momente) oder Verteilungstests untersucht werden. In Bezug auf die Unabhängigkeit wird die Autokorrelation der Folge von Zufallszahlen betrachtet (z.B. mit Hilfe des *Spektraltests*).

- Folgende empirische Momente lassen sich mit Hilfe von `Excel` schnell überprüfen. Dabei bezeichnet

  $$\mu_k \;:=\; \mathrm{E}\,(X - \mathrm{E}X)^k\,, \qquad k \in \mathbb{N},$$

  das k-te zentrale Moment einer Zufallsgröße X:

Moment	Bezeichnung	Wert für $\mathrm{U}[0,1]$	Wert für $\mathrm{N}(0,1)$	`Excel`-Befehl
μ_1	Mittelwert	1/2	0	`MITTELWERT(`*`Bereich`*`)`
$\sigma^2 = \mu_2$	Varianz	1/12 $\approx$ 0,0833	1	`VARIANZ(`*`Bereich`*`)`
$\gamma_1 = \mu_3/\sigma^3$	Schiefe	0	0	`SCHIEFE(`*`Bereich`*`)`
μ_4/σ^4	Kurtosis (Wölbung)	1,8	3	–
$\gamma_2 = \mu_4/\sigma^4 - 3$	Exzess	$-1{,}2$	0	`KURT(`*`Bereich`*`)`

- Die Dichte einer Verteilung mit Schiefe $\gamma_1 > 0$ heißt **rechtsschief** oder **linkssteil**, d.h., der linke Teil der Dichte ist steiler und der rechte Teil flacher als bei der Dichte der Normalverteilung. Andernfalls ($\gamma_1 < 0$) heißt die Dichte **linksschief** oder **rechtssteil**.

- Die Dichte einer Verteilung mit Exzess $\gamma_2 > 0$ heißt **steilgipflig**: Die Wahrscheinlichkeitsmasse ist gegenüber der Normalverteilung stärker in der Mitte und an den Enden konzentriert. Andernfalls ($\gamma_2 < 0$) heißt die Dichte **flachgipflig**.

C.2.1 Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

- Um bei der Erzeugung von Zufallszahlen nicht von der jeweiligen Programmumgebung bzw. von den jeweiligen Programmversionen abhängig zu sein, kann es sinnvoll sein, Zufallszahlengeneratoren selbst zu implementieren.

- Derzeit sehr populär sind zum einen der sogenannte *Mersenne-Twister*[1] (1997) von Makoto Matsumoto und Takuji Nishimura (Hiroshima University), zum anderen die KISS-Generatoren (KISS – „Keep it simple and stupid“) von George Marsaglia (1924–2011, Florida und Washington State University). Der KISS32-Generator (zur Verwendung mit 32-bit-Variablen, 2003) hat eine Periode von 10^{37}, der KISS64-Generator (zur Verwendung mit 64-bit-Variablen, 2009 in einem Diskussionsforum veröffentlicht) eine Periode von 10^{75}. Die KISS-Generatoren sind sehr schnell und codeeffizient (4 Zeilen!) zu implementieren und benötigen lediglich 4 Seeds. Eine „SuperKISS“-Version (2009) besitzt sogar eine Periode von $10^{4000000}$.

- Weiterführende Literatur: David Jones, Good Practice in (Pseudo) Random Number Generation for Bioinformatics Applications, University College London, Technical Reports 2010, `http://www.cs.ucl.ac.uk/staff/d.jones/GoodPracticeRNG.pdf`

C.2.2 Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen

Die im Folgenden genannten Verfahren erzeugen standard-normalverteilte Zufallszahlen aus $[0, 1]$-gleichverteilten Zufallszahlen und unterscheiden sich hinsichtlich der Aufwändigkeit der Implementierung sowie der Geschwindigkeit. Ist außerdem X eine standard-normalverteilte Zufallsgröße, so ist

$$\sigma \cdot X + \mu \ \sim \ \mathrm{N}(\mu, \sigma^2).$$

[1] Eine *Mersenne-Zahl* ist eine Primzahl der Form $2^p - 1$, wobei p ebenfalls eine Primzahl ist. Der Mersenne-Twister hat die Periode $2^{19937} - 1 \approx 4 \cdot 10^{6000}$. Der französische Mönch Marin Mersenne (1588–1648) war Theologe, Mathematiker und Musikttheoretiker.

C.2.2.1 Inversionsmethode

Ist U eine im Intervall $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsgröße und bezeichne Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung, dann ist

$$\Phi^{-1}(U) \ \sim \ \mathrm{N}(0,1),$$

denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\Phi^{-1}(U) \leq x\Big) \ = \ \mathbb{P}\Big(U \leq \Phi(x)\Big) \ = \ \Phi(x)$$

wegen $\mathbb{P}\Big(U \leq u\Big) = u$ für $u \in [0,1]$.

- Die Inversionsmethode ist insbesondere dann empfehlenswert, wenn Φ^{-1} problemlos berechnet kann, z.B. in `Excel` durch `NORMINV(ZUFALLSZAHL();0;1)`. Da für Φ^{-1} kein geschlossener analytischer Ausdruck bekannt ist, besteht alternativ – evtl. aufwändig – die Möglichkeit der approximativen Berechnung z.B. durch Polynome.

- Die Inversionsmethode lässt sich auch auf beliebige andere Verteilungen (auch für solche mit nur rechtsseitig stetigen Verteilungsfunktionen) verallgemeinern.

C.2.2.2 Zwölferregel

Allgemein gilt (Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes): Für eine Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\mathrm{E}X_1 = \mu$ und $\mathrm{Var}\,(X_1) = \sigma^2 < \infty$ konvergiert die Verteilung der Folge

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n \cdot \mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}}$$

für $n \to \infty$ gegen eine Standard-Normalverteilung. Für den Spezialfall $X_1 \sim \mathrm{U}[0,1]$ (und folglich $\mu = 1/2$ sowie $\sigma^2 = 1/12$) ergibt sich für ein hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n/2}{\sqrt{n/12}} \ \approx\sim \ \mathrm{N}(0,1).$$

Insbesondere für $n = 12$ erhält man die sogenannte *Zwölferregel*

$$\sum_{i=1}^{12} X_i - 6 \ \approx\sim \ \mathrm{N}(0,1),$$

d.h., dass sich eine Standard-Normalverteilung durch Addition zwölf unabhängiger $\mathrm{N}(0,1)$-verteilter Zufallsgrößen approximieren lässt[2].

[2] Auf keinen Fall darf dafür $12 \cdot U - 6$ mit $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ verwendet werden: Dies führt zu einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[-6,6]$!

Implementierung in `Excel`:

$$\begin{aligned}&\texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} +\\ &\texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} +\\ &\texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} + \texttt{ZUFALLSZAHL()} - 6\end{aligned}$$

C.2.2.3 Box-Muller-Methode

Die Box-Muller-Methode[3] erzeugt aus zwei unabhängigen und identisch $\mathrm{U}^*(0,1]$-verteilten Zufallsgrößen U_1 und U_2 (d.h. $U_1, U_2 \sim \mathrm{U}[0,1]$ mit $U_1, U_2 \in (0,1]$) mittels

$$\begin{aligned} X_1 &:= \sqrt{-2 \cdot \ln U_1} \cdot \cos(2\pi \cdot U_2) \qquad \text{und}\\ X_2 &:= \sqrt{-2 \cdot \ln U_1} \cdot \sin(2\pi \cdot U_2)\end{aligned}$$

zwei unabhängige (!) standard-normalverteilte Zufallsgrößen X_1 und X_2.

- Die theoretische Grundlage beruht auf folgenden Überlegungen: Die Funktion

$$g : \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_1(u_1,u_2) \\ g_2(u_1,u_2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{-2 \cdot \ln u_1} \cdot \cos(2\pi \cdot u_2) \\ \sqrt{-2 \cdot \ln u_1} \cdot \sin(2\pi \cdot u_2) \end{pmatrix}, \qquad u_1, u_2 \in (0,1],$$

besitzt die Inverse

$$g^{-1} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_1^{-1}(x_1,x_2) \\ g_2^{-1}(x_1,x_2) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \arctan^*(x_1,x_2) \end{pmatrix}, \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

wobei

$$\arctan^*(x_1,x_2) := \begin{cases} \pi/2 & \text{für } x_1 = 0, x_2 > 0 \\ 3\pi/2 & \text{für } x_1 = 0, x_2 < 0 \\ 2\pi & \text{für } x_1 \geq 0, x_2 = 0 \\ \arctan(x_2/x_1) & \text{für } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ \pi + \arctan(x_2/x_1) & \text{für } x_1 < 0 \\ 2\pi + \arctan(x_2/x_1) & \text{für } x_1 > 0, x_2 < 0 \end{cases}$$

Werte im Bereich $(0, 2\pi]$ annimmt (der Arkustangens $\arctan$ dagegen nimmt Werte lediglich im Bereich $(-\pi/2, \pi/2)$ an).

Sind U_1 und U_2 unabhängige und identisch $\mathrm{U}^*(0,1]$-verteilte Zufallsgrößen, so besitzt deren gemeinsame Verteilung die Dichte

$$f_{U_1,U_2} : (x_1,x_2) \mapsto \mathbb{1}_{(0,1]^2}(x_1,x_2), \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

[3] George Box und Mervin Muller 1958

Für die Dichte der Verteilung von $g(U_1, U_2)$ gilt dann gemäß dem allgemeinen Transformationssatz

$$f_{g(U_1,U_2)} : (x_1, x_2) \mapsto f_{U_1,U_2}\Big(g^{-1}(x_1, x_2)\Big) \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \right|,$$

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{g(U_1,U_2)}(x_1, x_2) &= 1 \cdot \left| \det \begin{pmatrix} -x_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} & -x_2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \\ -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_1^2+x_2^2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \cdot (-x_1 - x_2^2) \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}. \end{aligned}$$

Dies ist aber die Dichte der Verteilung eines Vektors (X_1, X_2) von unabhängigen und identisch standard-normalverteilten Zufallsgrößen.

- Alternative Herleitung der Box-Muller-Methode unter Verwendung von Polarkoordinaten:
  - Ein Punkt (x_1, x_2) in einem kartesischen Koordinatensystem ist durch Angabe der euklidischen Distanz $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ vom Koordinatenursprung sowie des Winkels ϑ mit der x_1-Achse eindeutig bestimmt (*Polarkoordinaten*). Es gilt

    $$x_1 = r \cdot \cos\vartheta \qquad \text{und} \qquad x_2 = r \cdot \sin\vartheta.$$

  - Die Dichte der Verteilung eines Vektors (X_1, X_2) von zwei unabhängigen und identisch $\mathrm{N}(0, 1)$-verteilten Zufallsgrößen ist rotationssymmetrisch bezüglich der z-Achse, d.h. die Dichte hängt lediglich von dem Abstand zum Ursprung und nicht von dem Winkel mit der x_1-Achse ab.
  - Der stochastische Vektor (R, Θ) sei der zu (X_1, X_2) gehörige Vektor, der für jeden Punkt $\Big(x_1 = X_1(\omega), x_2 = X_2(\omega)\Big)$ für $\omega \in \Omega$ die zugehörigen Polarkoordinaten $\Big(r = R(\omega), \vartheta = \Theta(\omega)\Big)$ angibt. Insbesondere ist also $R^2 = X_1^2 + X_2^2$.
  - Wegen

    $$\mathrm{e}^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} = \mathrm{e}^{-r^2/2}$$

ergibt sich für die gemeinsame Verteilungsfunktion von (R, Θ) (unter Beachtung, dass bei Übergang zu Polarkoordinaten die Funktionaldeterminante r als Faktor auftritt – siehe obiger Transformationssatz) mit $\tilde{r} \geq 0$ und $0 < \tilde{\vartheta} \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} F_{(R,\Theta)}(\tilde{r}, \tilde{\vartheta}) &= \mathbb{P}(R \leq \tilde{r}, \Theta \leq \tilde{\vartheta}) \\ &= \int\limits_{r=0}^{\tilde{r}} \int\limits_{\vartheta=0}^{\tilde{\vartheta}} \frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{e}^{-r^2/2} \cdot r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{\tilde{\vartheta}}{2\pi} \int\limits_{r=0}^{\tilde{r}} r \cdot \mathrm{e}^{-r^2/2} \, \mathrm{d}r \end{aligned}$$

Substitution $s := r^2/2$ führt zu

$$F_{(R,\Theta)}(\tilde{r}, \tilde{\vartheta}) = \frac{\tilde{\vartheta}}{2\pi} \int\limits_{s=0}^{\tilde{r}^2/2} \mathrm{e}^{-s} \, \mathrm{d}s = \frac{\tilde{\vartheta}}{2\pi} \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\tilde{r}^2/2}\right)$$

Für die Randverteilungen von R und Θ ergibt sich demnach

$$F_R(r) = \mathbb{P}(R \leq r) = F_{(R,\Theta)}(r, 2\pi) = 1 - \mathrm{e}^{-r^2/2} \qquad (r \geq 0)$$

und

$$F_\Theta(\vartheta) = \mathbb{P}(\Theta \leq \vartheta) = \lim_{r \to \infty} F_{(R,\Theta)}(r, \vartheta) = \frac{\vartheta}{2\pi} \qquad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi)$$

Somit besitzt Θ eine Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 2\pi]$ und R eine *Rayleigh-Verteilung*[4] mit dem Parameter $\lambda = 2$. Außerdem sind R und Θ unabhängig wegen $F_{R,\theta}(r, \vartheta) = F_R(r) \cdot F_\Theta(\vartheta)$ für $r \geq 0$ und $\vartheta \in (0, 2\pi]$.

– Der (zufällige) Winkel Θ lässt sich somit aus einer $\mathrm{U}^*(0, 1]$-verteilten Zufallsgröße U mittels

$$\Theta = 2\pi \cdot U$$

erzeugen, der (zufällige) Abstand R – analog zur Inversionsmethode – mittels

$$R = F_R^{-1}(\tilde{U}) = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - \tilde{U})}$$

aus einer $\mathrm{U}^*[0, 1)$-verteilten Zufallsgröße $\tilde{U}$ (d.h. $\tilde{U} \sim \mathrm{U}[0, 1]$ mit $\tilde{U} \in [0, 1)$).

– Ist U eine $\mathrm{U}^*(0, 1]$-verteilte Zufallsgröße, so ist folglich

$$R \sim \sqrt{-2 \cdot \ln(U)}.$$

[4] Dichte bzw. Verteilungsfunktion einer Rayleigh-verteilten Zufallsgröße X mit Parameter $\lambda > 0$: $f_X(x) = \frac{2}{\lambda} \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2/\lambda} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ bzw. $F_X(x) = (1 - \mathrm{e}^{-x^2/\lambda}) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}$; John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842-1919): englischer Physiker, erhielt den Nobelpreis für Physik. Die Rayleigh-Verteilung ist ein Spezialfall der Weibull-Verteilung.

– Aus

$$X_1 = R \cdot \cos\Theta \qquad \text{und} \qquad X_2 = R \cdot \sin\Theta$$

ergeben sich dann obige Formeln der Box-Muller-Methode.

- Implementierung in `Excel` (unter Beachtung, dass „`ZUFALLSZAHL()`“ den Wert Null, aber nicht den Wert Eins annehmen kann):

$$\texttt{WURZEL}(-2 * \texttt{LN}(1 - \texttt{ZUFALLSZAHL}())) * \texttt{COS}(2 * \texttt{PI}() * \texttt{ZUFALLSZAHL}())$$

bzw.

$$\texttt{WURZEL}(-2 * \texttt{LN}(1 - \texttt{ZUFALLSZAHL}())) * \texttt{SIN}(2 * \texttt{PI}() * \texttt{ZUFALLSZAHL}())$$

C.2.2.4 Polar-Methode

Die Polar-Methode von George Marsaglia und Thomas Bray (1964) erzeugt zwei standard-normalverteilte unabhängige Zufallsgrößen X_1 und X_2 gemäß folgendem Algorithmus:

1. Es seien u_1, u_2 zwei Zufallszahlen als Realisierungen von zwei unabhängigen $\mathrm{U}^*[0,1]$-verteilten Zufallsgrößen U_1 und U_2 sowie

$$s^2 := v_1^2 + v_2^2 \qquad \text{mit} \qquad v_i := 2 \cdot u_i - 1 \quad (i = 1, 2)$$

(v_1 und v_2 sind somit Realisierungen von zwei unabhängigen $\mathrm{U}^*[-1,1]$-verteilten Zufallsgrößen V_1 und V_2).

2. Ist $s^2 > 1$ oder $s^2 = 0$, gehe zurück zu Schritt 1.

3. Mit

$$p := \sqrt{\frac{-2 \cdot \ln s^2}{s^2}}$$

sind

$$x_1 := v_1 \cdot p \qquad \text{und} \qquad x_2 := v_2 \cdot p$$

Realisierungen von zwei unabhängigen standard-normalverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2.

- Die theoretische Grundlage der Polar-Methode ist derjenigen der Box-Muller-Methode, bei der die („einheits-quadratische“) Dichte einer zweidimensionalen Gleichverteilung auf die Dichte einer zweidimensionalen Standard-Normalverteilung transformiert wird, sehr ähnlich. Bei der Polar-Methode wird jedoch nicht von einer Gleichverteilung auf dem Einheits*quadrat*, sondern von einer Gleichverteilung auf dem Einheits*kreis* ausgegangen, d.h., von einem zufälligen Vektor (V_1, V_2), dessen Verteilung die Dichte

$$f_{(V_1,V_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_{\{(x_1,x_2): x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}}(x_1, x_2), \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

besitzt.

- Es bezeichne (S, Θ) den zu (V_1, V_2) gehörigen stochastischen Vektor „in Polarkoordinaten" (siehe Box-Muller-Methode), d.h.

$$V_1 \;=\; S \cdot \cos\Theta \qquad \text{und} \qquad V_2 \;=\; S \cdot \sin\Theta.$$

Um daraus einen stochastischen Vektor $(R, \hat{\Theta})$ zu erhalten, der die Polarkoordinaten eines Vektors (X_1, X_2) von zwei unabhängigen standard-normalverteilten Zufallsgrößen angibt, braucht lediglich der „Abstand" S des „Kreisvektors" (V_1, V_2) auf den „Abstand" R eines standard-normalverteilten Vektors (X_1, X_2) transformiert zu werden; der Winkel Θ des „Kreisvektors" kann dabei übernommen werden, d.h. $\hat{\Theta} = \Theta$ sowie

$$X_1 \;=\; R \cdot \cos\Theta \qquad \text{und} \qquad X_2 \;=\; R \cdot \sin\Theta.$$

- Unter Verwendung von (V_1, V_2) erhält man

$$X_1 \;=\; R \cdot V_1/S \qquad \text{und} \qquad X_2 \;=\; R \cdot V_2/S.$$

für $S > 0$, d.h., X_1 und X_2 können für $S > 0$ ohne explizite Bestimmung von Θ direkt aus V_1 und V_2 berechnet werden.

- Die Zufallsgröße S^2 ist $\mathrm{U}[0,1]$-verteilt: Analog zu den Betrachtungen für die Box-Muller-Methode erhält man für die gemeinsame Verteilungsfunktion von (S, Θ)

$$F_{(S,\Theta)}(\tilde{s}, \tilde{\vartheta}) \;=\; \mathbb{P}(S \le \tilde{s}, \Theta \le \tilde{\vartheta}) \;=\; \int_{s=0}^{\tilde{s}} \int_{\vartheta=0}^{\tilde{\vartheta}} \frac{1}{\pi} \cdot s \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}s \;=\; \frac{\tilde{\vartheta} \cdot \tilde{s}^2}{2\pi}$$

für $\tilde{s} \in [0,1]$, $\tilde{\vartheta} \in [0, 2\pi]$ und demnach

$$F_S(s) \;=\; \mathbb{P}(S \le s) \;=\; \mathbb{P}(S^2 \le s^2) \;=\; F_{S^2}(s^2) \;=\; s^2 \qquad (s \in [0,1])$$

sowie

$$F_\Theta(\vartheta) \;=\; \frac{\vartheta}{2\pi} \qquad (\vartheta \in [0, 2\pi]).$$

Somit sind S und Θ auch unabhängig.

- Für eine $\mathrm{U}^*[0,1)$-verteilte Zufallsgröße S^2 erhält man analog zu den Betrachtungen für die Box-Muller-Methode

$$R \;=\; \sqrt{-2\ln(1 - S^2)}$$

bzw. – falls S^2 $\mathrm{U}^*(0,1]$-verteilt ist –

$$R \;\sim\; \sqrt{-2\ln S^2},$$

und folglich

$$X_1 \;\sim\; \sqrt{-2\ln S^2} \cdot V_1/S \qquad \text{und} \qquad X_2 \;\sim\; \sqrt{-2\ln S^2} \cdot V_2/S$$

- Die Ausdrücke V_1/S und V_2/S hängen lediglich von Θ und nicht von S ab, was die eben genannte Gleichheit in Verteilung rechtfertigt.

- Es bleibt noch zu klären, auf welche Weise ein zufälliger Vektor (V_1, V_2), der auf dem Einheitskreis gleichverteilt ist, erzeugt werden kann. Dies aber leistet gerade die „Verwerfungsregel" aus Schritt 2. des obigen Algorithmus': Dort sind (v_1, v_2) zunächst gleichverteilte Werte auf dem *Quadrat* $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Sollten diese Werte nicht innerhalb des Einheits*kreises* liegen (d.h. $v_1^2 + v_2^2 > 1$), wird ein neues Paar von Zufallszahlen erzeugt. Die „Verwerfung" findet durchschnittlich in

$$1 - \frac{\pi}{4} \;\approx\; 21.5\%$$

aller Fälle statt (das Verhältnis Kreisfläche zur Quadratfläche ist $\pi/4$).

- Der Vorteil der Polar-Methode gegenüber der Box-Muller-Methode besteht darin, dass keine Berechnung des Kosinus bzw. Sinus erforderlich ist, was einen Geschwindigkeitsvorteil bedeutet[5]. Dem steht der Nachteil der Verwerfung bereits erzeugter Zufallszahlen gegenüber.

- Die Implementierung in `Excel` ist aufgrund der Verwerfungsregel nicht elementar möglich. Hier ist eine Programmierung z.B. mit Hilfe von VBA („Visual Basic for Applications" – Skriptsprache für Microsoft-Office-Anwendungen) erforderlich.

C.2.3 Verwerfungsmethoden

- Allgemein sind Verwerfungsmethoden dadurch gekennzeichnet, dass zunächst Zufallszahlen gemäß einer „angenehmen" Verteilung (beispielsweise Gleichverteilung) erzeugt werden, von denen aber lediglich nur diejenigen verwendet werden, die einer anderen (weniger „angenehmen") Verteilung entsprechen. Die Polarmethode ist bereits ein Beispiel für eine Verwerfungsmethode, da hier auf einem Quadrat gleichverteilte Zufallszahlen verwendet werden, um auf einem Kreis gleichverteilte Zufallszahlen durch „Weglassen" zu erzeugen.

- Prinzipiell unterscheidet man zwei Arten von Verwerfungsmethoden, um Zufallszahlen von eindimensionalen Verteilungen zu erzeugen. Diese werden im Folgenden beschrieben.

C.2.3.1 Verwerfungsmethode mittels eines gleichverteilten Vektors

- Generell lassen sich Zufallszahlen einer stetig verteilten Zufallsgröße Z mit der Dichte f_Z erzeugen, indem ein Vektor (X, Y) verwendet wird, der auf der Fläche unterhalb der Dichte f_Z gleichverteilt ist, d.h. es gilt

$$0 \;\leq\; Y \;\leq\; f_Z(X) \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

[5] Plakativ wird die beschriebene Vorgehensweise an manchen Stellen als „direktes Rechnen in Polarkoordinaten" bezeichnet, woher auch der Name dieser Methode stammt.

sowie

$$\mathbb{P}(X \leq \tilde{x}) \;=\; \int\limits_{x=-\infty}^{\tilde{x}} \int\limits_{y=0}^{f_Z(x)} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{x=-\infty}^{\tilde{x}} f_Z(x) \, \mathrm{d}x \;=\; \mathbb{P}(Z \leq \tilde{x}),$$

d.h., die Zufallsgröße X besitzt dieselbe Verteilung wie die Zufallsgröße Z.

- Da in der praktischen Anwendung ein solcher Vektor (X, Y) meist schwer zu erzeugen ist, wird üblicherweise eine Gleichverteilung auf dem Bereich zwischen der x-Achse und einer Funktion g mit

  $$f_Z \;\leq\; g$$

  erzeugt, wobei g bezüglich der Gleichverteilung eine „angenehmere" Struktur aufweist, z.B. stückweise linear ist. Zufallszahlen (x, y) mit $y > f_Z(x)$ werden verworfen (g selbst braucht keine Dichte zu sein).

  Der Algorithmus lässt sich dann folgendermaßen beschreiben:

  1. Erzeuge einen Vektor (x, y) von auf der Fläche $\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq g(x)\Big\}$ gleichverteilten Zufallszahlen.
  2. Gilt $y \leq f_Z(x)$, so ist x eine wie Z verteilte Zufallszahl, ansonsten wiederhole Schritt 1.

C.2.3.2 Verwerfungsmethode mittels einer „ähnlich" verteilten Zufallszahl

- Sollen Zufallszahlen einer stetig verteilten Zufallsgröße Z mit einer auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ positiven Dichte f_Z erzeugt werden, kann dies mit Hilfe der Dichte f_X einer ebenfalls stetig verteilten Zufallsgröße X mit der Eigenschaft

  $$f_Z \;\leq\; c \cdot f_X \qquad (c > 0)$$

  (wegen $f_Z(x) > 0$ für $x \in I$ muss demnach auch $f_X(x) > 0$ für $x \in I$ gelten) sowie einer von X unabhängigen $\mathrm{U}[0,1]$-verteilen Zufallsgröße U geschehen. Es ist nämlich

  $$\mathbb{P}\left(Z \leq \tilde{x}\right) \;=\; \mathbb{P}\left(X \leq \tilde{x} \;\middle|\; U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right) \qquad (\tilde{x} \in \mathbb{R}),$$

  d.h., eine wie X verteilte Zufallszahl $x \in I$ wird lediglich in $\frac{f_Z(x)}{c \cdot f_X(x)} \cdot 100\%$ aller Fälle akzeptiert und ansonsten verworfen, was zu einer wie Z verteilten Zufallsgröße führt.

- Theoretische Begründung: Es gilt

  $$\mathbb{P}\left(X \leq \tilde{x} \;\middle|\; U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right) \;=\; \frac{\mathbb{P}\left(X \leq \tilde{x},\; U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right)}{\mathbb{P}\left(U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right)}$$

Gemäß den „Rechenregeln“ für bedingte Wahrscheinlichkeiten ergibt sich wegen $\mathbb{P}(U \leq u) = u$ für $u \in [0,1]$ und $\frac{f_Z(x)}{c \cdot f_X(x)} \in (0,1]$ für $x \in I$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X \leq \tilde{x},\ U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right) &= \int\limits_{(-\infty,\tilde{x}]\cap I} \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)} \;\middle|\; X = x\right) \mathrm{d}P_X(x) \\
&= \int\limits_{(-\infty,\tilde{x}]\cap I} \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f_Z(x)}{c \cdot f_X(x)}\right) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int\limits_{(-\infty,\tilde{x}]\cap I} \frac{f_Z(x)}{c \cdot f_X(x)} \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \frac{1}{c} \cdot \int\limits_{(-\infty,\tilde{x}]\cap I} f_Z(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) \;=\; \frac{1}{c} \cdot \mathbb{P}(Z \leq \tilde{x})
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\mathbb{P}\left(U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right) \;=\; \lim_{\tilde{x}\to\infty} \mathbb{P}\left(X \leq \tilde{x},\ U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right) \;=\; \frac{1}{c}$$

und somit

$$\mathbb{P}\left(X \leq \tilde{x} \;\middle|\; U \leq \frac{f_Z(X)}{c \cdot f_X(X)}\right) \;=\; \frac{\frac{1}{c} \cdot \mathbb{P}(Z \leq \tilde{x})}{1/c} \;=\; \mathbb{P}(Z \leq \tilde{x}).$$

- Der Algorithmus lässt sich dann folgendermaßen beschreiben:

  1. Erzeuge eine Zufallszahl $x \in I$ gemäß einer Verteilung mit der Dichte f_X sowie eine $\mathrm{U}^*[0,1]$-verteilte Zufallszahl u.
  2. Ist $u \leq \frac{f_Z(x)}{c \cdot f_X(x)}$, wobei $f_Z \leq c \cdot f_X$ für ein $c > 0$ gilt, so ist die unter 1. erzeugte Zufallszahl x wie Z verteilt, ansonsten wiederhole Schritt 1.

- **Beispiel:** Zufallszahlen aus dem „rechten Ende“ der Standard-Normalverteilung

  – Sei $r \geq 0$ und ϕ die Dichte der Standard-Normalverteilung, d.h. $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich aus ϕ „rechts von r“ wiederum eine Dichte

  $$\phi_r :\ x \in \mathbb{R} \;\mapsto\; \frac{\phi(x)}{1 - \Phi(r)} \cdot \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)$$

  bilden. Φ ist dabei die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. Der Ausdruck „$1 - \Phi(r)$“ dient der Normierung dieser aus dem „rechten Ende“ einer Normalverteilung erzeugten „neuen“ Dichtefunktion ϕ_r. Für $r = 0$ ist ϕ_0 die Dichte einer „halb-normalen Verteilung“, d.h. der Verteilung von $|Z|$ für eine standard-normalverteilte Zufallsgröße Z.

– Sei $r > 0$ und X eine mit dem Parameter r exponentialverteilte Zufallsgröße, d.h. $f_X(x) = r \cdot \mathrm{e}^{-r \cdot x} \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ und $F_X(x) = \left(1 - \mathrm{e}^{-r \cdot x}\right) \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Die um r verschobene Zufallsgröße $X + r$ besitzt dann die Dichte

$$f_{X+r}(x) = r \cdot \mathrm{e}^{-r \cdot (x-r)} \cdot \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x)$$

und die Verteilungsfunktion

$$F_{X+r}(x) = \left(1 - \mathrm{e}^{-r \cdot (x-r)}\right) \cdot \mathbb{1}_{[r,\infty)}(x).$$

– Im Folgenden ist demnach $I = [r, \infty)$ wegen $\phi_r(x) > 0$ sowie $f_{X+r}(x) > 0$ für $x \in I$. Es gilt nun

$$\phi_r \;\leq\; c_r \cdot f_{X+r}$$

mit

$$c_r \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{1 - \Phi(r)} \cdot \mathrm{e}^{-r^2/2},$$

denn aus $(x - r)^2/2 \geq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\mathrm{e}^{-\frac{(x-r)^2}{2}} \;\leq\; 1$$

sowie

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \;\leq\; \mathrm{e}^{-rx + \frac{r^2}{2}} \;=\; \mathrm{e}^{-r \cdot (x-r)} \cdot \mathrm{e}^{-r^2/2}$$

und somit für $x \geq r$

$$\begin{aligned} \phi_r(x) \;&=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \Phi(r)} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ &\leq\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{1 - \Phi(r)} \cdot \frac{1}{r} \cdot r \cdot \mathrm{e}^{-r \cdot (x-r)} \cdot \mathrm{e}^{-r^2/2} \;=\; c_r \cdot f_{X+r}(x), \end{aligned}$$

d.h., die Voraussetzung für die Anwendung obiger Verwerfungsmethode ist erfüllt.

– Für $x \geq r$ erhält man weiter

$$\frac{\phi_r(x)}{c_r \cdot f_{X+r}(x)} \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\mathrm{e}^{-r \cdot (x-r) - r^2/2}} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{(x-r)^2}{2}}$$

Somit ergibt sich für eine $\mathrm{U}^*(0, 1]$-verteilte Zufallsgröße U und eine mit dem Parameter r exponentialverteilte Zufallsgröße X die „Annahmeregel“

$$U \;\leq\; \frac{\phi_r(X + r)}{c_r \cdot f_{X+r}(X + r)} \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{X^2}{2}} \qquad \text{bzw.} \qquad -2 \ln U \;\geq\; X^2.$$

– Eine mit dem Parameter $r > 0$ exponentialverteilte Zufallsgröße X kann aus einer $\mathrm{U}^*(0,1]$-verteilten Zufallsgröße V mittels obiger Inversionsmethode erzeugt werden: Aus $F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-r \cdot x}$ für $x \geq 0$ folgt

$$F_X^{-1}(x) \;=\; -\frac{\ln(1-x)}{r} \qquad \text{für} \quad x \in [0,1).$$

Ist V $\mathrm{U}^*(0,1]$-verteilt, so ist $1 - V$ $\mathrm{U}^*[0,1)$-verteilt, und folglich ist

$$F_X^{-1}(1-V) \;=\; -\frac{\ln V}{r}$$

exponentialverteilt mit dem Parameter r.

– Die „Annahmeregel" lässt sich demnach mit Hilfe zweier unabhängiger $\mathrm{U}^*(0,1]$-verteilter Zufallsgrößen U und V mittels

$$-2\ln U \;\geq\; \left(-\frac{\ln V}{r}\right)^2$$

beschreiben.

– Der dazugehörige Algorithmus stellt sich nun folgendermaßen dar:

1. Erzeuge zwei unabhängige auf dem Intervall $(0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen u und v.[6]
2. Berechne $x := -(\ln v)/r$.
3. Gilt $-2\ln u < x^2$, wiederhole ab Schritt 1., ansonsten ist $x + r$ eine gemäß einer Verteilung mit der Dichte ϕ_r verteilte Zufallszahl.

– Diese Methode geht auf George Marsaglia und Wai Wan Tsan 1984 zurück. Der Algorithmus ist u.a. beschrieben in der Online-Version von *Non-Uniform Random Variate Generation,* Luc Devroye, 1986, `http://www.nrbook.com/devroye/`

C.2.4 Ziggurat-Methode

- Die **Ziggurat-Methode** wurde 2000 von George Marsaglia und Wai Wan Tsang entwickelt und ist allgemein auf stetig verteilte Zufallsgrößen, deren Verteilung eine glockenförmige symmetrische oder streng monoton fallende Dichte besitzt, anwendbar. Dieser Algorithmus gilt insbesondere als einer der schnellsten zur Erzeugung standard-normalverteilter Zufallszahlen.

- Dabei wird die Fläche unterhalb der Dichte zunächst durch n aufeinanderliegende Rechtecke gleichen Volumens eingehüllt, wobei diese aufgrund der vorausgesetzten Glockenstruktur bzw. Monotonie der Dichte von oben nach unten immer breiter (und folglich auch flacher wegen des gleichen Volumens) werden – wie bei einem Ziggurat (gestufter Tempelturm in Mesopotamien). Der unterste Block, der auf der x-Achse aufliegt, enthält dabei auch die

[6] Sind u bzw. v auf dem Intervall $[0,1)$ gleichverteilt, wird stattdessen $1-u$ bzw. $1-v$ verwendet.

gesamten Enden der Dichte. Auf die oberen Blöcke wird dann die erste oben genannte Verwerfungsmethode, für die Enden des untersten Blocks – in Abhängigkeit von der betrachteten Verteilung – evtl. die zweite o.g. Verwerfungsmethode angewendet.

- Die jeweils rechten Begrenzungen dieser Rechtecke werden mit $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ bezeichnet (der untere Block hat im Allgemeinen keine Begrenzung, da er die Enden der Dichte aufnimmt), wobei $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ gilt. O.B.d.A. sei die Dichte streng monoton fallend mit positiven Werten für $x \geq 0$. Es gilt mit $x_0 := 0$, wobei f die betreffende Dichte bezeichnet (Skizze!):

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot \Big(f(x_0) - f(x_1)\Big) &= x_2 \cdot \Big(f(x_1) - f(x_2)\Big) \\
&= \ldots \\
&= x_{n-1} \cdot \Big(f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})\Big) \\
&= x_{n-1} \cdot f(x_{n-1}) + \int\limits_{x_{n-1}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Die „Einhüllende“ g für die Fläche der Dichte ist somit für $x \geq 0$

$$
g(x) = \begin{cases} f(x_0) & \text{für } 0 \leq x \leq x_1 \\ f(x_1) & \text{für } x_1 < x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_{n-2}) & \text{für } x_{n-2} < x \leq x_{n-1} \\ f(x) & \text{für } x > x_{n-1} \end{cases}
$$

- Zur Bestimmung der $n-1$ Stellen $x_1, \ldots, x_{n-1}$ sowie der (konstanten) Fläche V der jeweiligen Blöcke ist das folgende System von n nichtlinearen Gleichungen zu lösen:

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot \Big(f(x_0) - f(x_1)\Big) - V &= 0 \\
x_2 \cdot \Big(f(x_1) - f(x_2)\Big) - V &= 0 \\
&\vdots \\
x_{n-1} \cdot \Big(f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})\Big) - V &= 0 \\
x_{n-1} \cdot f(x_{n-1}) + \int\limits_{x_{n-1}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - V &= 0
\end{aligned}
$$

Dabei genügt es, die Lösungen für V und x_{n-1} zu kennen, da sich die Lösungen x_{n-2}, x_{n-3}, $\ldots$, x_1 aus der zweiten bis vorletzten Gleichung rekursiv über

$$
x_i = f^{-1}\left(\frac{V}{x_{i+1}} + f(x_{i+1})\right) \qquad (i = n-2, n-3, \ldots, 1)
$$

ergeben.

- Speziell für den Fall der Standardnormalverteilung genügt es, die *unnormierte* Dichte

$$\phi^* : x \mapsto e^{-x^2/2}$$

für $x \geq 0$ zu betrachten. Diese Normierung lässt die Werte $x_1, \ldots, x_{n-1}$ unverändert. Für die Umkehrfunktion erhält man

$$\phi^{*-1} : x \mapsto \sqrt{-2 \cdot \ln x} \qquad \text{für} \quad x \in (0, 1].$$

Für $n = 256$ ergibt sich gemäß Marsaglia und Tsang 2000

$$\begin{aligned} V &= 0.00492867323399 \qquad \text{und} \\ x_{255} &= 3.6541528853610088. \end{aligned}$$

($256 \cdot V \approx 1.26174 \approx 1.0067 \cdot \sqrt{2\pi}/2$, d.h., die einhüllende Fläche ist ungefähr 0,67% größer als die tatsächliche Fläche unterhalb der „Dichte".)

- Durch

$$x_n := \frac{V}{f(x_{n-1})}$$

wird ein „fiktiver Randpunkt" des unteren Blocks mit der Eigenschaft $x_n \cdot f(x_{n-1}) = V$ erzeugt: Die Fläche unterhalb des Endes der Dichte entspricht dabei der Fläche eines Rechtecks zwischen den Punkten x_{n-1} und x_n mit der Höhe $f(x_{n-1})$.

- Nach Initialisierung der Werte $x_0, \ldots, x_n$ (und sinnvollerweise auch von $f_0 := f(x_0)$, $\ldots$, $f_{n-1} := f(x_{n-1})$) wird eine Zufallszahl gemäß folgendem Algorithmus erzeugt:

1. Wähle einen der n Blöcke rein zufällig aus. Da alle Blöcke dieselbe Fläche besitzen, wird damit der Bereich, in dem eine zweidimensionale Gleichverteilung realisiert wird, „im Sinne der Gleichverteilung" eingeschränkt. Üblicherweise stellen Programmiersprachen einen ganzzahligen Zufallszahlengenerator zur Verfügung bzw. eine solche Zahl kann aus dem zufälligen Bitmuster einer $\mathrm{U}[0, 1]$-verteilten Zufallszahl extrahiert werden.

2. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Nummer des ausgewählten Blocks. Innerhalb des ausgewählten Blocks wird nun über die gesamte Blocklänge wiederum eine Gleichverteilung realisiert, indem z.B. eine $\mathrm{U}[0, 1]$-verteilte Zufallszahl u mit der jeweiligen Blocklänge multipliziert wird. Ist die ursprünglich zugrunde liegende Dichte (wie bei der Standard-Normalverteilung) achsensymmetrisch, wird die auf der Blocklänge gleichverteilte Zufallszahl x mittels

$$x := (2 \cdot u - 1) \cdot x_i \qquad \text{bzw.} \qquad x := u \cdot x_i$$

(bei einer ursprünglich „einseitigen“ Dichte) berechnet. [7]

3. Ist $|x| \leq x_{i-1}$, so befindet sich die Obergrenze f_{i-1} des betrachteten Blocks unterhalb der Kurve der betrachteten Dichte, und x ist die gesuchte Zufallszahl.

4. Andernfalls wird zwischen $i = n$ (unterster Block einschließlich der Enden) oder $i < n$ unterschieden:

$i = n$: Es wird eine Zufallszahl aus dem rechten Ende der Dichte ($|x| > x_{n-1}$) erzeugt. Im Fall der Normalverteilung kann dies z.B. mit dem im vorigen Abschnitt beschriebenen Algorithmus geschehen. Diese Zufallszahl wird mit demselben Vorzeichen wie x versehen.

$i < n$: Die Zufallszahl x liegt in einem Bereich, in dem die Oberseite des einhüllenden Rechtecks *oberhalb* der Kurve der betrachteten Dichte liegt (Skizze!). Hier wird nun zu dem bereits vorhandenen x-Wert ein (gleichverteilter) y-Wert mittels

$$y \ := \ f_i + v \cdot \Big(f_{i-1} - f_i\Big)$$

aus einer $\mathrm{U}^*[0,1]$-verteilten Zufallszahl v erzeugt. Der Punkt (x, y) befindet sich unterhalb der Kurve der Dichte, wenn

$$y \ \leq \ f(x)$$

oder – äquivalent –

$$v \ \leq \ \frac{f(x) - f_i}{f_{i-1} - f_i}$$

gilt. Ist dies der Fall, so ist x die gewünschte Zufallszahl. Andernfalls wird x verworfen und der Algorithmus startet wieder bei Schritt 1.

- Die Schnelligkeit der Ziggurat-Methode beruht darauf, dass in den meisten Fällen lediglich eine Multiplikation (Schritt 2.) und ein Vergleich (Schritt 3.) notwendig sind, um eine standard-normalverteilte Zufallszahl zu erzeugen.

- Eine umfassende Übersicht über Verfahren zur Erzeugung normalverteilter Zufallsgrößen bietet *Gaussian Random Number Generators,* David B. Thomas, Wayne Luk, Philip H.W. Leong, John D. Villasenor, ACM Computing Surveys, 2007, `http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1287622`

[7] In einer optimierten Version der Ziggurat-Methode wird die Blocknummer i und der x-Wert mit Hilfe einer einzigen Zufallszahl erzeugt. Hierbei sollte jedoch auf die Unabhängigkeit dieser beiden zufälligen Ereignisse geachtet werden, siehe z.B. *An improved ziggurat method to generate normal random samples*, Jurgen Doornik, 2005, `http://www.doornik.com/research/ziggurat.pdf`

C.3 Logarithmische Normalverteilung

- Eine positive Zufallsgröße $Y > 0$ über einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ heißt **logarithmisch normalverteilt** (oder kurz: log-normalverteilt) mit den Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, falls die Zufallsgröße $X := \ln Y$ normalverteilt mit den Parametern $\mu = \mathrm{E}X$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,(X)$ ist. Ist umgekehrt X normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2, so ist $Y := \mathrm{e}^X$ log-normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2.

- Sei Y eine mit Parametern μ und σ^2 log-normalverteilte Zufallsgröße. Ihre Verteilungsfunktion F_Y ergibt sich dann aus der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung für $x > 0$ über

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\Big(Y \le x\Big) \;=\; \mathbb{P}\Big(\ln Y \le \ln x\Big) \;=\; \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$$

und $F_Y(x) = 0$ für $x \le 0$. Für die Dichte f_Y ergibt sich dann aus der Dichte ϕ der Standardnormalverteilung für $x > 0$

$$\begin{aligned} f_Y(x) \;&=\; \frac{\mathrm{d}F_Y(x)}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{\mathrm{d}\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

und $f_Y(x) = 0$ für $x \le 0$ (Skizze!).

- Die Dichte f_Y nimmt ihr Maximum bei

$$x^* \;=\; \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}$$

an, denn wegen $\phi'(x) = -x\cdot\phi(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}f_Y(x)}{\mathrm{d}x} \;&=\; -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sigma}\cdot\phi'\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) \\ &=\; \frac{1}{x^2\sigma^2}\phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)\cdot\left(-\sigma - \frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) \;\stackrel{!}{=}\; 0 \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{\ln x^* - \mu}{\sigma} \;=\; -\sigma$$

- Der Erwartungswert $\mathrm{E}Y$ und die Varianz $\mathrm{Var}\,(Y)$ einer mit den Parameter μ und σ^2 log-normalverteilten Zufallsgröße Y kann mit Hilfe einer standardnormalverteilten Zufallsgröße Z über

$$\mathrm{E}\left(Y^n\right) \;=\; \mathrm{E}\bigg(\Big(\mathrm{e}^{\mu+\sigma Z}\Big)^n\bigg) \;=\; \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{n\mu+n\sigma Z}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(Y^n\right) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{n\mu+n\sigma z} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z \;=\; \mathrm{e}^{n\mu} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z^2-2n\sigma}{2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{n\mu} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{z^2-2n\sigma+n^2\sigma^2}{2}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{n^2\sigma^2}{2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \mathrm{e}^{n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2}} \cdot \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(z-n\sigma)^2}{2}}\,\mathrm{d}z}_{=1} \;=\; \mathrm{e}^{n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2}}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}Y &= \mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2} \quad \text{sowie} \\
\mathrm{Var}\,(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \left(\mathrm{E}Y\right)^2 \;=\; \mathrm{e}^{2\mu+2\sigma^2} - \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2} \;=\; \mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right).
\end{aligned}$$

C.4 Ein Lemma vom Fubini-Typ für bedingte Erwartungen

In diesem Abschnitt geht es um die mathematische Begründung der in der Finanzmathematik häufig verwendeten „Rechenregel" für bedingte Erwartungen, dass auch in verketteten Funktionen der „messbare Anteil" aus der bedingten Erwartung herausgezogen und bezüglich des „unabhängigen Anteils" der unbedingte Erwartungswert berechnet werden „darf", d.h.

$$\mathrm{E}\Big(f(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(f(x,Y)\Big)\Big|_{x=X} \;=\; g(X) \quad \text{mit} \quad g(x) := \mathrm{E}\Big(f(x,Y)\Big), \tag{C.1}$$

wobei die Zufallsgröße X messbar bezüglich $\mathcal{C}$ und die Zufallsgröße Y unabhängig von $\mathcal{C}$ ist.

Als Folgerung aus einer solchen „Regel" ergibt sich dann nämlich unmittelbar mit $f(x,y) := h(x{\cdot}y)$

$$\mathrm{E}\Big(h(X \cdot Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(h(x \cdot Y)\Big)\Big|_{x=X} \;=\; g(X) \quad \text{mit} \quad g(x) := \mathrm{E}\Big(h(x \cdot Y)\Big).$$

Die folgenden Überlegungen gehen dabei für die Vorlesung „Finanzmathematik" von Lothar Partzsch zurück.

Bemerkungen:

1. Gegeben seien zwei nichtnegative oder integrierbare reellwertige Zufallsgrößen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\Big)$ sowie eine Unter-σ-Algebra $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Ist X $\mathcal{C}$-messbar und Y unabhängig von $\mathcal{C}$, so ergibt sich unter der Voraussetzung, dass das Produkt $X \cdot Y$ nichtnegativ oder integrierbar ist, direkt aus den „Rechenregeln" für bedingte Erwartungen

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(X \cdot Y \mid \mathcal{C}\Big) \;&=\; X \cdot \mathrm{E}\Big(Y \mid \mathcal{C}\Big) \;=\; X \cdot \mathrm{E}Y \;=\; g(X) \\ &\quad \text{mit} \quad g(x) := x \cdot \mathrm{E}Y = \mathrm{E}(x \cdot Y) \end{aligned}$$

2. Dieses Resultat lässt sich unmittelbar auf vektorwertige Zufallsgrößen $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sowie Funktionen $f_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folgendermaßen verallgemeinern:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(f_1(X) \cdot f_2(Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;&=\; f_1(X) \cdot \mathrm{E}\Big(f_2(Y)\Big) \;=\; g(X) \\ &\quad \text{mit} \quad g(x) := f_1(x) \cdot \mathrm{E}\Big(f_2(Y)\Big) = \mathrm{E}\Big(f_1(x) \cdot f_2(Y)\Big) \end{aligned} \tag{C.2}$$

   Hierbei muss dann allerdings die Nichtnegativität bzw. Integrierbarkeit von $f_1(X)$, $f_2(Y)$ und $f_1(X) \cdot f_2(Y)$ vorausgesetzt werden.

3. Im folgenden Lemma wird – bezogen auf den allgemeinen Fall (C.1) – zunächst der Spezialfall $\mathcal{C} = \sigma(X)$ betrachtet.

Lemma C.1 *Es seien $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ zwei unabhängige zufällige Vektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$. Weiter sei $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbare Funktion mit $f(x, Y)$ nichtnegativ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ oder $f(X, Y)$ integrierbar und $f(x, Y)$ integrierbar für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\Big(f(X,Y) \mid X\Big) \;=\; g(X) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \textit{mit} \quad g(x) := \mathrm{E}\Big(f(x,Y)\Big).$$

Beweis: Für eine Borel-Menge $B^m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ist $X^{-1}(B^m) \in \sigma(X)$ (für den Spezialfall $B^m = \mathbb{R}^m$ erhält man $X^{-1}(B^m) = \Omega$). Da $f(X, Y)$ nichtnegativ oder integrierbar ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(f(X,Y) \cdot \mathbb{1}_{X^{-1}(B^m)}\Big) \;&=\; \int_\Omega f(X,Y) \cdot \mathbb{1}_{X^{-1}(B^m)} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&=\; \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x,y) \cdot \mathbb{1}_{B^m}(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit von X und Y ist die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ gleich dem Produktmaß $\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$, und es ergibt sich wegen des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}\Big(f(X,Y) \cdot \mathbb{1}_{X^{-1}(B^m)}\Big) \\
=\; & \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} f(x,y) \cdot \mathbb{1}_{B^m}(x) \,\mathrm{d}\Big(\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y\Big)(x,y) \\
=\; & \int_{\mathbb{R}^m} \Bigg(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y)\Bigg) \cdot \mathbb{1}_{B^m}(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \\
=\; & \int_{\mathbb{R}^m} \Bigg(\int_\Omega f(x,Y) \,\mathrm{d}\mathbb{P}\Bigg) \cdot \mathbb{1}_{B^m}(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \\
=\; & \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{E}\Big(f(x,Y)\Big) \cdot \mathbb{1}_{B^m}(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \\
=\; & \int_{\mathbb{R}^m} g(x) \cdot \mathbb{1}_{B^m}(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x) \;=\; \int_\Omega g(X) \cdot \mathbb{1}_{X^{-1}(B^m)} \,\mathrm{d}\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Nun gibt es zu jedem $C \in \sigma(X)$ eine Borel-Menge $B^m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, so dass $C = X^{-1}(B^m)$ gilt. Man erhält demnach

$$\int_C f(X,Y) \,\mathrm{d}\mathbb{P} \;=\; \int_\Omega f(X,Y) \cdot \mathbb{1}_C \,\mathrm{d}\mathbb{P} \;=\; \int_\Omega g(X) \cdot \mathbb{1}_C \,\mathrm{d}\mathbb{P} \;=\; \int_C g(X) \,\mathrm{d}\mathbb{P}$$

Da $g(X)$ messbar bezüglich $\sigma(X)$ ist, entspricht dies der Definition der bedingten Erwartung von $f(X, Y)$ bezüglich X, d.h.

$$\mathrm{E}\Big(f(X,Y) \mid X\Big) \;=\; g(X) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

∎

Bemerkung: Für einen Wienerprozess $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ erhält man aus obigem Lemma sofort

$$\mathrm{E}\Big(f(W_s, W_t - W_s) \mid W_s\Big) \;=\; g(W_s) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad \text{mit} \quad g(x) := \mathrm{E}\Big(f(x, W_t - W_s)\Big)$$

für $s < t,\ s,t \in \mathbb{T}$. Benötigt wird jedoch eine noch allgemeinere Aussage, in der die Bedingung $\sigma(W_s)$ allgemein durch eine σ-Algebra, bezüglich der $W_t - W_s$ unabhängig ist, ersetzt wird (beispielsweise durch $\sigma\Big(W_t, t \in [0,s]\Big)$).

Satz C.2 *Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum* $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\Big)$, *eine Unter-*$\sigma$*-Algebra* $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ *sowie zwei zufällige Vektoren* $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ *und* $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ *auf* $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\Big)$, *wobei* X *messbar ist bezüglich* $\mathcal{C}$ *und* Y *unabhängig von* $\mathcal{C}$. *Weiter sei* $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$*-*$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *messbare Funktion mit* $f(x,Y)$ *nichtnegativ für alle* $x \in \mathbb{R}^m$ *oder* $f(X,Y)$ *integrierbar und* $f(x,Y)$ *integrierbar für alle* $x \in \mathbb{R}^m$. *Dann gilt*

$$\mathrm{E}\Big(f(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;=\; g(X) \quad \mathbb{P}\text{-}f.s. \quad mit \quad g(x) := \mathrm{E}\Big(f(x,Y)\Big). \tag{C.3}$$

Beweis: Die Vorgehensweise aus Lemma C.1 lässt sich nicht unmittelbar verallgemeinern, da nicht jede Menge $C \in \mathcal{C}$ eine Urbildmenge von X sein muss, d.h., es gilt $\sigma(X) \subset \mathcal{C}$. Hier wird daher der Weg der algebraischen Induktion beschritten, d.h., ausgehend von einer „einfachen" Funktion f wird die gewünschte Eigenschaft (C.3) für immer „komplexere" Funktionen f gezeigt.

1. Die Eigenschaft (C.3) ist „linear" in folgendem Sinne:

   Sei $f_1, \ldots, f_k$ eine Folge von Funktionen, die die Voraussetzungen des Satzes sowie (C.3) erfüllen. Die Nichtnegativtäts- bzw. Integrierbarkeitsvoraussetzungen gelten dabei jeweils für die gesamte Folge, d.h.

   (a) für $i = 1, \ldots, k$ ist $f_i(x,Y)$ nichtnegativ für alle $x \in \mathbb{R}^m$ bzw.

   (b) für $i = 1, \ldots, k$ sind $f_i(X,Y)$ integrierbar und $f_i(x,Y)$ integrierbar für alle $x \in \mathbb{R}^m$.

   Im Fall (a) wird im Folgenden

   $$f \;:=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot f_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_{0+} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

   betrachtet (in diesem Fall ist f messbar und $f(x,Y) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m$), im Fall (b)

   $$f \;:=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot f_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1, \ldots, k)$$

   (in diesem Fall ist f messbar und sowohl $f(X,Y)$ integrierbar als auch $f(x,Y)$ integrierbar für alle $x \in \mathbb{R}^m$).

In jedem der beiden Fälle gilt (C.3) auch für die Funktion f, denn es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(f(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;&=\; \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot f_i(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \mathrm{E}\Big(f_i(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \\
&=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot g_i(X) \quad \text{mit} \quad g_i(x) := \mathrm{E}\Big(f_i(x,Y)\Big),\; x \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Für $\omega \in \Omega$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \Big(g_i(X)\Big)(\omega) \;&=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot g_i\Big(X(\omega)\Big) \\
&=\; \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \mathrm{E}\bigg(f_i\Big(X(\omega), Y\Big)\bigg) \;=\; \mathrm{E}\bigg(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot f_i\Big(X(\omega), Y\Big)\bigg) \\
&=\; \mathrm{E}\bigg(f\Big(X(\omega), Y\Big)\bigg) \;=\; g\Big(X(\omega)\Big) \quad \text{mit} \quad g(x) := \mathrm{E}\Big(f(x,Y)\Big),\; x \in \mathbb{R}^m, \\
&=\; \Big(g(X)\Big)(\omega)
\end{aligned}$$

und somit $\mathrm{E}\bigg(f(X,Y) \mid \mathcal{C}\bigg) \;=\; g(X).$

2. Die Eigenschaft (C.3) gilt für $f = \mathbb{1}_M$ mit $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:

   Jede Menge $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ lässt sich darstellen als $M = B^m \times B^n$ mit $B^m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ und $B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Somit gilt

   $$f(X,Y) \;=\; \mathbb{1}_M(X,Y) \;=\; \mathbb{1}_{B^m \times B^n}(X,Y) \;=\; \mathbb{1}_{B^m}(X) \cdot \mathbb{1}_{B^n}(Y)$$

   und folglich gemäß (C.2), da $\mathbb{1}_M$ nichtnegativ ist, die gewünschte Eigenschaft (C.3).

3. Die Eigenschaft (C.3) gilt für $f = \mathbb{1}_M$ mit $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$:

   Es sei

   $$\mathcal{D} \;:=\; \Big\{M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) :\; f = \mathbb{1}_M \text{ erfüllt Eigenschaft (C.3)}\Big\},$$

   d.h., es wird $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gezeigt:

   (a) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System:

      i. Es gilt $\emptyset \in \mathcal{D}$ wegen $\mathbb{1}_\emptyset \equiv 0$ und $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \in \mathcal{D}$ wegen $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} \equiv 1$.

      ii. Aus $M \in \mathcal{D}$ folgt $\overline{M} \in \mathcal{D}$, denn es gilt $\mathbb{1}_{\overline{M}} = 1 - \mathbb{1}_M$ und Eigenschaft (C.3) ist „linear“ (siehe 1., denn sowohl $\mathbb{1}_M(X,Y)$ ist integrierbar als auch $\mathbb{1}_M(x,Y)$ ist integrierbar für alle $x \in \mathbb{R}^m$, da $\mathbb{1}_M$ beschränkt ist).

iii. Für jede disjunkte Folge $(M_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ gilt $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k \in \mathcal{D}$:

Aufgrund der Disjunktheit der Mengen M_1, M_2, ... ist

$$\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k} \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{M_i}.$$

Wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz für bedingte Erwartungen sowie der „Linearität" von (C.3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k}(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;&=\; \mathrm{E}\Big(\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{M_i}(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big)\\
=\; \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{M_i}(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;&=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{M_i}(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big)\\
=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} g_i(X) \quad \text{mit} \quad & g_i(x) := \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{M_i}(x,Y)\Big), \quad x \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Für $\omega \in \Omega$ ist nun weiter

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} \Big(g_i(X)\Big)(\omega) \;&=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} g_i\Big(X(\omega)\Big)\\
=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{M_i}\Big(X(\omega),Y\Big)\Big) \;&=\; \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{M_i}\Big(X(\omega),Y\Big)\Big)\\
=\; \mathrm{E}\Big(\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{M_i}\Big(X(\omega),Y\Big)\Big) \;&=\; \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k}\Big(X(\omega),Y\Big)\Big)\\
=\; g\Big(X(\omega)\Big) \quad \text{mit} \quad & g(x) := \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k}(x,Y)\Big),\; x \in \mathbb{R}^m,\\
=\; \Big(g(X)\Big)(\omega)&
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k}(X,Y) \mid \mathcal{C}\Big) \;=\; g(X).$$

(b) Wegen 2. ergibt sich

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;\subset\; \mathcal{D}.$$

Da $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ durchschnittsstabil ist, gilt

$$\sigma\Big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\Big) \;=\; \delta\Big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\Big)$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;&=\; \sigma\Big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\Big) \;=\; \delta\Big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\Big)\\
&\subset\; \delta(\mathcal{D}) \;=\mathcal{D} \;\subset\; \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),
\end{aligned}$$

d.h. $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

4. Die Eigenschaft (C.3) gilt für einfache Funktionen $f = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \cdot \mathbb{1}_{M_i}$ mit $M_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $c_i \in \mathbb{R}_{0+}$, $i = 1, \ldots, k$ ($k \in \mathbb{N}$): Dies ergibt sich direkt aus der „Linearität“ von (C.3) (siehe 1.).

5. Die Eigenschaft (C.3) gilt für alle messbaren Funktion $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x, Y)$ nichtnegativ für alle $x \in \mathbb{R}^m$:

   Ist f $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar, so sind insbesondere auch $f(X, Y)$ $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar und $f(x, Y)$ $\mathcal{F}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar für alle $x \in \mathbb{R}^m$. Für jede nichtnegative Funktion $f(x, Y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m$ gibt es dann eine Folge $\Big\{ f_k(x, Y) \Big\}_{k \in \mathbb{N}}$ isoton wachsender einfacher Funktionen, so dass

$$f(x, Y) \;=\; \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x, Y)$$

   gilt. Ist $f(x, Y)$ nichtnegativ für alle $x \in \mathbb{R}^m$, so ist insbesondere auch $f(X, Y)$ nichtnegativ und

$$f(X, Y) \;=\; \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(X, Y).$$

   Der Satz von der monotonen Konvergenz für nichtnegative Funktionen und bedingte Erwartungen liefert nun

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\Big(f(X, Y) \mid \mathcal{C} \Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(X, Y) \mid \mathcal{C} \Big) \;=\; \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{E}\Big(f_k(X, Y) \mid \mathcal{C} \Big) \\ = \;& \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k(X) \quad \text{mit} \quad g_k(x) := \mathrm{E}\Big(f_k(x, Y) \Big), \quad x \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

   Für $\omega \in \Omega$ ist nun weiter

$$\begin{aligned} & \sup_{k \in \mathbb{N}} \Big(g_k(X) \Big)(\omega) \;=\; \sup_{k \in \mathbb{N}} g_k\Big(X(\omega) \Big) \\ = \;& \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{E}\Big(f_k\Big(X(\omega), Y \Big) \Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k\Big(X(\omega), Y \Big) \Big) \\ = \;& \mathrm{E}\Big(f\Big(X(\omega), Y \Big) \Big) \;=\; g\Big(X(\omega) \Big) \quad \text{mit} \quad g(x) := \mathrm{E}\Big(f(x, Y) \Big),\; x \in \mathbb{R}^m, \\ = \;& \Big(g(X) \Big)(\omega) \end{aligned}$$

   und somit

$$\mathrm{E}\Big(f(X, Y) \mid \mathcal{C} \Big) \;=\; g(X).$$

6. Die Eigenschaft (C.3) gilt für alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(X, Y)$ integrierbar und $f(x, Y)$ integrierbar für alle $x \in \mathbb{R}^m$:

Da $f(X,Y)$ integrierbar ist, ist auch der Positivteil $\Big(f(X,Y)\Big)^+$ und der Negativteil $\Big(f(X,Y)\Big)^-$ integrierbar (analog für $f(x,Y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m$). Da sowohl die Positiv- als auch die Negativteile nichtnegativ sind, gilt (C.3) wegen 5. zunächst für die Positiv- und Negativteile und wegen der „Linearität“ von (C.3) somit auch für $f(X,Y) = \Big(f(X,Y)\Big)^+ - \Big(f(X,Y)\Big)^-$ (analog für $f(x,Y)$ mit $x \in \mathbb{R}^m$).

■

C.5 Stoppzeiten, erweiterte natürliche Filtration und das Reflexionsprinzip für den Wienerprozess

Definition C.3 *Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right)$, ein Zeitbereich $\mathbb{T} = [0, T]$, $T > 0$, sowie eine Filtration $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$. Eine Zufallsgröße $\tau : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ auf $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right)$ heißt **Stoppzeit** (stopping time) bezüglich $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$, falls*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Bemerkungen:

1. Für eine Stoppzeit kann zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ auf Basis der in $\mathcal{F}_t$ enthaltenen Informationen entschieden werden, ob das Ereignis $\{\tau \leq t\}$ eingetreten ist. Insbesondere kann eine Stoppzeit als Wartezeit bis zum Eintreten eines bestimmmten Ereignisses interpretiert werden. Der Wert „∞“ berücksichtigt dabei die Möglichkeit, dass das betreffende Ereignis nicht in endlicher Zeit eintritt.

2. Diese Definition kann auf den Fall unbeschränkter Zeitbereiche (z.B. $\mathbb{T} = [0, \infty)$) verallgemeinert werden.

3. Die Sprechweise „τ ist adaptiert an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$“ ist zwar inhaltlich nahe liegend, jedoch aus mathematischer Sicht nicht korrekt, da nur stochastische Prozesse an Filtrationen adaptiert sein können. Tatsächliche ist aber der stochastische Prozess $\left(\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptiert an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$.

4. Ist $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stochastischer Prozess auf $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right)$ und τ eine Stoppzeit, dann heißt

$$\left(X_{\min(t,\tau)}\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

der bei τ **gestoppte Prozess**. Insbesondere ist

$$X_{\min(t,\tau)} \;=\; X_t \cdot \mathbb{1}_{\{t<\tau\}} + X_\tau \cdot \mathbb{1}_{\{t\geq\tau\}} \qquad (t \in \mathbb{T}).$$

Der gestoppte Prozess $\left(X_{\min(t,\tau)}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ist somit für $t \geq \tau$ (für ein festes $\omega \in \Omega$) konstant.

5. Sind τ_1 und τ_2 Stoppzeiten bezüglich einer Filtation $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$, so sind auch $\min(\tau_1, \tau_2)$ und $\max(\tau_1, \tau_2)$ Stoppzeiten bezüglich $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$.

Um einen Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ beim Erreichen eines bestimmten Wertebereichs $B \subset \mathbb{R}$ (z.B. im Spezialfall $B = \{x\}$ mit $x \in \mathbb{R}$) zu stoppen, wird im Folgenden die **Ersteintrittszeit** $\tau_B : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ mit

$$\tau_B(\omega) \;:=\; \inf\left\{t \in \mathbb{T} : X_t(\omega) \in B\right\}.$$

betrachtet. Es zeigt sich, dass – selbst bei Beschränkung auf Prozesse mit stetigen Pfaden – diese Ersteintrittszeit bei einer *offenen* Menge nur unter zusätzlichen Voraussetzungen eine Stoppzeit bezüglich der vom Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ erzeugten natürlichen Filtration ist.

Lemma C.4 *Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stochastischer Prozess mit stetigen Pfaden auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$, $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ die durch $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ erzeugte Filtration (d.h. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \le t)$), $B \subset \mathbb{R}$ und $\tau_B : \Omega \to \mathbb{T} \cup \{\infty\}$ die dazugehörige Ersteintrittszeit mit $\{\tau_B \le T\} \in \mathcal{F}_T$. Dann gilt:*

(a) Ist B eine abgeschlossene Menge, so ist τ_B eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

(b) Ist B eine offene Menge, so gilt

$$\{\tau_B < t\} \in \mathcal{F}_t$$

für alle $t \in \mathbb{T}$.

(c) Ist B eine offene Menge, so ist τ_B eine Stoppzeit bezüglich $(\mathcal{F}_{t+})_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\mathcal{F}_{t+} \;:=\; \begin{cases} \mathcal{F}_T & \text{für } t = T \\ \bigcap\limits_{s\in(t,T]} \mathcal{F}_s & \text{sonst} \end{cases} \tag{C.4}$$

Ohne Beweis.

Bemerkungen:

1. Eine Filtration mit Eigenschaft C.4 heißt **rechtsseitig stetig**. Diese Eigenschaft sichert, dass alle Ersteintrittszeiten in offene Mengen bei Prozessen mit stetigen Pfaden Stoppzeiten sind.

2. Für eine Ersteintrittszeit $\tau_{\{x\}}$ mit $x \in \mathbb{R}$ (d.h. Zeitpunkt des erstmaligen Berührens einer Schranke) gilt unter den Voraussetzungen des obigen Lemmas

$$X_{\tau_{\{x\}}(\omega)}(\omega) \;=\; x \quad \text{für } \;\omega \in \Big\{\tau_{\{x\}} \le T\Big\}.$$

Im Bezug auf einen Wienerprozess $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ erhält man nun folgende wichtige Aussagen:

Lemma C.5 (Erweiterte natürliche Filtration) *Es seien $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Wienerprozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$ mit der natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ und*

$$\mathcal{N} \;:=\; \Big\{A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) = 0\Big\}$$

die Menge aller Nullmengen in $\mathcal{F}$. Dann ist die Filtration $\Big(\mathcal{F}_t^*\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\mathcal{F}_t^* \;:=\; \sigma\left(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N}\right)$$

*rechtsseitig stetig und wird als **erweiterte natürliche Filtration** von W bezeichnet.*

Ohne Beweis.

Bemerkungen:

1. Die Verwendung der erweiterten natürlichen Filtration sichert, dass alle Ersteintrittszeiten Stoppzeiten bezüglich dieser Filtration sind.

2. Die sonstigen Eigenschaften des Wienerprozesses bleiben bei Verwendung der erweiterten natürlichen Filtration anstelle der natürlichen Filtration unverändert.

Lemma C.6 (Reflexionsprinzip) *Es seien $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Wienerprozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\Big)$ und τ eine Stoppzeit bezüglich der erweiterten natürlichen Filtration $\Big(\mathcal{F}_t^*\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ von W. Dann ist der Prozess $W^{(\tau)} := (W_t^{(\tau)})_{t\in\mathbb{T}}$ mit*

$$W_t^{(\tau)}(\omega) \ := \ \begin{cases} W_t(\omega) & \text{für } t \leq \tau(\omega) \\ 2\cdot W_{\tau(\omega)}(\omega) - W_t(\omega) & \text{für } t > \tau(\omega) \end{cases} \qquad (\omega \in \Omega)$$

ein Wienerprozess.

Ohne Beweis.

Bemerkungen:

1. Die Verwendung der erweiterten natürlichen Filtration sichert, dass auch Ersteintrittszeiten in offene Mengen Stoppzeiten sind und obiger Satz auf diese angewendet werden kann.

2. Für $t > \tau(\omega)$ ist

$$2\cdot W_{\tau(\omega)}(\omega) - W_t(\omega) \ = \ W_{\tau(\omega)}(\omega) - \Big(W_t(\omega) - W_{\tau(\omega)}(\omega)\Big).$$

   Ist τ demnach eine Ersteintrittszeit $\tau = \tau_B$ mit $B \subset \mathbb{R}$, so wird der Prozess am Wert $W_{\tau_B(\omega)}(\omega)$ gespiegelt. Für $B = \{x\}$ $(x \in \mathbb{R})$ entspricht dies einer Reflexion an einer Schranke x. Für $B = \{0\}$ erhält man wegen $W_0 \equiv 0$ als Spezialfall die bereits bekannte Spiegelungsinvarianz.

C.6 p-Variation und Variation des Wienerprozesses

Definition C.7 *Gegeben seien eine Funktion $f : [0,t] \to \mathbb{R}$, eine positive reelle Zahl $p > 0$ sowie eine endliche Zerlegung $\Pi = \left\{t_0, t_1, \ldots, t_n\right\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ von $[0,t]$.*

- *Dann heißt*

$$S_p^{\Pi}(f) \ := \ \sum_{i=1}^{n} \left| f(t_i) - f(t_{i-1}) \right|^p$$

  *die p-**Variationsumme** von f bezüglich Π.*

- *Die kleinste obere Schranke aller p-Variationssummen*

$$V_p(f) \ := \ \sup_{\Pi} S_p^{\Pi}(f)$$

  *heißt **totale** p-**Variation**. Im Fall $p = 1$ heißt diese auch **Totalvariation**, im Fall $p = 2$ **quadratische Variation**.*

- *Es bezeichne $|\Pi| := \max\limits_{i=1,\ldots,n} \left(t_i - t_{i-1}\right)$ den Feinheitsgrad einer Zerlegung Π. Für eine Folge $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit $\lim\limits_{k\to\infty} |\Pi_k| = 0$ heißt der Grenzwert – im Fall seiner Existenz –*

$$v_p^{(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}}(f) \ := \ \lim_{k\to\infty} S_p^{\Pi_k}(f)$$

  *die p-**Variation** von f bezüglich $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Bemerkung: Die p-Variation kann von der konkret gewählten Zerlegungsfolge abhängen.

Lemma C.8 *Der Wienerprozess $W = (W_s)_{s\in[0,t]}$ besitzt im quadratischen Mittel die quadratische Variation t, d.h.*

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\left(S_2^{\Pi_k}(W) - t\right)^2 \ = \ 0$$

für alle Folgen von Zerlegungen $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} |\Pi_k| = 0$.

Beweis:

- Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left(S_2^{\Pi_k}(W)\right) \\
= \ & \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^2\right) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right) \quad (W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathrm{N}(0, t_i - t_{i-1})) \\
= \ & \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \ = \ t.
\end{aligned}$$

- Somit ergibt sich für ein festes $k \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\left(S_2^{\Pi_k}(W) - t\right)^2 \;=\; \mathrm{Var}\left(S_2^{\Pi_k}(W)\right) \;=\; \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^2\right) \\
& \text{(unabhängige Zuwächse)} \\
= \;& \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left(\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2\right) \qquad \text{(Gleichheit von Bienaymé)} \\
= \;& \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^4 - (t_i - t_{i-1})^2 \\
& (X \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2) \;\Rightarrow\; \mathrm{E}X^4 = 3\sigma^4) \\
= \;& \sum_{i=1}^{n} 3 \cdot (t_i - t_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})^2 \;=\; 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\
\leq \;& 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot \max_{i=1,\dots,n} (t_i - t_{i-1}) \\
= \;& 2 \cdot |\Pi_k| \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \;=\; 2 \cdot t \cdot |\Pi_k|
\end{aligned}
$$

und $\lim\limits_{k \to \infty} 2 \cdot t \cdot |\Pi_k| = 0$.

■

Bemerkungen:

1. Für alle Folgen von Zerlegungen $(\Pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\Pi_k| < \infty$ lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{k \to \infty} S_2^{\Pi_k}(W) \;=\; t \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

2. Das folgende Lemma sagt aus, dass die Pfade des Wienerprozesses nicht nur fast sicher von unendlicher Totalvariation, sondern sogar für $p < 2$ fast sicher von unendlicher p-Variation sind.

Lemma C.9 *Für $p < 2$ gilt*

$$V_p(W) \;=\; \infty \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Beweis: Für δ mit $0 < \delta < 2$ und eine Folge von Zerlegungen $(\Pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} |\Pi_k| = 0$ ist für ein festes $k \in \mathbb{N}$

$$S_2^{\Pi_k}(W) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2$$

$$\leq \max_{i=1,\ldots,n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^{\delta} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^{2-\delta}$$
$$= \max_{i=1,\ldots,n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^{\delta} \cdot S_{2-\delta}^{\Pi_k}(W)$$
$$\leq \max_{i=1,\ldots,n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^{\delta} \cdot V_{2-\delta}(W)$$

Für $k \to \infty$ ist die linke Seite im quadratischen Mittel endlich und somit wenigstens für eine Teilfolge auch fast sicher endlich. Auf der rechten Seite ist

$$\lim_{k\to\infty} \max_{t_i \in \Pi_k} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^{\delta} \;=\; 0 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

wegen der fast sicheren Stetigkeit der Pfade des Wienerprozesses. Somit ist

$$V_{2-\delta}(W) \;=\; \infty \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

■

Bemerkung: Analog zum Beweis des vorigen Lemmas lässt sich zeigen, dass die p-Variation des Wienerprozesses für $p > 2$ Null ist, indem für $\delta > 0$

$$S_{2+\delta}^{\Pi_k}(W) \;\leq\; \max_{i=1,\ldots,n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right|^{\delta} \cdot S_2^{\Pi_k}(W) \;\to\; 0 \cdot t$$

betrachtet wird. Dies macht deutlich, dass die quadratische Variation im Zusammenhang mit dem Wienerprozess die „geeignete Variation“ ist.

C.7 Ein Arbitragebeispiel im Zusammenhang mit der Begriffsbildung eines stochastischen Integrals

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, dass die formale Verwendung des Riemann-Stieltjes-Integrals bei einem vom Wienerprozess abgeleiteten Integrator zu Ergebnissen führt, die aus finanzmathematischer Sicht unplausibel sind. Hier wird zum Beispiel gezeigt, dass sich bereits für eine vergleichsweise einfache selbstfinanzierende Handelsstrategie eine Arbitragemöglichkeit ergibt.

- Es seien der Zinssatz $r := 0$, $H_0^0 := 0$ und $H_t^1 := S_t^1 - S_0^1$ für $t \in [0,T]$.
- Dann ist ebenfalls $V_0(\boldsymbol{H}_0) = H_0^0 \cdot S_0^0 + H_0^1 \cdot S_0^1 = 0$.
- Da $S_t^0 \equiv 1$ für alle $t \in [0,T]$, ist $\int_0^t H_s^0 \,\mathrm{d}S_s^0 = 0$ für alle $t \in [0,T]$. Die Selbstfinanzierungsbedingung vereinfacht sich somit zu

  $$V_t(\boldsymbol{H}_t) \;=\; \int_0^t H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1.$$

- Da H_t^0 die Selbstfinanzierungsbedingung nicht beeinflusst, kann es wegen

  $$V_t(\boldsymbol{H}_t) \;=\; H_t^0 \cdot S_t^0 + H_t^1 \cdot S_t^1$$

  für $t \in [0,T]$ durch

  $$H_t^0 \;=\; V_t(\boldsymbol{H}_t) - H_t^1 \cdot S_t^1$$

  bestimmt werden. Die so konstruierte Handelsstrategie ist selbstfinanzierend.

- Der Wert des Portfolios $\boldsymbol{H}_T$ zum Endzeitpunkt T ergibt sich aus der Selbstfinanzierungsbedingung

  $$V_T(\boldsymbol{H}_T) \;=\; \int_0^T H_s^1 \,\mathrm{d}S_s^1 \;=\; \int_0^T (S_s^1 - S_0^1) \,\mathrm{d}S_s^1.$$

- Wird $\int_0^T (S_s^1 - S_0^1) \,\mathrm{d}S_s^1$ als pfadweises Riemann-Stieltjes-Integral angesehen, so ergibt sich zunächst, da S_0^1 konstant ist,

  $$\int_0^T (S_s^1 - S_0^1) \,\mathrm{d}S_s^1 \;=\; \int_0^T (S_s^1 - S_0^1) \,\mathrm{d}(S_s^1 - S_0^1)$$

  und wegen der Regel der partiellen Integration für Riemann-Stieltjes-Integrale (3.13)

  $$\int_0^T (S_s^1 - S_0^1) \,\mathrm{d}(S_s^1 - S_0^1) \;=\; (S_T^1 - S_0^1)^2 - 0 - \int_0^T (S_s^1 - S_0^1) \,\mathrm{d}(S_s^1 - S_0^1),$$

also

$$V_T(\boldsymbol{H}_T) \;=\; \int_0^T (S_s^1 - S_0^1)\,\mathrm{d}(S_s^1 - S_0^1) \;=\; \frac{1}{2}(S_T^1 - S_0^1)^2.$$

Wegen $\mathbb{P}\left(S_T^1 = S_0^1\right) = 0$ erhält man

$$\mathbb{P}\Big(V_T(\boldsymbol{H}_T) > 0\Big) \;>\; 0$$

und die betrachtete Handelsstrategie ist somit eine Arbitrage.

C.8 Das Itō-Integral bezüglich des Wienerprozesses

Bemerkung: Die Definition eines stochastischen Integrals mit dem Wienerprozess als Integrator ist von erheblicher technischer Komplexität. Hier werden lediglich die wichtigsten Aspekte dargestellt.

Definition C.10 *Ein stochastischer Prozess* $\left(X_s\right)_{s\in[0,t]}$ *heißt* ***einfach*** *auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_s\right)_{s\in[0,t]}, \mathbb{P}\right)$*, wenn es eine Zerlegung* $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ *von* $[0, t]$ *mit*

$$0 \ = \ t_0 \ < \ t_1 \ < \ \ldots \ < \ t_n \ = \ t$$

gibt, so dass X_{t_i} *für* $i = 0, \ldots, n-1$

- $\mathcal{F}_{t_i}$*-messbar und*
- *quadratisch integrierbar*

ist und

$$X_s \ = \ X_{t_{i(s)}} \quad \textit{mit} \quad i(s) := \max\left\{j = 0, \ldots, n-1 : t_j \leq s\right\}, \quad s \in [0, t],$$

gilt.

Bemerkungen:

1. Ein einfacher stochastischer Prozess ist auf den Intervallen $[0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, $\ldots$, $[t_{n-2}, t_{n-1})$, und $[t_{n-1}, t]$ *zeitlich* konstant.
2. Für die allgemeine Definition eines Itō-Integrals werden Grenzübergänge im quadratischen Mittel vorgenommen, weswegen die quadratische Integrierbarkeit der einfachen Prozesse benötigt wird.
3. Ein einfacher stochastischer Prozess X ist progressiv messbar, d.h., $X : (\tilde{s}, \omega) \in [0, s] \times \Omega \mapsto X_{\tilde{s}}(\omega)$ ist messbar bezüglich $\mathcal{B}([0, s]) \otimes \mathcal{F}_s$ für alle $s \in [0, t]$, also ist X insbesondere adaptiert an $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,t]}$.
4. Eine einfache Handelsstrategie gemäß Definition 3.20, die quadratisch integrierbar ist, ist ein einfacher stochastischer Prozess.

Definition C.11 *Gegeben seien ein Wienerprozess* $W = (W_s)_{s\in[0,t]}$ *auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right)$ *mit der erweiterten natürlichen Filtration* $\left(\mathcal{F}_s^*\right)_{s\in[0,t]}$ *sowie ein einfacher stochastischer Prozess* $X = \left(X_s\right)_{s\in[0,t]}$ *auf dem entsprechenden filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt*

$$I(X) \ := \ \int_0^t X_s \, \mathrm{d}W_s \ := \ \sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}} \cdot \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)$$

das ***Itō-Integral*** *von* X.

Bemerkung: Entscheidend bei der Definition des Itō-Integrals ist, dass die Zeitindizes t_{i-1} der Zufallsgrößen $X_{t_{i-1}}$ jeweils am *linken* Rand der Intervalle $[t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, liegen.

Lemma C.12 *Das Itō-Integral $I(X)$ von einfachen stochastischen Prozessen X besitzt folgende Eigenschaften:*

1. *$I(X)$ ist linear.*
2. *$I(X)$ ist quadratisch integrierbar und es gilt die* ***Itō-Isometrie***

$$\mathrm{E}\Big(I(X)\Big)^2 \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t \Big|X_s\Big|^2 \,\mathrm{d}s\right).$$

3. *$I(X)$ ist ein (pfad-)stetiges Martingal bezüglich $\Big(\mathcal{F}_s^*\Big)_{s\in[0,t]}$.*

Bemerkung: Es gilt $\mathrm{E}\left(\int_0^t \Big|X_s\Big|^2 \mathrm{d}s\right) = \int_0^t \mathrm{E}\left(\Big|X_s\Big|^2\right) \mathrm{d}s.$

Definition C.13 *Gegeben seien ein Wienerprozess $W = (W_s)_{s\in[0,t]}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$ mit der erweiterten natürlichen Filtration $\Big(\mathcal{F}_s^*\Big)_{s\in[0,t]}$ sowie ein progressiv messbarer und quadratisch integrierbarer Prozess $X = \Big(X_s\Big)_{s\in[0,t]}$ auf dem entsprechenden filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt*

$$I(X) \;:=\; \lim_{k\to\infty} I(X^k) \quad \textit{im quadratischen Mittel}$$

das ***Itō-Integral*** *von X, wobei $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine (beliebige) Folge von einfachen stochastischen Prozessen ist, die im Sinne der Norm $\Big\|.\Big\|$ mit*

$$\Big\|X^k\Big\| \;:=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t \Big|X_s^k\Big|^2 \,\mathrm{d}s\right)$$

gegen X konvergiert.

Bemerkungen:

1. Gemäß Definition des Limes im quadratischen Mittel gilt demnach

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\Big(I(X^k) - I(X)\Big)^2 \;=\; 0.$$

2. Die Eigenschaften aus Lemma C.12 gelten entsprechend.
3. Das Itō-Integral ist $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig bestimmt.

4. Aus $\mathrm{E}\left(\int_0^t \left|X_s\right|^2 \mathrm{d}s\right) < \infty$ folgt

$$\mathbb{P}\Big(\int_0^t \left|X_s\right|^2 \mathrm{d}s \;<\; \infty\Big) \;=\; 1. \tag{C.5}$$

   Tatsächlich ist es möglich (aber technisch aufwändig), ein Itō-Integral auch für diejenigen Prozesse X zu definieren, die lediglich (C.5) erfüllen. Im allgemeinen Fall kann dann allerdings nicht mehr von der Gültigkeit der Itō-Isometrie ausgegangen werden.

5. Es ist möglich, das Itō-Integral auch bezüglich allgemeineren Prozessklassen (z.B. der Klasse der rechtsseitig stetigen (lokalen) L^2-Martingale, siehe Abschnitt D.3 und Definition D.26) zu definieren.

6. Zur konkreten Berechnung eines Itō-Integrals kann für Spezialfälle das folgende Lemma verwendet werden. Dieses Lemma ermöglicht eine Charakterisierung des Itō-Integrals mit Hilfe von Riemann-Stieltjes-Summen.

Lemma C.14 (Berechnung Itō-Integral) *Es seien $W = (W_s)_{s\in[0,t]}$ ein Wienerprozess und f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$I\Big(f(W)\Big) \;=\; \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} f\Big(W_{t_{i-1}}\Big)\cdot\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big) \quad \textit{in Wahrscheinlichkeit}$$

für jede Folge $(\Pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen $\Pi_k := \{t_0, t_1, \ldots, t_{n_k}\Big\}$ des Intervalls $[0,t]$ mit $\lim\limits_{k\to\infty}\Big|\Pi_k\Big| = 0$.

Bemerkungen:

1. Charakteristisch für das Itō-Integral in der Darstellung als Riemann-Stieltjes-Summe ist, dass für den Integranden $f(W)$ jeweils die Werte $f\Big(W_{t_{i-1}}\Big)$ an der *linken* Grenze des Intervalls $[t_{i-1}, t_i)$ verwendet werden im Gegensatz zum Riemann-Stieltjes-Integral, bei dem ein *beliebiger* Wert $f\Big(W_\tau\Big)$ mit $\tau \in [t_{i-1}, t_i)$ verwendet wird. Tatsächlich hängt der Grenzwert der Riemann-Stieltjes-Summe von der betrachteten Stelle innerhalb des Intervalls ab. Es sind daher abweichende Definitionen eines stochastischen Integrals möglich[8]. Allerdings ist von diesen Möglichkeiten das Itō-Integral das einzige, dass die Martingal-Eigenschaft besitzt.

2. Mit Hilfe der Riemann-Stieltjes-Summe lässt sich nun $\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s$ berechnen. Für ein festes $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich zunächst für die quadratische Variationssumme $S_2^{\Pi_k}(W)$ von W bezüglich Π_k (siehe Definition C.7)

$$S_2^{\Pi_k}(W) \;=\; \sum_{i=1}^{n_k} \Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big)^2$$

[8] z.B. das sogenannte *Stratonovich*-Integral, bei dem jeweils die Werte in der Intervallmitte verwendet werden

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n_k}\Big(W_{t_i}^2 - 2\cdot W_{t_i}\cdot W_{t_{i-1}} + W_{t_{i-1}}^2\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n_k}\Big(W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2\Big) - 2\cdot\sum_{i=1}^{n_k}\Big(-W_{t_{i-1}}^2 + W_{t_{i-1}}\cdot W_{t_i}\Big)\\ &\quad \text{(Teleskopsumme)}\\ &= W_t^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{n_k} W_{t_{i-1}}\cdot\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big)\end{aligned}$$

und somit

$$\sum_{i=1}^{n_k} W_{t_{i-1}}\cdot\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big) \;=\; \frac{1}{2}\cdot W_t^2 - \frac{1}{2}\cdot S_2^{\Pi_k}(W).$$

Da W im quadratischen Mittel die quadratische Variation t besitzt (siehe Lemma C.8), erhält man

$$\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s \;=\; \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k} W_{t_{i-1}}\cdot\Big(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\Big) \;=\; \frac{1}{2}\cdot W_t^2 - \frac{1}{2}\cdot t$$

im quadratischen Mittel.

3. Ein weiteres sehr nützliches „Werkzeug“ zum Rechnen mit Itō-Integralen ist die Itō-Doeblin-Formel:

Lemma C.15 (Itō-Doeblin-Formel) *Für eine Funktion $g : (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R} \mapsto g(t,x) \in \mathbb{R} \in C^{1,2}$ (d.h. bezüglich der ersten Komponente einmal, bezüglich der zweiten Komponente zweimal stetig differenzierbar) gilt*

$$g(t,W_t) \;=\; g(0,0) + \int_0^t g_t(s,W_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t g_x(s,W_s)\,\mathrm{d}W_s + \frac{1}{2}\cdot\int_0^t g_{xx}(s,W_s)\,\mathrm{d}s, \quad t\in[0,T], \tag{C.6}$$

wobei g_t, g_x und g_{xx} jeweils die partiellen Ableitungen nach der ersten und zweiten Komponente bezeichnen.

Bemerkungen:

1. Die differentielle Schreibweise für die Itō-Doeblin-Formel ist

$$\mathrm{d}g(t,W_t) \;=\; \Big(g_t(t,W_t) + \tfrac{1}{2}\cdot g_{xx}(t,W_t)\Big)\mathrm{d}t + g_x(t,W_t)\mathrm{d}W_t.$$

2. Die Integrale $\int_0^t g_t(s,W_s)\,\mathrm{d}s$ bzw. $\int_0^t g_{xx}(s,W_s)\,\mathrm{d}s$ sind dabei stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale, das Integral $\int_0^t g_x(s,W_s)\,\mathrm{d}W_s$ ist ein Itō-Integral.

C.9 Ein Arbitragebeispiel im Zusammenhang mit selbstfinanzierenden Handelsstrategien

- Es seien $r := 0$, $\mu := 0$ und $\sigma := 1$ und somit $S_t^0 \equiv 1$ und $S_t^1 = \mathrm{e}^{W_t - \frac{1}{2}t}$ für $t \in \mathbb{T}$. Dann ist

  $$\mathrm{d}S_t^1 \;=\; \mu S_t^1 \mathrm{d}t + \sigma S_t^1 \mathrm{d}W_t \;=\; S_t^1 \mathrm{d}W_t, \quad t \in \mathbb{T},$$

  die Selbstfinanzierungsbedingung vereinfacht sich zu

  $$\mathrm{d}V_t\left(\boldsymbol{H}_t\right) \;=\; H_t^0 \mathrm{d}S_t^0 + H_t^1 \mathrm{d}S_t^1 \;=\; H_t^1 \mathrm{d}S_t^1 \;=\; H_t^1 S_t^1 \mathrm{d}W_t, \quad t \in \mathbb{T}.$$

- Da H_t^0 die Selbstfinanzierungsbedingung nicht beeinflusst, kann es wegen

  $$V_t(\boldsymbol{H}_t) \;=\; H_t^0 \cdot S_t^0 + H_t^1 \cdot S_t^1$$

  für $t \in [0, T]$ durch

  $$H_t^0 \;=\; V_t(\boldsymbol{H}_t) - H_t^1 \cdot S_t^1$$

  bestimmt werden. H_0^0 wird dabei so gewählt, dass $V_0(\boldsymbol{H}_0) = 0$ gilt. Da S_t^0 konstant ist, sind keine weiteren Integrierbarkeitsvoraussetzungen für H_t^0 erforderlich.

- Idee: $(H_t^1)_{t \in \mathbb{T}}$ wird nun so definiert, dass der dazugehörige Wertprozess jede beliebige reelle Schranke $a \in \mathbb{R}$ fast sicher erreicht und beim Erreichen dieser Schranke gestoppt wird. Für $a > 0$ hätte man dann eine Arbitrage. Dies geschieht in folgenden Schritten:

  1. Betrachtet wird der Prozess $(I_t)_{t \in [0,T)}$, definiert durch

     $$I_t \;:=\; \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}} \,\mathrm{d}W_s$$

     für $t \in [0, T)$ (man beachte, dass $t < T$ ist!). Aufgrund der Martingal-Eigenschaft des Itō-Integrals ist $\mathrm{E}(I_t) = I_0 = 0$ und somit wegen der Itō-Isometrie

     $$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(I_t\right) \;&=\; \mathrm{E}\left(I_t\right)^2 \;=\; \int_0^t \frac{1}{T-s}\,\mathrm{d}s \\ &=\; -\ln(T-s)\Big|_{s=0}^{s=t} \;=\; -\ln(T-t) + \ln T \;=\; \ln\frac{T}{T-t}.\end{aligned}$$

     für $t \in [0, T)$.

  2. Folglich gilt $\lim\limits_{t \to T} \mathrm{Var}\left(I_t\right) \to \infty$. Außerdem lässt sich zeigen, dass

     $$\left(I_{T \cdot (1 - \mathrm{e}^{-s})}\right)_{s \in [0,\infty)}$$

     ein Wienerprozess auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$ ist (aus $s := \ln \frac{T}{T-t}$ folgt $t = T \cdot (1 - \mathrm{e}^{-s})$). Somit ist $(I_t)_{t \in [0,T)}$ ein von $[0, \infty)$ auf $[0, T)$ „gestauchter“ Wienerprozess.

3. Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$\tau_a \;:=\; \inf\big\{t \in [0,t) : I_t = a\big\}$$

der (zufällige) Zeitpunkt des erstmaligen Erreichens der Schranke a. τ_a ist eine Stoppzeit und es gilt aufgrund der Konstruktion von $(I_t)_{t\in[0,T)}$

$$\mathbb{P}(\tau_a < T) \;=\; 1$$

fü alle $a \in \mathbb{R}$.

4. Für $t \in [0,T]$ ist nun

$$H_t^1 \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{S_t^1 \cdot \sqrt{T-t}} \cdot \mathbb{1}_{\{t \le \tau_a < T\}} & \text{für } t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

5. Wegen der Selbstfinanzierungsbedingung (s.o.) ist

$$V_T(\boldsymbol{H}_T) \;=\; \int_0^T H_t^1 S_t^1 \,\mathrm{d}W_t^1 \;=\; \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T-t}} \cdot \mathbb{1}_{\{t\le\tau_a<T\}} \,\mathrm{d}W_t \;=\; I_{\tau_a} \;=\; a.$$

Somit ist $V_T(\boldsymbol{H}_T) > 0$ für $a > 0$ und wegen $V_0(\boldsymbol{H}_0) = 0$ die betrachtete Handelsstrategie eine Arbitrage.

6. Außerdem ist $V_t(\boldsymbol{H}_t) = I_{\min(t,\tau_a)}$ für $t \in [0,T)$ und die betrachtete Handelsstrategie zulässig.

Anhang D

Anhang zu allgemeinen zeitstetigen Finanzmarktmodellen

D.1 Filtrierte Wahrscheinlichkeitsräume mit den „üblichen Bedingungen“ und vollständige Wahrscheinlichkeitsräume

- Im Folgenden sei $\mathbb{T} := [0,T]$, $T > 0$, oder $\mathbb{T} := [0,\infty)$.

Definition D.1 *Man sagt, dass ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big)$ ***den „üblichen Bedingungen“ genügt*** *(satisfies the “usual conditions”), wenn er folgende Eigenschaften besitzt:*

1. *Die Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ist rechtsseitig stetig (siehe auch (C.4)), d.h.* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ *für alle* $t \in \mathbb{T}$ *mit*

$$\mathcal{F}_{t+} \;=\; \begin{cases} \mathcal{F}_T & \text{für } \mathbb{T} = [0,T] \text{ und } t = T \\ \bigcap\limits_{s>t,s\in\mathbb{T}} \mathcal{F}_s & \text{sonst} \end{cases}$$

2. *Die Unter-*σ*-Algebra* $\mathcal{F}_0$ *(und damit alle* $\mathcal{F}_t$ *für* $t \in \mathbb{T}$*) enthält alle* $\mathbb{P}$*-Nullmengen, d.h.*

$$\Big\{F \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(F) = 0\Big\} \;\subset\; \mathcal{F}_0$$

Bemerkungen:

1. Eigenschaft 1 sichert, dass eine hinreichend große Menge von Stoppzeiten zur Verfügung steht. Insbesondere sind Ersteintrittszeiten in offene Mengen Stoppzeiten bezüglich rechtsseitig stetigen Filtrationen. Interpretiert bedeutet die rechtsseitige Stetigkeit von Filtrationen, dass ein infinitesimal kleiner „Schritt“ in die „Zukunft“ keine „Überraschungen“ in Form von „unerwarteten Ereignissen“ bereithält.

2. Eigenschaft 2 sichert, dass Modifikationen (bzw. synonym *Versionen*) von adaptierten Prozessen ebenfalls adaptiert sind, d.h., sind $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ und $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ Prozesse auf $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ mit

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) \;=\; 1 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{T},$$

   und ist X adaptiert an eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, so ist auch Y adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Somit können u.U. geeignete (z.B. stetige) Modifikationen von Prozessen „ohne technische Schwierigkeiten" betrachtet werden. Beispielsweise besitzt jedes Martingal bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsraums, der den „üblichen Bedingungen" genügt, eine eindeutige càdlàg Modifikation („càdlàg" – „continu á droite, limites á gauche" bzw. „RCLL" – „right continuous, left limits"), d.h., eine Modifikation, deren Pfade fast sicher rechtsseitig stetig sind und deren linksseitige Limites existieren.

3. Aus Lemma C.5 ist bekannt, dass die um die Nullmengen erweiterte natürliche Filtration eines Wienerprozesses bereits rechtsseitig stetig ist, d.h., dass Eigenschaft 2 die Eigenschaft 1 nach sich zieht. Dasselbe gilt darüber hinaus für die allgemeinere Klasse der Lèvy-Prozesse, d.h., càdlàg Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen, deren Pfade rechtsseitig stetig sind und linksseitige Limites besitzen (siehe Protter, Stochastic Integrals and Differential Equations). Neben den Wienerprozessen gehören auch die Poissonprozesse („Sprungprozesse") zu den Lèvy-Prozessen.

4. Für die Klasse der starken Markov-Prozesse erhält man analoge Aussagen, wenn zusätzlich noch die *Vollständigkeit* des zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraums $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ (siehe nachfolgende Definition) vorausgesetzt wird (siehe Karatzas & Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus).

Definition D.2 *Ein Wahrscheinlichkeitsraum* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ *heißt* ***vollständig****, wenn* $\mathcal{F}$ *alle Teilmengen von Nullmengen enthält, d.h.,*

$$F \in \mathcal{F},\; \mathbb{P}(F) = 0,\; D \subset F \;\Longrightarrow\; D \in \mathcal{F}$$

Bemerkungen:

1. Ist $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ ein nicht vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum und

$$\mathcal{N} \;:=\; \Big\{D \subset \Omega : \exists F \in \mathcal{F} \text{ mit } D \subset F \text{ und } \mathbb{P}(F) = 0\Big\}$$

   die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{P}$-Nullmengen, so ist

$$\Big(\Omega, \sigma\Big(\mathcal{F} \cup \mathcal{N}\Big), \mathbb{P}_{\mathcal{N}}\Big),$$

   wobei $\mathbb{P}_{\mathcal{N}}$ das auf $\sigma\Big(\mathcal{F} \cup \mathcal{N}\Big)$ erweiterte Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, die sogenannte **Vervollständigung** von $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$.

2. Üblicherweise werden *vollständige* filtrierte Wahrscheinlichkeitsräume, die den „üblichen Bedingungen“ genügen, vorausgesetzt, da diese aus „technischer“ Sicht (siehe obige Bemerkungen) „angenehm“ sind. Für diese gilt insbesondere $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

D.2 Progressive Messbarkeit und Vorhersagbarkeit

- Im Folgenden sei $\mathbb{T} := [0,T]$, $T > 0$, oder $\mathbb{T} := [0,\infty)$.
- Die progressive Messbarkeit eines Prozesses wurde bereits für einen beschränkten Zeitbereich $[0,T]$ und die erweiterte natürliche Filtration $(\mathcal{F}_t^*)_{t\in[0,T]}$ eines Wienerprozesses verwendet (siehe Abschnitt 3.7 und Abschnitt C.8) Die folgende Definition ist in Bezug auf den Zeitbereich und die Filtration allgemeiner.

Definition D.3 *Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}},\ \mathbb{P}\right)$. *Ein stochastischer Prozess* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *auf* $\left(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\right)$ *– betrachtet als Abbildung* $X : \mathbb{T}\times\Omega \to \mathbb{R}$ *– heißt* ***progressiv messbar*** *bezüglich* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$, *falls für alle* $t \in \mathbb{T}$ *die auf* $[0,t]$ *eingeschränkte Abbildung*

$$X\Big|_{[0,t]} : [0,t]\times\Omega \to \mathbb{R} \qquad \mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t\text{-messbar}$$

ist.

Bemerkungen:

- Die progressive Messbarkeit eines stochastischen Prozesses $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ist gleichbedeutend damit, dass für jedes $t\in\mathbb{T}$ und jede Borel-Menge $B\in\mathcal{B}$ die Menge

  $$\Big\{(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega : X_s(\omega)\in B\Big\}$$

  zur Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ gehört.
- Jeder progressiv messbare Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ist an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptiert: Sei $t\in\mathbb{T}$ beliebig, aber fest. Mit der Abbildung $\hat{t} : \omega\in\Omega \mapsto (t,\omega)\in[0,t]\times\Omega$ ist

  $$X_t \;=\; X\Big|_{[0,t]}\circ\hat{t}.$$

  Die Abbildung $\hat{t}$ ist $\mathcal{F}_t$-$\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-messbar. Aus der progressiven Messbarkeit von X ergibt sich die $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-$\mathcal{B}$-Messbarkeit von $X\Big|_{[0,t]}$. Daraus folgt die $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit von X_t.
- Die progressive Messbarkeit eines stochastischen Prozesses $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sichert beispielsweise, dass die Familie von Abbildungen $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

  $$Y_t \;:=\; \sup_{s\in[0,t]} X_s$$

  überhaupt ein stochastischer Prozess, d.h. $\mathcal{F}$-messbar, ist: Für eine (zeitdiskrete) *Folge* von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist zwar bekannt, dass auch $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ eine Zufallsgröße ist. Im Fall einer überabzählbaren Indexmenge (wie z.B. $[0,t]$) ist dies jedoch nicht immer der Fall. Aus der progressiven Messbarkeit von X folgt jedoch die Adaptiertheit (und somit die Messbarkeit) von Y.

Lemma D.4 *Jeder links- oder rechtsseitig stetige, an eine Filtration $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierte stochastische Prozess ist progressiv messbar bezüglich $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$.*

Beweis: Sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierter, links- oder rechtsseitig stetiger Prozess.

Fall 1: Rechtsseitige Stetigkeit

- Sei $t \in \mathbb{T}$ und $t > 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ werde das Intervall $[0,t]$ in 2^n links abgeschlossene und rechts offene Intervalle
$$\left[0, \frac{t}{2^n}\right), \ \left[\frac{t}{2^n}, \frac{2t}{2^n}\right), \ \ldots, \left[\frac{2^n-1}{2^n}\cdot t, t\right)$$
unterteilt.
- Der auf diesen Intervallen konstruierte Prozess $X^n_{r,[0,t]} : [0,t]\times\Omega \to \mathbb{R}$ mit
$$X^n_{r,[0,t]}(s,\omega) \ := \ \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}\cdot t, \frac{k+1}{2^n}\cdot t\right)}(s)\cdot X_{\frac{k+1}{2^n}\cdot t}(\omega) + \mathbb{1}_{\{t\}}(s)\cdot X_t(\omega), \quad (s,\omega)\in[0,t]\times\Omega,$$
ist rechtsseitig stetig.
- Aufgrund der Adaptiertheit von X sind alle auftretenden Werte $X_{\frac{1}{2^n}\cdot t}, \ldots, X_{\frac{2^n-1}{2^n}\cdot t}, X_t$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_t$. Da außerdem alle auftretenden Intervalle Borel-Mengen sind, ist $X^n_{r,[0,t]}$ somit messbar bezüglich $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$.
- Es gilt aufgrund der rechtsseitigen Stetigkeit von X
$$\lim_{n\to\infty} X^n_{r,[0,t]}(s,\omega) = X\Big|_{[0,t]}(s,\omega) \quad \text{für alle } s\in[0,t] \text{ und } \omega\in\Omega.$$
- Da der Grenzwert einer Folge messbarer Funktionen ebenfalls messbar ist, ist somit auch $\lim\limits_{n\to\infty} X^n_{r,[0,t]} = X\Big|_{[0,t]}$ messbar bezüglich $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$.
- Für $t = 0$ ist $X\Big|_{[0,t]} = X\Big|_{\{0\}}$ trivialerweise messbar bezüglich $\{0\}\otimes\mathcal{F}_0$, da X_0 aufgrund der Adaptiertheit von X $\mathcal{F}_0$-messbar ist.
- Somit ist $X\Big|_{[0,t]}$ messbar für alle $t\in\mathbb{T}$ bezüglich $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$ und folglich progressiv messbar.

Fall 2: Linksseitige Stetigkeit: Es wird analog zum rechtsseitig stetigen Fall verfahren mit dem Unterschied, dass links offene und rechts abgeschlossene Intervalle verwendet werden und ein (linksseitig stetiger) Prozess $X^n_{\ell,[0,t]} : [0,t]\times\Omega\to\mathbb{R}$ mit
$$X^n_{\ell,[0,t]}(s,\omega) \ := \ \mathbb{1}_{\{0\}}(s)\cdot X_0(\omega) + \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{2^n}\cdot t, \frac{k+1}{2^n}\cdot t\right]}(s)\cdot X_{\frac{k}{2^n}\cdot t}(\omega), \quad (s,\omega)\in[0,t]\times\Omega,$$
konstruiert wird.

■

Bemerkungen:

- Insbesondere ist jeder (für alle $\omega \in \Omega$) pfadstetige Prozess (wie beispielsweise der Wienerprozess gemäß Definition 3.2) progressiv messbar bezüglich seiner natürlichen Filtration.
- Liegt lediglich eine f.s. Pfadstetigkeit vor, gilt obige Aussage nicht immer. Für diesen Fall sind zusätzliche Forderungen an den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum (vollständig, den „üblichen Bedingungen" genügend) erforderlich.
- Für progressiv messbare Prozesse $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit der Eigenschaft

  $$\int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}s \;<\; \infty \quad \text{f.s.} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}$$

  lassen sich Itō-Integrale mit *stetigen*, quadratisch integrierbaren Martingalen als Integratoren (wie z.B. der Wienerprozess) definieren. Für eine weitere Verallgemeinerung auf *nicht-stetige* Integratoren (z.B. Sprungprozesse) ist eine Einschränkung der Eigenschaft der progressiven Messbarkeit erforderlich. Dies führt zum Begriff des **vorhersagbaren** (predictable) bzw. synonym **vorhersehbaren** (previsible) Prozessen.

Definition D.5 *Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}},\, \mathbb{P}\right)$. *Ein stochastischer Prozess* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *auf* $\left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\right)$ *– betrachtet als Abbildung* $X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *– heißt* ***vorhersagbar*** *bezüglich* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$, *falls* X *messbar bezüglich*

$$\mathcal{P} := \sigma(\mathcal{R}) \quad \textit{mit} \quad \mathcal{R} := \Big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\Big\} \cup \Big\{(s,t] \times F_s : F_s \in \mathcal{F}_s,\ s < t,\ s,t \in \mathbb{T}\Big\}$$

ist. Die σ*-Algebra* $\mathcal{P}$ *wird auch als* ***vorhersagbare*** σ***-Algebra*** *bezüglich* $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ *bezeichnet.*

Bemerkungen:

- Entscheidend bei obiger Definition ist, dass die Mengen $F_s \in \mathcal{F}_s$ und nicht $F_s \in \mathcal{F}_t$ (mit $s < t$) verwendet werden, d.h., die Messbarkeit von X_t „hinkt" der $\mathcal{F}_t$-Messbarkeit zeitlich „hinterher". Das zukünftige Verhalten eines solchen Prozesses ist demnach in dem Sinne „vorhersagbar", dass die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ zum Zeitpunkt t mehr Informationen enthält, als der vorhersagbare Prozess selbst „benötigt" bzw. in einem infinitesimal kleinen Zeitpunkt vor t das Verhalten des Prozesses zum Zeitpunkt t bereits vorhergesagt werden kann. Wie sich zeigen wird, gibt es eine enge Verbindung mit der linksseitigen Stetigkeit von Prozessen.
- Jeder bezüglich $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ vorhersagbare Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ist progressiv messbar und somit adaptiert an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$: Ist X vorhersagbar, so ist die Einschränkung $X\Big|_{[0,t]}$ für $t \in \mathbb{T}$ messbar bezüglich

  $$\sigma(\mathcal{R}_{[0,t]}) \;\; \text{mit} \;\; \mathcal{R}_{[0,t]} := \Big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\Big\} \cup \Big\{(s,t] \times F_s : F_s \in \mathcal{F}_s,\ s < t,\ s \in \mathbb{T}\Big\}.$$

Wegen $\mathcal{R}_{[0,t]} \subset \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ ist somit $X\Big|_{[0,t]}$ messbar bezüglich $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, damit X progressiv messbar und folglich adaptiert.

Lemma D.6 *Die vorhersagbare σ-Algebra $\mathcal{P}$ bezüglich $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ wird durch alle an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierten linksseitig stetigen Prozesse erzeugt.*

Beweis: Sei $\left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}},\, \mathbb{P}\right)$ der zugrunde liegende filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum und

$$\mathbb{X} \;:=\; \left\{X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}} : X \text{ ist linksseitig stetig und adaptiert an } \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}\right\}$$

die Menge aller linksseitig stetigen und an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierten Prozesse. Dann ist

$$\mathcal{P}_\ell \;:=\; \sigma\Big(S \times F \,\in\, \mathbb{T}\times\Omega : \;\exists X \in \mathbb{X},\, B \in \mathcal{B} \text{ mit } X^{-1}(B) = S \times F\Big)$$

die von diesen Prozessen erzeugte σ-Algebra.

$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_\ell$:

- Sei $S \times F \in \mathcal{R}$: Dann ist entweder $S = \{0\}$ und $F \in \mathcal{F}_0$ oder $S = (s,t]$ mit $s < t$, $s,t \in \mathbb{T}$, und $F \in \mathcal{F}_s$.
- Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{S\times F}$ ist ein stochastischer Prozess $\mathbb{T}\times\Omega \to \{0,1\}$. Gemäß Konstruktion ist er in der Darstellung $\left(\left(\mathbb{1}_{S\times F}\right)_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $\left(\mathbb{1}_{S\times F}\right)_t(\omega) = 1$ für $(t,\omega) \in S \times F$ adaptiert an $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ und aufgrund der Verwendung von rechts abgeschlossenen Intervallen linksseitig stetig, also $\mathbb{1}_{S\times F} \in \mathbb{X}$.

$\mathcal{P}_\ell \subset \mathcal{P}$:

- Sei $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}} \in \mathbb{X}$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$X^n(t,\omega) \;:=\; \begin{cases} \mathbb{1}_{\{0\}}(t)\cdot X_0(\omega) + \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{2^n}\cdot T,\frac{k+1}{2^n}\cdot T\right]}(t)\cdot X_{\frac{k}{2^n}\cdot T}(\omega) & \text{für } \mathbb{T} = [0,T] \\ \mathbb{1}_{\{0\}}(t)\cdot X_0(\omega) + \sum\limits_{k=0}^{n\cdot(2^n-1)} \mathbb{1}_{\left(\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]}(t)\cdot X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) & \text{für } \mathbb{T} = [0,\infty) \end{cases}$$

- Da X^n linksseitig stetig ist, ist $\lim\limits_{n\to\infty} X^n = X$.
- Außerdem ist X^n vorhersagbar, da die auftretenden Zufallsgrößen $X_{\frac{k}{2^n}\cdot T}$ bzw. $X_{\frac{k}{2^n}}$ aufgrund der Adaptiertheit von X $\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}\cdot T}$- bzw. $\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$-messbar sind und die einzelnen Summanden von X^n durch den Wert an der jeweils *linken* Intervallgrenze bestimmt sind. Somit ist auch $X = \lim\limits_{n\to\infty} X^n$ vorhersagbar. ∎

Bemerkungen:

- Wegen Lemma D.4 und Lemma D.6 sind für linksseitig stetige (und somit überhaupt stetige) Prozesse progressive Messbarkeit und Vorhersagbarkeit gleichbedeutend.
- Vorhersagbare Prozesse bezüglich $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ sind – im Gegensatz zu progressiv messbaren Prozessen – adaptiert an die dazugehörige *linksseitig* stetige Filtration $\left(\mathcal{F}_{t-}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

  $$\mathcal{F}_{t-} \;:=\; \bigcup_{s\in[0,t)} \mathcal{F}_s.$$

  Im Fall eines zeit*diskreten* stochastischen Prozesse $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, der bezüglich einer zeitdiskreten Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ vorhersagbar ist, bedeutet dies, dass X_n für $n \in \mathbb{N}$ messbar ist bezüglich $\mathcal{F}_{n-1}$.

D.3 Das Itō-Integral bezüglich rechtsseitig stetiger L^2-Martingale

- Im Folgenden sei $\mathbb{T} := [0, T]$, $T > 0$, oder $\mathbb{T} := [0, \infty)$.
- Außerdem sei im Folgenden $\left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\in\mathbb{T}},\, \mathbb{P}\right)$ der zugrunde liegende filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum und

$$\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{R}) \text{ mit } \mathcal{R} = \Big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\Big\} \cup \Big\{(s,t] \times F_s : F_s \in \mathcal{F}_s,\ s < t,\ s,t \in \mathbb{T}\Big\}$$

die dazugehörige vorhersagbare σ-Algebra gemäß Definition D.5. Jedes Element $R \in \mathcal{R}$ wird auch als **vorhersagbares Rechteck** bezeichnet.

Definition D.7 *Gegeben sei ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\right)$. Dieser Prozess wird als L^p-Prozess $(p \geq 1)$ bezeichnet, falls*

$$\mathrm{E}\Big|X_t\Big|^p \ < \ \infty$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt.

Bemerkungen:

1. Da ein Wahrscheinlichkeitsmaß ein endliches Maß ist, ist ein L^p-Prozess auch ein L^q-Prozess mit $q \leq p$, $q \geq 1$ (siehe Abschnitt B.4.6).
2. Der Wienerprozess ist ein L^2-Prozess, also insbesondere auch ein L^1-Prozess.
3. Im Folgenden wird – in teilweiser Analogie zu Abschnitt C.8, in dem das Itō-Integral von progressiv messbaren und quadratisch integrierbaren Prozessen bezüglich des Wienerprozesses konstruiert wurde, – das Integral von vorhersagbaren und bezüglich eines noch zu spezifizierenden Maßraumes quadratisch integrierbaren Prozessen bezüglich rechtsseitig stetiger L^2-Martingale definiert. [1]
4. Für diesen Zweck wird ein durch ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ bestimmtes und auf der vorhersagbaren σ-Algebra $\mathcal{P}$ definiertes Maß

$$\mu_M : \mathcal{P} \to [0, \infty],$$

das sogenannte **Doléansmaß**, verwendet (μ_M ist aufgrund des Wertebereichs *kein* Wahrscheinlichkeitsmaß!). Zunächst wird jedoch für einen L^1-Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ eine Mengenfunktion

$$\nu_X : \mathcal{R} \to [0, \infty)$$

[1] Es sei darauf hingewiesen, dass die Vorhersagbarkeit eine stärkere Forderung als die progressive Messbarkeit darstellt.

definiert. Später wird sich zeigen, dass für ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal M

$$\mu_M\Big|_{\mathcal{R}} = \nu_{M^2}$$

gilt (man beachte $M^2 := (M_t^2)_{t\in\mathbb{T}}$ auf der rechten Seite!).

Definition D.8 *Für einen L^1-Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ bezeichne*

$$\nu_X : \mathcal{R} \to [0,\infty)$$

eine Mengenfunktion, definiert durch

$$\begin{aligned}\nu_X\Big(\{0\}\times F_0\Big) &:= 0 \quad \textit{für } F_0 \in \mathcal{F}_0 \quad \textit{und}\\ \nu_X\Big((s,t]\times F_s\Big) &:= \mathrm{E}\Big((X_t - X_s)\cdot \mathbb{1}_{F_s}\Big) \quad \textit{für } s,t\in\mathbb{T},\ s<t,\ F_s\in\mathcal{F}_s.\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Die Mengenfunktion ν_X ist für L^1-Prozesse wohldefiniert: Da $X_t - X_s$ zur Menge L^1 gehört und $\mathbb{1}_{F_s}$ beschränkt ist (d.h., $\mathbb{1}_{F_s}$ gehört zur Menge L^∞, siehe Abschnitt B.4.6), gehört das Produkt dieser beiden Zufallsgrößen zu L^1, d.h., der Erwartungswert des Produkts existiert.

2. Ist $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein L^1-Martingal, so gilt $\nu_M \equiv 0$: Für $\{0\}\times F_0$, $F_0\in\mathcal{F}_0$, ist dies gemäß Definition der Fall. Für $s<t$, $s,t\in\mathbb{T}$, und $F_s\in\mathcal{F}_s$ ergibt sich (siehe Eigenschaften der bedingten Erwartung in Abschnitt B.9)

$$\begin{aligned}\nu_M\Big((s,t]\times F_s\Big) &= \mathrm{E}\Big((M_t - M_s)\cdot\mathbb{1}_{F_s}\Big)\\ &\overset{2}{=} \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\Big((M_t-M_s)\cdot\mathbb{1}_{F_s}\,\Big|\,\mathcal{F}_s\Big)\Big)\\ &\overset{3}{=} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_s}\cdot\mathrm{E}\Big(M_t - M_s\,\Big|\,\mathcal{F}_s\Big)\Big)\\ &\overset{4}{=} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_s}\cdot\Big(\mathrm{E}(M_t\,\Big|\,\mathcal{F}_s) - M_s\Big)\Big)\\ &\overset{5}{=} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_s}\cdot\Big(M_s - M_s\Big)\Big) = 0\end{aligned}$$

3. Ist $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein L^2-Martingal, so gilt für $s,t\in\mathbb{T}$, $s<t$, und $F_s\in\mathcal{F}_s$

$$\nu_{M^2}\Big((s,t]\times F_s\Big) = \mathrm{E}\Big((M_t-M_s)^2\cdot\mathbb{1}_{F_s}\Big),$$

[2] „Tower property"
[3] „Taking out what is known."
[4] Linearität, M_s ist $\mathcal{F}_s$-messbar
[5] Martingaleigenschaft

denn: Zunächst einmal ist $\mathrm{E}\Big((M_t - M_s)^2 \cdot \mathbb{1}_{F_s}\Big)$ wohldefiniert: Da M ein L^2-Prozess ist, ist $(M_t - M_s)^2 = M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2$ ein L^1-Prozess und somit $(M_t - M_s)^2 \cdot \mathbb{1}_{F_s}$ ein L^1-Prozess. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big((M_t - M_s)^2 \cdot \mathbb{1}_{F_s}\Big) &= \mathrm{E}\Big(M_t^2\mathbb{1}_{F_s}\Big) - 2\mathrm{E}\Big(M_tM_s\mathbb{1}_{F_s}\Big) + \mathrm{E}\Big(M_s^2\mathbb{1}_{F_s}\Big) \\
&\overset{6}{=} \mathrm{E}\Big(M_t^2\mathbb{1}_{F_s}\Big) - 2\mathrm{E}\Big(\mathrm{E}(M_t|\mathcal{F}_s)M_s\mathbb{1}_{F_s}\Big) + \mathrm{E}\Big(M_s^2\mathbb{1}_{F_s}\Big) \\
&\overset{7}{=} \mathrm{E}\Big(M_t^2\mathbb{1}_{F_s}\Big) - 2\mathrm{E}\Big(M_sM_s\mathbb{1}_{F_s}\Big) + \mathrm{E}\Big(M_s^2\mathbb{1}_{F_s}\Big) \\
&= \mathrm{E}\Big((M_t^2 - M_s^2) \cdot \mathbb{1}_{F_s}\Big) \;=\; \nu_{M^2}\Big((s,t] \times F_s\Big)
\end{aligned}$$

Besitzt M darüber hinaus noch unabhängige Zuwächse, so ist

$$\nu_{M^2}\Big((s,t] \times F_s\Big) \;=\; \mathrm{E}(M_t - M_s)^2 \cdot \mathrm{E}(\mathbb{1}_{F_s}) \;=\; \mathrm{E}(M_t - M_s)^2 \cdot \mathbb{P}(F_s).$$

Ist $M = W$ ein Wienerprozess, ergibt sich demnach

$$\nu_{W^2}\Big((s,t] \times F_s\Big) \;=\; (t-s) \cdot \mathbb{P}(F_s). \tag{D.1}$$

Satz D.9 *Für jedes rechtsseitig stetige L^2-Martingal $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Maß*

$$\mu_M : \mathcal{P} \to [0,\infty] \quad \textit{mit} \quad \mu_M\Big|_{\mathcal{R}} \;=\; \nu_{M^2}, \quad M^2 = (M_t^2)_{t\in\mathbb{T}}.$$

*Dieses Maß wird als **Doléansmaß** bezeichnet.*

Beweis:

1. $\mathcal{R}$ ist $\cap$-stabil: Dies folgt zum einen daraus, dass der Durchschnitt zweier links offener und rechts abgeschlossener Intervalle entweder die leere Menge[8] oder ebenfalls ein links offenes und rechts abgeschlossenes Intervall ist. Zum anderen gilt $F_s \cap F_t \in \mathcal{F}_t$ für $F_s \in \mathcal{F}_s$, $F_t \in \mathcal{F}_t$, $s < t$ $(s,t \in \mathbb{T})$, da $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ und $\mathcal{F}_t$ eine σ-Algebra ist.

2. Falls μ_M existiert, so ist es auf $\mathcal{R}$ σ-finit: Es gilt nämlich

$$\mathbb{T} \times \Omega \;=\; \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \quad \text{mit} \quad E_0 := \{0\} \times \Omega \;\text{ und }\; E_n := \Big((n-1,n] \cap \mathbb{T}\Big) \times \Omega \;\; (n \in \mathbb{N}),$$

wobei $E_n \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ ist sowie $\nu_{M^2}(E_0) = 0$ und $\nu_{M^2}(E_n) = \mathrm{E}(M_n - M_{n-1})^2 < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{T} = [0,\infty)$ bzw. $\nu_{M^2}(E_n) = \mathrm{E}\Big(M_{\min(n,T)} - M_{\min(n-1,T)}\Big)^2 < \infty$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{T} = [0,T]$ gilt.

[6] „Tower property“ und „Taking out what is known.“
[7] Martingaleigenschaft
[8] Die leere Menge ist in $\mathcal{R}$ enthalten, da $\emptyset \in \mathcal{F}_0$ und $\{0\} \times \emptyset = \emptyset$ ist.

3. Mit diesen Voraussetzungen ist der maßtheoretische Eindeutigkeitssatz anwendbar: Falls μ_M existiert und auf einem $\cap$-stabilen Erzeugendensystem σ-finit ist, so ist es eindeutig bestimmt. Es verbleibt demnach, die Existenz von μ_M, d.h. die Fortsetzung von ν_{M^2} auf $\mathcal{P}$, zu zeigen (zu maßtheoretischen Grundlagen siehe Abschnitt B.3).

4. Der maßtheoretische Fortsetzungssatz besagt, dass jedes Prämaß[9] auf einem Ring[10] zu einem Maß auf einer σ-Algebra fortgesetzt werden kann.

5. Das Mengensystem $\mathcal{R}$ ist *kein* Ring, da die Differenz zweier Mengen aus $\mathcal{R}$ nicht in $\mathcal{R}$ enthalten zu sein braucht. Allerdings ist die Menge

$$\tilde{\mathcal{R}} \;:=\; \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} R_i : \; n \in \mathbb{N},\; R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R} \text{ paarw. disjunkt} \right\}$$

aller endlicher Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{R}$ ein Ring.

6. Die Erweiterung $\tilde{\nu}_{M^2}$ von ν_{M^2} auf $\tilde{\mathcal{R}}$ mittels

$$\tilde{\nu}_{M^2}\left(\bigcup_{i=1}^{n} R_i \right) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \nu_{M^2}(R_i) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},\; R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R} \text{ paarw. disjunkt}$$

ist endlich-additiv und endlich (analog zur Konstruktion des Lebesgue'schen Prämaßes). Es verbleibt demnach zu zeigen, dass $\tilde{\nu}_{M^2}$ ein Prämaß, also σ-additiv ist. Dies ist (wegen der Endlichkeit) genau dann der Fall, wenn $\tilde{\nu}_{M^2}$ $\emptyset$-stetig ist, d.h., wenn für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \in \tilde{\mathcal{R}}$ und $A_n \downarrow \emptyset$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\nu}_{M^2}(A_n) \;=\; 0$$

gilt.

7. Die entsprechenden Betrachtungen lassen sich im Wesentlichen (wobei auf eine Vielzahl technischer Details verzichtet wird) auf Mengen der Gestalt

$$B_s^n \;:=\; \left(s, s + \frac{1}{n} \right] \times F_s$$

für $s, s + \frac{1}{n} \in \mathbb{T}$ und ein beliebiges, aber festes $F_s \in \mathcal{F}_s$ reduzieren (es gilt $B_s^n \downarrow \emptyset$ und $B_s^n \in \mathcal{R}$ für alle $s, s + \frac{1}{n} \in \mathbb{T}$). Man erhält

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_{M^2}(B_s^n) \;&=\; \mathrm{E}\Big(\Big(M^2_{s+\frac{1}{n}} - M^2_s \Big) \cdot \mathbb{1}_{F_s} \Big) \\ &\leq\; \mathrm{E}\Big(\Big| M^2_{s+\frac{1}{n}} - M^2_s \Big| \cdot \mathbb{1}_{F_s} \Big) \;\leq\; \mathrm{E}\Big| M^2_{s+\frac{1}{n}} - M^2_s \Big| \end{aligned}$$

[9]Ein Prämaß unterscheidet sich von einem Maß lediglich dadurch, dass es auf einem Ring und nicht auf einer σ-Algebra definiert ist. Insbesondere ist ein Prämaß σ-additiv.

[10]Ein Mengensystem $\mathcal{S}$ ist ein Ring, falls aus $A, B \in \mathcal{S}$ folgt, dass sowohl $A \cup B \in \mathcal{S}$ als auch $A \setminus B \in \mathcal{S}$ ist.

Dieser Wert hängt nicht mehr von der konkreten Menge $F_s \in \mathcal{F}_s$ ab. Somit verbleibt zu klären, unter welchen Bedingungen $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big|M^2_{s+\frac{1}{n}} - M^2_s\Big| = 0$ und somit $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\nu}_{M^2}(B^n_s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{T}$ (mit $s < T$ für $\mathbb{T} = [0, T]$) gilt.

8. Der entscheidende Begriff in diesem Zusammenhang ist der der **gleichgradigen Integrierbarkeit** (*uniform integrability*): Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt gleichgradig integrierbar, wenn

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{\{|X_t|>c\}} \cdot \Big|X_t\Big|\Big) \;=\; 0$$

gilt.[11] Zur gleichgradigen Integrierbarkeit gibt es folgende wichtige Aussagen:

   (i) Seien X eine integrierbare Zufallsgröße und $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ eine Filtration. Dann ist der stochastische Prozess

   $$\Big(\mathrm{E}\Big(X \mid \mathcal{F}_t\Big)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$$

   gleichgradig integrierbar.

   (ii) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge(!) integrierbarer Zufallsgrößen und X eine integrierbare Zufallsgröße. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big|X_n - X\Big| \;=\; 0$ genau dann, wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist und $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ in Wahrscheinlichkeit gilt.

9. Insbesondere ist wegen (i) jedes Martingal und jedes *nichtnegative* Submartingal, d.h., ein an eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierter L^1-Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

$$\mathrm{E}\Big(X_t \mid \mathcal{F}_s\Big) \;\geq\; X_s \;\geq\; 0 \quad \text{für alle } s < t \ (s, t \in \mathbb{T})$$

gleichgradig integrierbar.

10. Ist $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ (wie hier) ein L^2-Martingal, so ist $(M^2_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein (nichtnegatives) L^1-Submartingal und somit gleichgradig integrierbar: Wegen der Jensen'schen Ungleichung für bedingte Erwartungen gilt nämlich

$$\mathrm{E}\Big(M^2_t \mid \mathcal{F}_s\Big) \;\geq\; \Big(\mathrm{E}\Big(M_t \mid \mathcal{F}_s\Big)\Big)^2 \;=\; M^2_s$$

für $s < t$, $s, t \in \mathbb{T}$.

11. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von M ist auch M^2 rechtsseitig stetig. Insbesondere gilt $\lim\limits_{n\to\infty} M^2_{s+\frac{1}{n}} = M^2_s$ für alle $s \in \mathbb{T}$ (mit $s < T$ für $\mathbb{T} = [0, T]$) sogar pfadweise und somit wegen Aussage (ii) zur gleichgradigen Integrierbarkeit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big|M^2_{s+\frac{1}{n}} - M^2_s\Big| \;=\; 0$ für alle $s \in \mathbb{T}$ (mit $s < T$ für $\mathbb{T} = [0, T]$). ∎

[11] Äquivalente Definition: $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}} \mathrm{E}|X_t| < \infty$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$, so dass $\sup\limits_{t\in\mathbb{T}} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_F \cdot \Big|X_t\Big|\Big) \leq \varepsilon$ für alle $F \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(F) \leq \delta$ gilt.

Bemerkungen:

- Das Doléans-Maß μ_W eines Wienerprozesses $W = (W_t)_{t\in(T)}$ ist

  $$\mu_W \;=\; \lambda \otimes \mathbb{P},$$

  denn für $s < t$ $(s,t \in \mathbb{T})$ und $F_s \in \mathcal{F}_s$ ergibt sich wegen (D.1)

  $$\mu_W\Big|_{\mathcal{R}}\Big((s,t] \times F_s\Big) \;=\; \nu_{W^2}\Big((s,t] \times F_s\Big) \;=\; (t-s)\cdot \mathbb{P}(F_s).$$

- Durch das Doléans-Maß μ_M ist – wie sich zeigen wird – der Integrator eines Itō-Integrals bezüglich rechtsseitig stetiger L^2-Martingale bestimmt.

- Zunächst wird – in Analogie zu den *einfachen* stochastischen Prozessen (siehe Abschnitt C.8) – ein stochastisches Integral bezüglich sogenannter **elementarer vorhersagbarer Prozesse** konstruiert.

Definition D.10 *Es bezeichnet*

$$\mathcal{E} \;:=\; \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i} :\; n \in \mathbb{N},\; \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R},\; R_1,\dots,R_n \in \mathcal{R} \textit{ paarw. disj.} \right\}$$

die Menge der ***elementaren vorhersagbaren Prozesse*** *bezüglich des gegebenen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraums* $\Big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\Big)$.

Bemerkungen:

- Für $R = (s,t] \times F_s$ ist durch $\mathbb{1}_R$ ein stochastischer Prozess $\Big(\mathbb{1}_R(u,.)\Big)_{u\in\mathbb{T}}$ mit

  $$\mathbb{1}_R(u,\omega) \;=\; \mathbb{1}_{(s,t]}(u)\cdot \mathbb{1}_{F_s}(\omega) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \notin F_s \\ \mathbb{1}_{(s,t]}(u) & \text{für } \omega \in F_s \end{cases}$$

  gegeben.

- Nachfolgend wird ein stochastisches Integral sowohl für den Prozess $\mathbb{1}_R$ als auch allgemein für elementare vorhersagbare Prozesse definiert.

Definition D.11 *Sei* $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ein stochastischer Prozess.*

(i) Für jedes vorhersagbare Rechteck $R \in \mathcal{R}$ *und dem dazugehörigen stochastischen Prozess* $\mathbb{1}_R$ *wird durch*

$$\int \mathbb{1}_{\{0\}\times F_0}\,\mathrm{d}Z \;:=\; 0, \qquad \int \mathbb{1}_{(s,t]\times F_s}\,\mathrm{d}Z \;:=\; \mathbb{1}_{F_s}\cdot (Z_t - Z_s)$$

mit $F_0 \in \mathcal{F}_0$, $s < t$ $(s,t \in \mathbb{T})$ *und* $F_s \in \mathcal{F}_s$ *ein stochastisches Integral definiert.*

(ii) Für jeden elementaren vorhersagbaren Prozess $X \in \mathcal{E}$ in der Darstellung $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R}$ paarw. disj. wird durch

$$\int X \,\mathrm{d}Z \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \int \mathbb{1}_{R_i} \,\mathrm{d}Z$$

ein stochastisches Integral definiert.

Bemerkungen:

- An den Integrator Z werden bei den vorgenommenen Definitionen keine weiteren Voraussetzungen gestellt. Die Integrale sind pfadweise definiert.
- Das Integral $\int X \,\mathrm{d}Z$ für einen elementaren vorhersagbaren Prozess X hängt nicht von der gewählten Darstellung für X ab und ist linear.
- Das folgende Lemma zeigt die Verbindung zwischen der vorgenommenen Integraldefinition und dem Integral bezüglich des Doléansmaßes.

Lemma D.12 *Für jedes rechtsseitig stetige L^2-Martingal $M = (M_t)_{t \in \mathbb{T}}$ mit dem dazugehörigen Doléansmaß μ_M und jeden elementaren vorhersagbaren Prozess $X \in \mathcal{E}$ gilt*

$$\int X^2 \,\mathrm{d}\mu_M \;=\; \mathrm{E}\Big(\Big(\int X \,\mathrm{d}M\Big)^2\Big).$$

Beweis:

- Der elementare vorhersagbare Prozess X besitze die Darstellung

$$X \;=\; \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i} \text{ mit } n \in \mathbb{N},\ \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R},\ R_0, \ldots, R_n \in \mathcal{R} \text{ paarw. disj.},$$

  wobei o.B.d.A. $R_0 = \{0\} \times F_0$ sowie $R_i = (s_i, t_i] \times F_i$ mit $s_i < t_i (s_i, t_i \in \mathbb{T})$ und $F_i \in \mathcal{F}_{s_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.[12]

- Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Big(\int X \,\mathrm{d}M\Big)^2 \;&=\; \Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \int \mathbb{1}_{R_i} \,\mathrm{d}M\Big)^2 \overset{13}{=} \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \mathbb{1}_{R_i} \,\mathrm{d}M\Big)^2 \\
&=\; \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{F_i} \cdot (M_{t_i} - M_{s_i})\Big)^2 \\
&=\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_i \alpha_j \mathbb{1}_{F_i \cap F_j} (M_{t_i} - M_{s_i})(M_{t_j} - M_{s_j}) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathbb{1}_{F_i} (M_{t_i} - M_{s_i})^2
\end{aligned}$$

[12] Falls X auf $\{0\} \times \Omega$ gleich Null ist, wird $\alpha_0 := 0$ gesetzt. Gibt es neben R_0 noch weitere Mengen $\{0\} \times F_0$ mit $F_0 \in \mathcal{F}_0$, auf denen X von Null verschieden ist, werden diese bei den folgenden Überlegungen „wie R_0“ behandelt.

[13] $\int \mathbb{1}_{R_0} \,\mathrm{d}M = \int \mathbb{1}_{\{0\} \times F_0} \,\mathrm{d}M = 0$ per. def.

- Es wird obige Doppelsumme für $i \neq j$ betrachtet. Wegen $R_i \cap R_j = \emptyset$ gilt

  (i) $F_i \cap F_j = \emptyset$ oder (ii) $(s_i, t_i] \cap (s_j, t_j] = \emptyset$.

  Im Fall (i) ist $\mathbb{1}_{F_i \cap F_j} = 0$ und somit der entsprechende Summand ebenfalls Null.

  Im Fall (ii) werde o.B.d.A. $t_i \leq s_j$ angenommen. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i \cap F_j}(M_{t_i} - M_{s_i})(M_{t_j} - M_{s_j})\Big) \\
\overset{14}{=}\ & \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i \cap F_j}(M_{t_i} - M_{s_i})(M_{t_j} - M_{s_j}) \,\Big|\, \mathcal{F}_{s_j}\Big)\Big) \\
\overset{15}{=}\ & \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i \cap F_j}(M_{t_i} - M_{s_i})\mathrm{E}\Big(M_{t_j} - M_{s_j} \,\Big|\, \mathcal{F}_{s_j}\Big)\Big) \\
\overset{16}{=}\ & \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i \cap F_j}(M_{t_i} - M_{s_i})\Big(\mathrm{E}(M_{t_j} \mid \mathcal{F}_{s_j}) - M_{s_j}\Big)\Big) \\
\overset{17}{=}\ & \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i \cap F_j}(M_{t_i} - M_{s_i})(M_{s_j} - M_{s_j})\Big) \ = \ 0
\end{aligned}
$$

  Der Erwartungswert der obigen Doppelsumme ist somit stets Null.

- Daraus erhält man weiter

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{E}\Big(\int X \,\mathrm{d}M\Big)^2 \\
=\ & \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathbb{1}_{F_i}(M_{t_i} - M_{s_i})^2\Big) \ \overset{18}{=}\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot \nu_{M^2}\Big((s_i, t_i] \times F_i\Big) \\
\overset{19}{=}\ & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \cdot \mu_M\Big((s_i, t_i] \times F_i\Big) \ = \ \int X^2 \,\mathrm{d}\mu_M
\end{aligned}
$$

∎

Bemerkungen:

- L^2 bezeichne die Menge der über dem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\Big)$ quadratisch integrierbaren Zufallsgrößen, $\mathcal{L}^2_M$ für ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal M (auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P}\Big)$) die Menge der über dem „vorhersagbaren" Maßraum $\Big(\mathbb{T} \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M\Big)$ quadratisch integrierbaren Funktionen. Sowohl L^2 als auch $\mathcal{L}^2_M$ sind Vektorräume.

[14] tower property
[15] „Taking out what is known."
[16] Linearität und Messbarkeit
[17] Martingaleigenschaft
[18] Siehe Bemerkung 3. zu Definition D.8
[19] Satz D.9

- Auf L^2 wird durch

$$\left\|Y\right\|_{L^2} \;:=\; \mathrm{E}Y^2 \;=\; \int Y^2\,\mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{für eine Zufallsgröße } Y \in L^2$$

eine Norm definiert, auf $\mathcal{L}^2_M$ entsprechend durch

$$\left\|X\right\|_{\mathcal{L}^2_M} \;:=\; \int X^2\,\mathrm{d}\mu_M \quad \text{für einen stochastischen Prozess } X \in \mathcal{L}^2_M.$$

L^2 und $\mathcal{L}^2_M$ sind damit vollständige normierte Vektorräume, d.h., Vektorräume, in denen jede Cauchy-Folge einen Grenzwert (bezüglich der jeweiligen Norm) besitzt, der ebenfalls in dem Vektorraum enthalten ist.[20]

- Somit gilt gemäß Lemma D.12 für $X \in \mathcal{E}$ (wobei $\mathcal{E}$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}^2_M$ ist):

$$\left\|X\right\|_{\mathcal{L}^2_M} \;=\; \left\|\int X\,\mathrm{d}M\right\|_{L^2}$$

Der lineare Operator

$$I_M : \mathcal{E} \to L^2 \quad \text{mit} \quad I(X) := \int X\,\mathrm{d}M, \quad X \in \mathcal{E}, \tag{D.2}$$

ist demnach wegen $\left\|X\right\|_{\mathcal{L}^2_M} \;=\; \left\|I_M(X)\right\|_{L^2}$ eine Isometrie, d.h. eine normerhaltende Abbildung.

- Der folgende Satz bringt die Konstruktion eines stochastischen Integrals für allgemeine vorhersagbare, bezüglich μ_M quadratisch integrierbare Prozesse mit einem rechtsseitig stetigen L^2-Martingal M als Integrator zu einem vorläufigen Abschluss.

Satz D.13 *Der Integraloperator $I_M : \mathcal{E} \to L^2$ gemäß (D.2) besitzt eine eindeutige Fortsetzung $\tilde{I}_M : \mathcal{L}^2_M \to L^2$ unter Beibehaltung der Isometrie. Für $X \in \mathcal{L}^2_M$ heißt dann*

$$\tilde{I}_M(X) \;=\; \int X\,\mathrm{d}M \tag{D.3}$$

*das **Itō-Integral** von X bezüglich M. Alternative Bezeichnung: $\int_{\mathbb{T}} X_s\,\mathrm{d}M_s$*

[20] In einem Vektorraum V mit der Norm $\|.\|_V$ heißt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N := N(\varepsilon)$ gibt, so dass

$$\left\|x_m - x_n\right\|_V \;<\; \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N$$

gilt. Bei einer Cauchy-Folge liegen somit schließlich alle Folgenglieder unendlich dicht beieinander. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge. In einem vollständigen Vektorraum gilt auch die Umkehrung.

Beweis:

- $\mathcal{E}$ ist dicht in $\mathcal{L}^2_M$, d.h., für die Vervollständigung $\bar{\mathcal{E}}$ von $\mathcal{E}$ gilt $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{L}^2_M$ (ohne Beweis).
- Allgemein gilt: Sind U und V vollständige normierte Räume, U_1 ein dichter Teilraum von U und

  $$J : U_1 \to V$$

  eine lineare Isometrie, dann lässt sich J eindeutig als lineare Isometrie

  $$\tilde{J} : U \to V$$

  fortsetzen:

  – Da U_1 dicht in U ist, gibt es zu jedem $u \in U$ eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $u_n \in U_1$ $(n \in \mathbb{N})$, so dass $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} \left\|u - u_n\right\|_U = 0$) gilt. Jede konvergente Folge ist außerdem eine Cauchy-Folge, also auch $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  – Für die Folge $\Big(J(u_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $J(u_n) \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt dann aufgrund der Linearität und der Isometrieeigenschaft von J für $m, n \in \mathbb{N}$

  $$\left\|J(u_m) - J(u_n)\right\|_V \;=\; \left\|J(u_m - u_n)\right\|_V \;=\; \left\|u_m - u_n\right\|_U.$$

  Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, ist somit auch $\Big(J(u_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Da V vollständig ist, besitzt $\Big(J(u_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert in V. Dieser Grenzwert hängt nicht von der konkreten Wahl der Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab, so dass

  $$\tilde{J}(u) \;:=\; \lim_{n\to\infty} J(u_n)$$

  gesetzt werden kann.

  – Außerdem lässt sich die Linearität und die Isometrieeigenschaft von $\tilde{J}$ zeigen.

- Anwendung dieser Aussage auf die gegebene Situation: L^2 und $\mathcal{L}^2_M$ sind vollständige normierte Räume, $\mathcal{E}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{L}^2_M$ und $I_M : \mathcal{E} \to L^2$ eine lineare Isometrie. Somit lässt sich I_M eindeutig auf $\mathcal{L}^2_M$ unter Beibehaltung der Isometrie fortsetzen.

■

Bemerkungen:

- Das in Abschnitt C.8 bezüglich des Wienerprozesses definierte Itō-Integral ist ein Martingal bezüglich der erweiterten natürlichen Filtration des Wienerprozesses. Eine analoge Eigenschaft des hier definierten allgemeineren Integrals wäre daher wünschenswert.

- Es wird sich zeigen, dass das hier definierte Integral sogar ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal ist und somit wieder als Integrator eines anderen Integrals verwendet werden kann.
- Das gemäß (D.3) definierte Itō-Integral $\int_{\mathbb{T}} X_s \,\mathrm{d}M_s$ ist zunächst noch kein stochastischer Prozess, sondern eine quadratisch integrierbare Zufallsgröße. Durch die Einführung einer oberen Intervallgrenze wird daraus in folgender Definition ein stochastischer Prozess abgeleitet, dessen Eigenschaften dann näher untersucht werden.

Definition D.14 *Es seien M ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal und $X \in \mathcal{L}_M^2$. Dann bezeichnet für $t \in \mathbb{T}$*

$$\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s \;:=\; \int \mathbb{1}_{[0,t]} X \,\mathrm{d}M \;=\; \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) X_s \,\mathrm{d}M_s$$

Insbesondere ist $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stochastischer Prozess (bezüglich der gegebenen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$).

Bemerkungen:

- Ist $X \in \mathcal{L}_M^2$, so ist aufgrund der Beschränkheit der Indikatorfunktion auch $\mathbb{1}_{[0,t]} X \in \mathcal{L}_M^2$ für $t \in \mathbb{T}$.
- Der folgende Satz liefert zunächst die L^2-Martingal-Eigenschaft von $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$. Die (rechtsseitige) Stetigkeit wird später noch untersucht.

Satz D.15 *Es seien M ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal und $X \in \mathcal{L}_M^2$. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\left(\int X \,\mathrm{d}M \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right) \;=\; \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s$$

für alle $t \in \mathbb{T}$. Außerdem ist $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein L^2-Martingal.

Beweis:

1. Sei zunächst $X \in \mathcal{E}$, also ein elementarer vorhersagbarer Prozess, der o.B.d.A. die Darstellung $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, und $R_1, \ldots, R_n \in \mathcal{R}$ paarw. disj. besitzt, wobei $R_i = (s_i, t_i] \times F_i$ mit $s_i < t_i (s_i, t_i \in \mathbb{T})$ und $F_i \in \mathcal{F}_{s_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Der Fall $R_i = \{0\} \times F_0$ mit $F_0 \in \mathcal{F}_0$ kann dabei vernachlässigt werden, da dieser bei der Integration keine Rolle spielt.

Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{[0,t]}X &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{R_i}\mathbb{1}_{[0,t]}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{(s_i,t_i]\times F_i}\mathbb{1}_{[0,t]} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{\big(\min(s_i,t),\min(t_i,t)\big]\times F_i}\end{aligned}$$

und folglich

$$\int\limits_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s \;=\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{F_i}\left(M_{\min(t_i,t)}-M_{\min(s_i,t)}\right).$$

Diese Zufallsgröße ist für alle $t\in\mathbb{T}$ in L^2, da M ein L^2-Prozess ist.

Für $X\in\mathcal{E}$ und $t\in\mathbb{T}$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\Big(\int X\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big) &= \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbb{1}_{F_i}\Big(M_{t_i}-M_{s_i}\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i}\Big(M_{t_i}-M_{s_i}\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\end{aligned}$$

Für $i=1,\ldots,n$ und $t\leq s_i$ ergibt sich aufgrund der „Tower property“, „Taking out what is known“ und der Martingaleigenschaft von M

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i}\Big(M_{t_i}-M_{s_i}\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\\ =\;&\mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i}(M_{t_i}-M_{s_i})\mid\mathcal{F}_{s_i}\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\\ =\;&\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i}\mathrm{E}\Big(M_{t_i}-M_{s_i}\mid\mathcal{F}_{s_i}\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\\ =\;&\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i}\Big(M_{s_i}-M_{s_i}\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big) \;=\; 0\\ =\;&\mathbb{1}_{F_i}\left(M_t-M_t\right) \;=\; \mathbb{1}_{F_i}\left(M_{\min(t_i,t)}-M_{\min(s_i,t)}\right)\end{aligned}$$

sowie für $t>s_i$

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_i}\Big(M_{t_i}-M_{s_i}\Big)\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\\ =\;&\mathbb{1}_{F_i}\cdot\mathrm{E}\Big(M_{t_i}-M_{s_i}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\\ =\;&\mathbb{1}_{F_i}\cdot\Big(\mathrm{E}\Big(M_{t_i}\mid\mathcal{F}_t\Big)-\mathrm{E}\Big(M_{s_i}\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\Big)\\ =\;&\mathbb{1}_{F_i}\cdot\left(M_{\min(t_i,t)}-M_{s_i}\right) \;=\; \mathbb{1}_{F_i}\left(M_{\min(t_i,t)}-M_{\min(s_i,t)}\right).\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathrm{E}\Big(\int X \,\mathrm{d}M \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{F_i} \Big(M_{\min(t_i,t)} - M_{\min(s_i,t)} \Big) \;=\; \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s .$$

Daraus folgt für $s < t$ $(s,t \in \mathbb{T})$ wegen der „Tower property“

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(\int_0^t X_u \,\mathrm{d}M_u \,\Big|\, \mathcal{F}_s \Big) \;&=\; \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\Big(\int X \,\mathrm{d}M \,|\, \mathcal{F}_t \Big) \,\Big|\, \mathcal{F}_s \Big) \\ &=\; \mathrm{E}\Big(\int X \,\mathrm{d}M \,\Big|\, \mathcal{F}_s \Big) \;=\; \int_0^s X_u \,\mathrm{d}M_u \end{aligned}$$

und folglich die Martingaleigenschaft von $\left(\int_0^t X_u \,\mathrm{d}M_u \right)_{t\in\mathbb{T}}$ für $X \in \mathcal{E}$. Für $X \in \mathcal{E}$ gilt somit die Behauptung.

2. Nun erfolgt die „übliche Erweiterung“ von $X \in \mathcal{E}$ auf $X \in \mathcal{L}^2_M$ (siehe Beweis von Satz D.13):

   - Sei $X \in \mathcal{L}^2_M$ und $\left(X^{(k)} \right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit

     $$\mathcal{L}^2_M\text{-}\lim_{k\to\infty} X^{(k)} \;=\; X$$

     und folglich

     $$\mathcal{L}^2_M\text{-}\lim_{k\to\infty} \mathbb{1}_{[0,t]} X^{(k)} \;=\; \mathbb{1}_{[0,t]} X \qquad \text{für } t \in \mathbb{T}.$$

     Aufgrund der Isometrie-Eigenschaft des Integraloperators $\tilde{I}$ (siehe (D.3)) ist somit

     $$L^2\text{-}\lim_{k\to\infty} \int X^{(k)} \,\mathrm{d}M \;=\; \int X \,\mathrm{d}M \quad \text{sowie} \tag{D.4}$$

     $$L^2\text{-}\lim_{k\to\infty} \int_0^t X^{(k)}_s \,\mathrm{d}M_s \;=\; \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s$$

     für $t \in \mathbb{T}$, d.h., $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s \right)_{t\in\mathbb{T}}$ ist ein L^2-Prozess.

   - Es verbleibt,

     $$\mathrm{E}\Big(\int X \,\mathrm{d}M \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big) \;=\; \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s$$

     zu zeigen, da daraus analog zu den Betrachtungen unter 1. die Martingaleigenschaft von $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s \right)_{t\in\mathbb{T}}$ folgt.

- Wegen 1. ist

$$\mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big) \;=\; \int\limits_0^t X_s^{(k)}\,\mathrm{d}M_s$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{T}$ und folglich

$$L^2\text{-}\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big) \;=\; \int\limits_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s.$$

Es verbleibt demnach zu zeigen, dass

$$L^2\text{-}\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(\int X\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big), \quad \text{also}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\Bigg(\mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big) - \mathrm{E}\Big(\int X\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\Bigg)^2 \;=\; 0$$

gilt. Dies erhält man jedoch wegen

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}\Bigg(\mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big) - \mathrm{E}\Big(\int X\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\Bigg)^2 \\
=\; & \mathrm{E}\Bigg(\mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M - \int X\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\Bigg)^2 \\
\overset{21}{\le}\; & \mathrm{E}\Bigg(\mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M - \int X\,\mathrm{d}M\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)^2\Bigg) \\
\overset{22}{\le}\; & \mathrm{E}\Bigg(\mathrm{E}\Big(\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M - \int X\,\mathrm{d}M\Big)^2\,\Big|\,\mathcal{F}_t\Big)\Bigg) \\
\overset{23}{=}\; & \mathrm{E}\Big(\int X^{(k)}\,\mathrm{d}M - \int X\,\mathrm{d}M\Big)^2 \;\overset{(D.4)}{\to}\; 0 \quad \text{für } k \to \infty. \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Um Aussagen über die rechtsseitige Stetigkeit des aus dem Itō-Integral $\int X\,\mathrm{d}M$ mit $X \in \mathcal{L}_M^2$ abgeleiteten Prozesses $\Big(\int\limits_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s\Big)_{t\in\mathbb{T}}$, der gemäß dem vorausgegangenen Satz ein L^2-Martingal ist, treffen zu können, muss zunächst beachtet werden, dass die Elemente der Menge der L^2-Martingale nicht einzelne Prozesse, sondern *Äquivalenzklassen* von Prozessen sind. Jedes Element einer solchen Äquivalenzklasse ist eine *Modifikation* (oder *Version*) eines

[21] Jensen'sche Ungleichung
[22] Jensen'sche Ungleichung für bedingte Erwartungen
[23] Tower property

anderen Elementes derselben Äquivalenzklasse. Dabei sind zwei gegebene Prozesse $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ und $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ auf $\left(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\right)$ Modifikationen voneinander, wenn

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t) \;=\; 1 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{T}$$

gilt (dadurch ist demnach die Äquivalenzrelation bestimmt).

- Damit bei Prozessmengen, bei denen die Adaptiertheit an eine gegebene Filtration eine Rolle spielt (z.B. die Menge der L^2-Martingale), die einzelnen Äquivalenzklassen auch „hinreichend groß“ sind, um Elemente mit gewünschten Eigenschaften wie z.B. Stetigkeit zu enthalten, wird der zugrunde liegende filtrierte Wahrscheinlichkeitsraum als vollständig und den üblichen Bedingungen genügend vorausgesetzt (siehe Abschnitt D.1). Im Folgenden wird grundsätzlich angenommen, dass diese Voraussetzung erfüllt ist.

- Der folgende Satz sagt aus, dass es in jeder Äquivalenzklasse von Itō-Integralen einen Repräsentanten mit rechtsseitig stetigen Pfaden gibt.

Satz D.16 *Es seien M ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal und $X \in \mathcal{L}^2_M$. Dann existiert eine Modifikation von $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit rechtsseitig stetigen Pfaden, die also ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal ist.*

Beweis:

1. Sei zunächst $X \in \mathcal{E}$ ein elementarer vorhersagbarer Prozess. Analog zu der Darstellung von X im Beweis von Satz D.15 ist

$$\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s \;=\; \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{F_i} \left(M_{\min(t_i,t)} - M_{\min(s_i,t)}\right).$$

Aus der rechtsseitigen Stetigkeit von M folgt sofort die rechtsseitige Stetigkeit von $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$.

Im Folgenden bezeichne für $X \in \mathcal{E}$ und $t \in \mathbb{T}$

$$I_M(X)_t \;:=\; \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s.$$

Die Bezeichnung

$$I_M(X) \;=\; \int_{\mathbb{T}} X_s \,\mathrm{d}M_s \;=\; \int X \,\mathrm{d}M$$

wurde bereits in (D.2) eingeführt.

2. Sei nun $X \in \mathcal{L}_M^2$ und $\left(X^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit $\mathcal{L}_M^2\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X$.

   - Wegen 1. ist der Prozess $\left(I_M(X^{(k)})_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ rechtsseitig stetig.
   - Im Folgenden wird eine der *Doob'schen Ungleichungen* (Joseph L. Doob, 1910-2004, amerikanischer Mathematiker) verwendet: Für ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal M gilt für alle $t \in \mathbb{T}$ und $\gamma > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\le t}\left|M_s\right| \ge \gamma\right) \;\le\; \frac{1}{\gamma^2}\cdot \mathrm{E}M_t^2$$

   - Für $j < k$ $(j,k \in \mathbb{N})$ ist auch $\left(I_M(X^{(k)})_t - I_M(X^{(j)})_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal. Anwendung der obigen Doob'schen Ungleichung auf diese Differenz ergibt für $\gamma := 2^{-m}$ mit $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|I_M(X^{(k)})_t - I_M(X^{(j)})_t\right| \ge 2^{-m}\right)\\
\le\;& 2^{2m}\cdot \mathrm{E}\left(I_M\left(X^{(k)}\right) - I_M\left(X^{(j)}\right)\right)^2\\
=\;& 2^{2m}\cdot \left\|I_M\left(X^{(k)}\right) - I_M\left(X^{(j)}\right)\right\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

   Mit Hilfe dieser Ungleichung lässt sich somit die maximale pfadweise Abweichung von (rechtsseitig stetigen) Approximationen $\left(I_M\left(X^{(k)}\right)_t\right)_{t\in\mathbb{T}}$ für $\left(\int_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$, mit deren Hilfe auf die rechtsseitige Stetigkeit von $\left(\int_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ geschlossen werden soll, über die erwartete quadratische Abweichung dieser Approximationen abschätzen.
   - Wegen $\mathcal{L}_M^2\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)} = X$ ist $L^2\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} I_M(X^{(k)}) = \int X\,\mathrm{d}M$. Somit ist $\left(I_M(X^{(k)})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^2-Cauchy-Folge und folglich existiert eine Folge $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von aufsteigenden Indizes $k_m \in \mathbb{N}$ $(m \in \mathbb{N})$ mit $k_1 < k_2 < \ldots$, so dass

$$\left\|I_M\left(X^{(k_{m+1})}\right) - I_M\left(X^{(k_m)}\right)\right\|_{L^2} \;\le\; 2^{-3m} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

   gilt. Mit (D.5) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{t\in\mathbb{T}}\left|I_M(X^{(k_{m+1})})_t - I_M(X^{(k_m)})_t\right| \ge 2^{-m}\right)\\
\le\;& 2^{2m}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left\|I_M\left(X^{(k_{m+1})}\right) - I_M\left(X^{(k_m)}\right)\right\|_{L^2}\\
\le\;& \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^m \;<\; \infty.
\end{aligned}$$

- Aus dem Lemma von Borel-Cantelli[24] folgt dann

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{m\to\infty} A_m\right) = 0$$

mit

$$A_m := \left\{\omega \in \Omega : \sup_{t\in\mathbb{T}} \left| I_M(X^{(k_{m+1})})_t(\omega) - I_M(X^{(k_m)})_t(\omega)\right| \geq 2^{-m}\right\}.$$

- Es sei $\Omega_0 := \limsup\limits_{m\to\infty} A_m$. Dann ist

$$\mathbb{P}(\Omega_1) = 1 \quad \text{mit} \quad \Omega_1 := \overline{\Omega_0}.$$

Für Ω_1 erhält man

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \overline{\limsup_{m\to\infty} A_m} = \overline{\bigcap_{\ell=1}^{\infty}\bigcup_{m=\ell}^{\infty} A_m} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty}\bigcap_{m=\ell}^{\infty}\overline{A_m} = \liminf_{m\to\infty}\overline{A_m} \\ &= \left\{\omega\in\Omega : \omega \in \overline{A_m} \text{ für schließlich alle } m\right\} \\ &= \Big\{\omega\in\Omega : \sup_{t\in\mathbb{T}}\left|I_M(X^{(k_{m+1})})_t(\omega) - I_M(X^{(k_m)})_t(\omega)\right| < 2^{-m} \\ &\qquad \text{für schließlich alle } m\Big\} \end{aligned} \tag{D.6}$$

- Für $\omega\in\Omega$ und $X\in\mathcal{E}$ bezeichne $I_M(X)_{\mathbb{T}}(\omega)$ die Funktion

$$t\in\mathbb{T} \mapsto I_M(X)_t(\omega).$$

Die Funktionenfolge $\left(I_M(X^{(k_m)})_{\mathbb{T}}(\omega)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ ist somit für $\omega\in\Omega_1$ gemäß (D.6) eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm. Diese besitzt (bezüglich der Supremumsnorm) für $\omega\in\Omega_1$ als Grenzwert die Funktion

$$t\in\mathbb{T} \mapsto \left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)(\omega)$$

(wobei $X = \mathcal{L}^2_M\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} X^{(k)}$) und konvergiert gegen diese sogar gleichmäßig (die gleichmäßige Konvergenz ist die Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm).

- Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz überträgt sich für $\omega\in\Omega_1$ die Eigenschaft der rechtsseitigen Stetigkeit von der Funktionenfolge $\left(I_M\left(X^{(k)}\right)_{\mathbb{T}}(\omega)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ auf deren Grenzwert $t\mapsto\left(\int_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s\right)(\omega)$.

[24] Lemma von Borel-Cantelli: Sei $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen. Dann gilt:

I. $\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_m) < \infty \implies \mathbb{P}\left(\limsup\limits_{m\to\infty} A_m\right) = 0$

II. $\sum_{m=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_m) = \infty$ und $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ paarweise unabhängig $\implies \mathbb{P}\left(\limsup\limits_{m\to\infty} A_m\right) = 1$

- Für $\omega \in \Omega_0$ (Ω_0 ist eine $\mathbb{P}$-Nullmenge!) wird

  $$\Big(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\Big)(\omega) \;:=\; 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}$$

  gesetzt. Man erhält somit eine rechtsseitig stetige Modifikation von $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$.

■

Bemerkungen:

- O.B.d.A. kann somit angenommen werden, dass der von dem Itō-Integral $\int X \,\mathrm{d}M$ mit $X \in \mathcal{L}^2_M$ abgeleitete Prozess $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal ist und somit wiederum als Integrator eines Itō-Integrals verwendet werden kann.
- Aus obigem Beweis ist ersichtlich, dass *alle* von einem Itō-Integral abgeleiteten Prozesse *fast sicher* rechtsseitig stetig sind, da die betreffende Menge Ω_0, wo dies nicht der Fall ist, eine $\mathbb{P}$-Nullmenge ist.
- Ebenso kann man obigem Beweis entnehmen, dass, falls der Integrator M ein *stetiges* L^2-Martingal ist, dies ebenso – fast sicher – für den von dem dazugehörigen Itō-Integral abgeleiteten Prozess gilt. Außerdem gibt es eine stetige Modifikation.
- In obigem Beweis wurde (implizit) vorausgesetzt, dass eine Cauchy-Folge bezüglich der Supremumsnorm einen Grenzwert besitzt. Genau genommen ist dafür noch die zusätzliche Annahme der Existenz linksseitiger Limites von M erforderlich.[25]
- Für Itō-Integrale gelten außerdem folgende beiden Aussagen vom „Radon-Nikodym-“ bzw. „Substitutionstyp“:

Satz D.17 *Es seien M ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal, $X \in \mathcal{L}^2_M$ sowie $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stochastischer Prozess mit*

$$Y_t \;:=\; \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s,$$

also ebenfalls ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal.

[25]Die Eigenschaft der rechtsseitigen Stetigkeit und der Existenz linksseitiger Limites braucht tatsächlich nur fast sicher zu gelten – damit lässt sich die Klasse der als Integratoren in Frage kommenden Prozesse auf càdlàg L^2-Martingale verallgemeinern.

(i) Es gilt $\dfrac{\mathrm{d}\mu_Y}{\mathrm{d}\mu_M} = X^2$ *(μ_Y besitzt die Dichte X^2 bezüglich μ_M), d.h.*

$$\mu_Y(P) = \int\limits_P X^2 \,\mathrm{d}\mu_M \quad \textit{für alle } P \in \mathcal{P}.$$

(ii) Sei $Z \in \mathcal{L}^2_Y$. Dann ist $ZX = \Big(Z_t \cdot X_t\Big)_{t\in\mathbb{T}} \in \mathcal{L}^2_M$ und es gilt

$$\int Z \,\mathrm{d}Y = \int ZX \,\mathrm{d}M.$$

Beweis:

Zu (i): Gemäß Satz D.9 genügt es, $\mu_Y\Big|_{\mathcal{R}}$, d.h. die Mengen $P = R = (s,t] \times F_s \in \mathcal{R}$ mit $s < t$ $(s,t \in \mathbb{T})$ und $F_s \in \mathcal{F}_s$, zu betrachten:

$$\begin{aligned}
\mu_Y(R) &\overset{26}{=} \mathrm{E}\Big(\mathbb{1}_{F_s} \cdot (Y_t - Y_s)^2\Big) = \mathrm{E}\Bigg(\mathbb{1}_{F_s}\Big(\int\limits_0^t X_u \,\mathrm{d}M_u - \int\limits_0^s X_u \,\mathrm{d}M_u\Big)^2\Bigg) \\
&= \mathrm{E}\Bigg(\mathbb{1}_{F_s}\Big(\int \mathbb{1}_{(s,t]} X \,\mathrm{d}M\Big)^2\Bigg) \overset{27}{=} \mathrm{E}\Bigg(\mathbb{1}_{F_s} \int \mathbb{1}_{(s,t]} X \,\mathrm{d}M\Bigg)^2 \\
&\overset{28}{=} \mathrm{E}\Bigg(\int \mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{(s,t]} X \,\mathrm{d}M\Bigg)^2 = \mathrm{E}\Bigg(\int \mathbb{1}_R X \,\mathrm{d}M\Bigg)^2 \\
&\overset{29}{=} \int \mathbb{1}_R X^2 \,\mathrm{d}\mu_M = \int\limits_R X^2 \,\mathrm{d}\mu_M
\end{aligned}$$

Zu (ii):

1. Für $Z = \mathbb{1}_R$ mit $R = (s,t] \times F_s$ und $s < t$ $(s,t \in \mathbb{T})$ sowie $F_s \in \mathcal{F}_s$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int Z \,\mathrm{d}Y &= \mathbb{1}_{F_s} \cdot (Y_t - Y_s) = \mathbb{1}_{F_s} \int \mathbb{1}_{(s,t]} X \,\mathrm{d}M \\
&\overset{30}{=} \int \mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{(s,t]} X \,\mathrm{d}M = \int ZX \,\mathrm{d}M
\end{aligned}$$

2. Für $Z \in \mathcal{E}$ erhält man die Aussage aufgrund der Linearität.

3. Für $Z \in \mathcal{L}^2_Y$ gibt es zunächst eine Folge $\Big(Z^{(n)}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ mit

$$\mathcal{L}^2_Y\text{-}\lim_{n\to\infty} Z^{(n)} = Z$$

[26] siehe Bemerkung 3. zu Definition D.8

[27] $\mathbb{1}^2_{(s,t]} = \mathbb{1}_{(s,t]}$

[28] Für $X \in \mathcal{E}$ ist dies unmittelbar ersichtlich. Für $X \in \mathcal{L}^2_M$ ergibt sich dieser Schritt durch die übliche Erweiterung.

[29] Lemma D.12 und Satz D.13

[30] siehe obige Fußnote 28

und somit

$$L^2\text{-}\lim_{n\to\infty}\int Z^{(n)}\,\mathrm{d}Y \;=\; \int Z\,\mathrm{d}Y.$$

- Aus (i) erhält man, dass μ_Y die Dichte X^2 bezüglich μ_M besitzt. Aufgrund der Substitutionsregel der Maß- und Integrationstheorie ist somit

  $$\int Z^2\,\mathrm{d}\mu_Y \;=\; \int Z^2X^2\,\mathrm{d}\mu_M$$

  und folglich $ZX \in \mathcal{L}^2_M$.

- Außerdem ist für $n \in \mathbb{N}$

  $$\begin{aligned} & \mathrm{E}\Big(\int Z^{(n)}\,\mathrm{d}Y - \int Z\,\mathrm{d}Y\Big)^2 \\ = \;& \mathrm{E}\Big(\int \Big(Z^{(n)} - Z\Big)\,\mathrm{d}Y\Big)^2 \;=\; \int \Big(Z^{(n)} - Z\Big)^2\,\mathrm{d}\mu_Y \\ = \;& \int \Big(Z^{(n)} - Z\Big)^2 X^2\,\mathrm{d}\mu_M \end{aligned}$$

  und demnach wegen $L^2\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\int Z^{(n)}\,\mathrm{d}Y = \int Z\,\mathrm{d}Y$

  $$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty}\int \Big(Z^{(n)} - Z\Big)^2 X^2\,\mathrm{d}\mu_M \\ = \;& \lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\Big(\int Z^{(n)}\,\mathrm{d}Y - \int Z\,\mathrm{d}Y\Big)^2 \;=\; 0, \end{aligned}$$

  d.h.

  $$\mathcal{L}^2_M\text{-}\lim_{n\to\infty}(Z^{(n)} - Z)X \;=\; 0$$

  bzw.

  $$\mathcal{L}^2_M\text{-}\lim_{n\to\infty}Z^{(n)}X \;=\; ZX.$$

- Somit ist

  $$L^2\text{-}\lim_{n\to\infty}\int Z^{(n)}X\,\mathrm{d}M \;=\; \int ZX\,\mathrm{d}M$$

  und schließlich

  $$\begin{aligned} \int Z\,\mathrm{d}Y \;&=\; L^2\text{-}\lim_{n\to\infty}\int Z^{(n)}\,\mathrm{d}Y \\ &=\; L^2\text{-}\lim_{n\to\infty}\int Z^{(n)}X\,\mathrm{d}M \;=\; \int ZX\,\mathrm{d}M. \end{aligned}$$

■

D.4 Lokale Martingale

- Im Folgenden sei $\mathbb{T} := [0,T]$, $T > 0$, oder $\mathbb{T} := [0,\infty)$.
- Aus Abschnitt D.3 ist bekannt, dass für ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal M und $X \in \mathcal{L}^2_M$ (die Menge der vorhersagbaren Prozesse, die bezüglich des Doléansmaßes μ_M quadratisch integrierbar sind) der Prozess

$$\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}} = \left(\int \mathbb{1}_{[0,t]} X \,\mathrm{d}M\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

ebenfalls ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal ist. Für die Existenz dieses Prozesses genügt es somit, lediglich

$$\mathbb{1}_{[0,t]} X \in \mathcal{L}^2_M \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{T}$$

zu fordern.

- Eine weitere Verallgemeinerung des Itō-Integrals ist möglich, wenn anstatt einer reellen Zahl $t \in \mathbb{T}$ als „Obergrenze" des Integrals eine Stoppzeit τ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ des zugrunde liegenden filtrierten Wahrscheinlichkeitsraums $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big)$ verwendet, d.h. ein Integral

$$\int \mathbb{1}_{[0,\tau]} X \,\mathrm{d}M$$

betrachtet wird. Zunächst wird jedoch der sogenannte **gestoppte Prozess** eingeführt und festgestellt, dass ein gestopptes rechtsseitig stetiges Martingal (bzw. Submartingal[31] bzw. Supermartingal[32]) wiederum ein rechtsseitig stetiges Martingal (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal) ist:

Definition D.18 *Für einen an $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ adaptierten stochastischen Prozess X und eine Stoppzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt*

$$\begin{aligned} X^\tau &:= \big(X_{\min(t,\tau)}\big)_{t\in\mathbb{T}}, \quad \text{d.h.} \\ X^\tau_t(\omega) &= X_{\min\left(t,\tau(\omega)\right)}(\omega) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T} \text{ und } \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

*der **bei τ gestoppte Prozess**.*

Satz D.19 *Gegeben seien ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big)$, ein rechtsseitig stetiges Martingal (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal) M bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ sowie eine Stoppzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Dann ist auch der gestoppte Prozess M^τ ein rechtsseitig stetiges Martingal (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal).*

Beweis: Siehe Bemerkung 5. zu Satz D.28.

[31] $\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$
[32] $\mathrm{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$

Bemerkungen:

- Ist M ein L^2-Prozess, so ist es auch M^τ.
- Für eine Stoppzeit τ ist das **stochastische Intervall** $[0, \tau]$ bestimmt durch

$$[0,\tau] \;=\; \Big\{(t,\omega) \in \mathbb{T} \times \Omega :\; 0 \;\le\; t \;\le\; \tau(\omega)\Big\}.$$

- Jedes stochastische Intervall $[0, \tau]$ ist in der vorhersagbaren σ-Algebra $\mathcal{P}$ enthalten, d.h.

$$\begin{aligned} [0,\tau] \;&\in\; \mathcal{P} \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} \;=\; \sigma(\mathcal{R}), \\ \mathcal{R} \;&=\; \Big\{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\Big\} \cup \Big\{(s,t] \times F_s : F_s \in \mathcal{F}_s,\; s<t,\; s,t \in \mathbb{T}\Big\}, \end{aligned}$$

  denn:

  - Für eine Stoppzeit τ sowie $k, n \in \mathbb{N}$ ist

  $$\left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \cap \mathbb{T}\right) \times \left\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \ge \frac{k-1}{2^n}\right\} \;\in\; \mathcal{R}.$$

    Somit ist für $n \in \mathbb{N}$

  $$P_n \;:=\; \{0\} \times \Omega \;\cup\; \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \cap \mathbb{T}\right) \times \left\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \ge \frac{k-1}{2^n}\right\} \;\in\; \mathcal{P}.$$

  - Ist $(t, \omega) \in P_n$, so gilt

  $$\begin{aligned} \tau(\omega) \;&\ge\; \max\left\{\frac{k-1}{2^n}, k \in \mathbb{N} : t > \frac{k-1}{2^n}\right\} \qquad \text{bzw.} \\ t \;&\in\; \Big[0, \tau_n(\omega)\Big] \;\cap\; \mathbb{T} \quad \text{mit} \quad \tau_n(\omega) := \min\left\{\frac{k}{2^n}, k \in \mathbb{N} : \tau(\omega) < \frac{k}{2^n}\right\}, \end{aligned}$$

    d.h., für dasjenige $k \in \mathbb{N}$, für das

  $$\frac{k-1}{2^n} \;\le\; \tau(\omega) \;<\; \frac{k}{2^n}$$

    gilt, ist

  $$\tau_n(\omega) \;=\; \frac{k}{2^n}.$$

  - Demnach ist τ_n eine Stoppzeit für $n \in \mathbb{N}$ und

  $$P_n \;=\; [0, \tau_n].$$

  - Wegen $\tau_n \downarrow \tau$ ist

  $$[0,\tau] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \tau_n]$$

    und somit wegen $[0, \tau_n] \in \mathcal{P}$ ebenfalls $[0, \tau] \in \mathcal{P}$.

- Für einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ und eine Stoppzeit τ ist der stochastische Prozess $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X$ definiert durch

$$\left(\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\right)(t,\omega) \;:=\; \mathbb{1}_{[0,\tau]}(t,\omega)\cdot X(t,\omega) \quad \text{für } (t,\omega)\in\mathbb{T}\times\Omega.$$

  Ist X ein vorhersagbarer Prozess (d.h. $\mathcal{P}$-messbar), so ist es auch $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X$, da wegen $[0,\tau]\in\mathcal{P}$ der Prozess $\mathbb{1}_{[0,\tau]}$ ebenfalls vorhersagbar und ein Produkt messbarer Zufallsgrößen wiederum messbar ist.

- Ist $X \in \mathcal{L}^2_M$ für ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal M ($\mathcal{L}^2_M$ – Menge der über dem Maßraum $\left(\mathbb{T}\times\Omega,\mathcal{P},\mu_M\right)$ quadratisch integrierbaren Funktionen), so ist für eine Stoppzeit τ wegen der Beschränktheit der Indikatorfunktion auch $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X \in \mathcal{L}^2_M$, d.h., das Itō-Integral $\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M$ kann gebildet werden.

- In diesem Fall kann für eine *endliche* Stoppzeit τ gezeigt werden, dass

$$\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M \;=\; \int_0^\tau X_s\,\mathrm{d}M_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{D.7}$$

  gilt (im Fall $\mathbb{T}=[0,T]$ sei dabei $\int_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s := \int X\,\mathrm{d}M$ für $t>T$), d.h.

$$\left(\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M\right)(\omega) \;=\; \left(\int_0^{\tau(\omega)} X_s\,\mathrm{d}M_s\right)(\omega) \quad \text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega\in\Omega.$$

  Nach Einführung von $\int_0^\infty X_s\,\mathrm{d}M_s \;:=\; \int X\,\mathrm{d}M$ gilt dies auch für *unendliche* Stoppzeiten ($\int_0^t X_s\,\mathrm{d}M_s$ war bisher lediglich für $t\in[0,\infty)$ definiert).

- Das folgende Lokalisationslemma liefert eine wichtige theoretische Grundlage für die folgende Verallgemeinerung des Itō-Integrals.

Lemma D.20 (Lokalisationslemma) *Gegeben seien ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}},\mathbb{P}\right)$*, ein rechtsseitig stetiges* L^2*-Martingal* M *bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*, ein Prozess* $X\in\mathcal{L}^2_M$ *sowie eine Stoppzeit* τ *bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*. Außerdem sei* M^τ *der bei* τ *gestoppte Prozess. Dann gilt:*

$$\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\in\mathcal{L}^2_{M^\tau} \quad \textit{und} \quad \int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M \;=\; \int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M^\tau.$$

Beweis:

- Gemäß Satz D.19 ist auch der gestoppte Prozess M^τ ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal, so dass sowohl die Bezeichnung $\mathcal{L}^2_{M^\tau}$ als auch das Itō-Integral mit dem Integrator M^τ sinnvoll ist.

- Die Menge $\mathcal{L}^2_{M^\tau}$ bezeichnet für das rechtsseitig stetige L^2-Martingal M^τ die Menge der über dem Maßraum $\left(\mathbb{T}\times\Omega,\mathcal{P},\mu_{M^\tau}\right)$ quadratisch integrierbaren Funktionen.

- Sei zunächst $X=\mathbb{1}_R$ mit $R=(s,t]\times F_s\in\mathcal{R}$ ($s<t,\ s,t\in\mathbb{T},\ F_s\in\mathcal{F}_s$). Dann ist für fast alle $\omega\in\Omega$

$$
\begin{aligned}
\left(\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M\right)(\omega) &= \left(\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_R\,\mathrm{d}M\right)(\omega)\\
&\overset{(D.7)}{=} \left(\int_0^{\tau(\omega)} \mathbb{1}_{(s,t]\times F_s}(u,.)\,\mathrm{d}M_u\right)(\omega)\\
&= \left(\int \mathbb{1}_{(s,t]\times F_s\,\cap\,(0,\tau(\omega)]\times\Omega\,\cap\,\{0\}\times\Omega}\,\mathrm{d}M\right)(\omega)\\
&= \left(\int \mathbb{1}_{\left(\min\left(s,\tau(\omega)\right),\,\min\left(t,\tau(\omega)\right)\right]\times F_s}\,\mathrm{d}M\right)(\omega)\\
&\overset{33}{=} \left(\mathbb{1}_{F_s}\cdot\left(M_{\min\left(t,\tau(\omega)\right)}-M_{\min\left(s,\tau(\omega)\right)}\right)\right)(\omega)\\
&= \left(\mathbb{1}_{F_s}\cdot(M^\tau_t-M^\tau_s)\right)(\omega) \;=\; \ldots \;=\; \left(\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M^\tau\right)(\omega),
\end{aligned}
$$

d.h.

$$\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M = \int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M^\tau \quad \text{f.s.}$$

(wobei im Folgenden diejenige Modifikation von $\int\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M$ betrachtet wird, für die diese Gleichheit für alle $\omega\in\Omega$ gilt).

- Für $X=\mathbb{1}_R$ gilt $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\in\mathcal{L}^2_{M^\tau}$, denn wegen $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\in\mathcal{L}^2_M$ ist $\int\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M\in L^2$ (Isometrieeigenschaft des Itō-Integrals), somit wegen obiger Gleichheit auch $\int\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M^\tau\in L^2$ und folglich $\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\in\mathcal{L}^2_{M^\tau}$. Insbesondere ist

$$
\begin{aligned}
\mu_{M^\tau}\left(R\cap[0,\tau]\right) &= \int \mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_R\,\mathrm{d}\mu_{M^\tau} = \int\left(\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\right)^2\mathrm{d}\mu_{M^\tau}\\
&= \mathrm{E}\left(\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M^\tau\right)^2 = \mathrm{E}\left(\int \mathbb{1}_{[0,\tau]}X\,\mathrm{d}M\right)^2\\
&= \int\left(\mathbb{1}_{[0,\tau]}X\right)^2\mathrm{d}\mu_M = \int \mathbb{1}_{[0,\tau]}\mathbb{1}_R\,\mathrm{d}\mu_M\\
&= \mu_M\left(R\cap[0,\tau]\right).
\end{aligned}
$$

- Die allgemeine Aussage folgt mit Hilfe der „üblichen Erweiterungen“.

■

[33] siehe Definition D.11 (i)

Definition D.21 *Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big)$*. Dann heißt eine monoton wachsende Folge* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Stoppzeiten bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *mit*

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n \;=\; \begin{cases} \infty & \text{für } \mathbb{T} = [0,\infty) \\ T & \text{für } \mathbb{T} = [0,T] \end{cases} \quad \text{f.s.}$$

eine ***lokalisierende Folge*** *bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*.*

Definition D.22 *Gegeben seien ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, \mathbb{P}\big)$ *sowie ein stochastischer Prozess* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *auf* $\Big(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P}\Big)$*. Dann heißt* $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *ein* ***lokales Martingal*** *bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*, falls es eine lokalisierende Folge* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bezüglich* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *gibt, so dass die gestoppten Prozesse*

$$X^{\tau_1} = \Big(X_{\min(t,\tau_1)}\Big)_{t\in\mathbb{T}},\ X^{\tau_2} = \Big(X_{\min(t,\tau_2)}\Big)_{t\in\mathbb{T}},\ \ldots$$

Martingale bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *sind.*

Bemerkungen:

- Ein Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ist definitionsgemäß genau dann ein lokales Martingal, wenn es eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass die Prozesse X^{τ_n} für alle $n \in \mathbb{N}$ Martingale sind.

- Analog heißt $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein lokales L^2-Martingal bzw. stetiges bzw. rechtsseitig stetiges lokales L^2-Martingal, wenn es eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass die Prozesse X^{τ_n} für alle $n \in \mathbb{N}$ diese Eigenschaft besitzen.

- Jedes Martingal $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ist auch ein lokales Martingal: Für die lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tau_n \equiv \begin{cases} \infty & \text{für } \mathbb{T} = [0,\infty) \\ T & \text{für } \mathbb{T} = [0,T] \end{cases}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich $\min(t,\tau_n) = t$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und somit $X^{\tau_n} \equiv X$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Ein lokales Martingal kann als „asymptotisches" Martingal betrachtet werden: Es gilt nämlich für $t \in \mathbb{T}$

$$\lim_{n\to\infty} X_t^{\tau_n}(\omega) \;=\; \lim_{n\to\infty} X_{\min(t,\tau_n(\omega))}(\omega) \;=\; X_t(\omega) \tag{D.8}$$

  für fast alle $\omega \in \Omega$, d.h. $\mathbb{P}$-f.s. $\lim\limits_{n\to\infty} X_t^{\tau_n} = X_t$.

- Die Konstruktion eines Beispiels für ein lokales Martingal, das kein Martingal ist, ist vergleichsweise aufwändig: Seien $W^1 = (W_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$, $W^2 = (W_t^2)_{t\in\mathbb{T}}$ und $W^3 = (W_t^3)_{t\in\mathbb{T}}$ drei stochastisch unabhängige Wienerprozesse und $R = (R_t)_{t\in\mathbb{T}}$ definiert durch

$$R_t \;:=\; \sqrt{(W_t^1+c)^2+(W_t^2+c)^2+(W_t^3+c)^2} \quad \text{mit} \quad c := \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(„Bessel-Prozess der Ordnung 3"). Dann lässt sich zeigen, dass $\left(\frac{1}{R_t}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ zwar ein lokales Martingal, aber kein Martingal ist, da der Erwartungswert $\mathrm{E}\left(\frac{1}{R_t}\right)$ von t abhängt: Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{1}{R_t}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{(W_t^1+c)^2+(W_t^2+c)^2+(W_t^3+c)^2}}\right)\\ &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{t}Z^1+c)^2+(\sqrt{t}Z^2+c)^2+(\sqrt{t}Z^3+c)^2}}\right),\end{aligned}$$

wobei Z^1, Z^2, Z^3 drei unabhängige standard-normalverteilte Zufallsgrößen sind. Für $t = 0$ ist gemäß Konstruktion $\mathrm{E}\left(\frac{1}{R_0}\right) = 1$, für $t \to \infty$ ergibt sich $\mathrm{E}\left(\frac{1}{R_t}\right) \to 0$.

- Der diskontierte Wertprozess einer selbstfinanzierenden (und ggf. nicht regulären) Handelsstrategie in einem Black-Scholes-Modell ist im Allgemeinen ein lokales Martingal, aber kein Martingal (siehe Bemerkung zu Lemma 3.27).

- Die folgenden beiden Lemmas geben hinreichende Bedingungen dafür an, dass ein lokales Martingal ein Martingal bzw. Supermartingal ist. Aus dem zweiten Lemma D.24 ergibt sich außerdem die definierende Bedingung für eine *reguläre* Handelsstrategie im Black-Scholes-Modell (Definition 3.26) und somit im Wesentlichen der Beweis für die Aussage, dass der Wertprozess einer diskontierten regulären Handelsstrategie im Black-Scholes-Modell ein Supermartingal ist (Lemma 3.27), die entscheidend war für die Aussage über die Arbitragefreiheit des Black-Scholes-Modells (Satz 3.28).

Lemma D.23 *Jedes beschränkte lokale Martingal ist ein Martingal.*

Beweis:

- Satz von der majorisierten Konvergenz für bedingte Erwartungen: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\, \mathcal{F},\, \mathbb{P}\Big)$, die fast sicher gegen eine Zufallsgröße X konvergieren. Wenn $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |X_n|$ integrierbar ist, dann ist auch X integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(X_n \mid \mathcal{G}\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(\lim_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G}\Big) \quad \text{f.s.} \tag{D.9}$$

für alle Unter-σ-Algebren $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$.

- Sei nun $(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein beschränktes lokales Martingal mit der dazugehörigen Filtration $\Big(\mathcal{F}_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ und lokalisierenden Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Beschränkheit ist X_t integrierbar für alle $t\in\mathbb{T}$ und es gibt ein $K>0$, so dass $|X_t|\le K$ für alle $t\in\mathbb{T}$ gilt. Wegen (D.8) ist

$$\mathrm{E}\Big(X_t \mid \mathcal{F}_s\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(\lim_{n\to\infty} X_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\Big)$$

und weiter wegen (D.9) und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\Big|X_t^{\tau_n}\Big|\le K$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(\lim_{n\to\infty} X_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\Big) &\;=\; \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(X_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\Big) \\ &\overset{34}{=} \lim_{n\to\infty} X_s^{\tau_n} \overset{(D.8)}{=} X_s \qquad \text{f.s.} \end{aligned}$$

für $s<t,\ s,t\in\mathbb{T}$. ∎

Lemma D.24 *Es seien Y eine integrierbare Zufallsgröße und M ein lokales Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $M_t\ge Y$ für alle $t\in\mathbb{T}$. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\Big(M_t \mid \mathcal{F}_s\Big) \;\le\; M_s \qquad \text{für alle } s<t,\;\; s,t\in\mathbb{T}.$$

Ist außerdem M_0 integrierbar, so ist M ein Supermartingal. Gilt darüber hinaus $\mathrm{E}M_0=\mathrm{E}M_t$ für ein $t\in\mathbb{T}$, so ist $\Big(M_s\Big)_{s\in[0,t]}$ ein Martingal.

Beweis:

- Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für M. Dann sind die Prozesse M^{τ_n} Martingale für alle $n\in\mathbb{N}$, d.h., es gilt

$$\mathrm{E}\Big(M_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\Big) \;=\; M_s^{\tau_n} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N} \text{ und } s<t\ (s,t\in\mathbb{T}).$$

- Lemma von Fatou für bedingte Erwartungen: Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von *nichtnegativen* Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $\Big(\Omega,\,\mathcal{F},\,\mathbb{P}\Big)$. Dann gilt

$$\mathrm{E}\Big(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G}\Big) \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(X_n \mid \mathcal{G}\Big) \quad \text{f.s.} \tag{D.10}$$

für alle Unter-σ-Algebren $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$.

- Das Lemma von Fatou lässt sich auf Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsgrößen verallgemeinern, die nach unten durch eine integrierbare Zufallsgröße Y beschränkt sind, denn es gilt, da $X_n+Y\ge 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$ ist,

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\Big(Y \mid \mathcal{G}\Big)+\mathrm{E}\Big(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G}\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(Y+\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G}\Big) \\ =\;& \mathrm{E}\Big(\liminf_{n\to\infty}(Y+X_n) \mid \mathcal{G}\Big) \;\le\; \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(Y+X_n \mid \mathcal{G}\Big) \\ =\;& \liminf_{n\to\infty}\Big(\mathrm{E}\Big(Y \mid \mathcal{G}\Big)+\mathrm{E}\Big(X_n \mid \mathcal{G}\Big)\Big) \;=\; \mathrm{E}\Big(Y \mid \mathcal{G}\Big)+\liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(X_n \mid \mathcal{G}\Big). \end{aligned}$$

[34] X^{τ_n} ist Martingal für $n\in\mathbb{N}$

- Wegen (D.8) und des Lemmas von Fatou ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big(M_t \mid \mathcal{F}_s\Big) &= \mathrm{E}\Big(\lim_{n\to\infty} M_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\Big) = \mathrm{E}\Big(\liminf_{n\to\infty} M_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\Big) \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}\Big(M_t^{\tau_n} \mid \mathcal{F}_s\Big) = \liminf_{n\to\infty} M_s^{\tau_n} = M_s \qquad \text{f.s.} \end{aligned}$$

  für $s < t,\ s,t \in \mathbb{T}$.

- Zur Supermartingaleigenschaft von M fehlt noch die Integrierbarkeit von M_t für alle $t \in \mathbb{T}$. Wegen der Integrierbarkeit von Y ergibt sich

$$M_0 \ \ge\ \mathrm{E}\Big(M_t \mid \mathcal{F}_0\Big) \ \ge\ \mathrm{E}\Big(Y \mid \mathcal{F}_0\Big)$$

  für alle $t \in \mathbb{T}$ und daraus wegen der Integrierbarkeit von M_0 aufgrund der „tower property"

$$\mathrm{E}M_0 \ \ge\ \mathrm{E}M_t \ \ge\ \mathrm{E}Y$$

  die Integrierbarkeit von M_t für alle $t \in \mathbb{T}$ und somit die Supermartingaleigenschaft.

- Ist nun darüber hinaus $\mathrm{E}M_0 = \mathrm{E}M_t$ für ein $t \in \mathbb{T}$, so ergibt sich aus der Supermartingaleigenschaft und der „tower property"

$$\begin{aligned} \mathrm{E}M_0 &= \mathrm{E}M_t = \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\Big(M_t \mid \mathcal{F}_s\Big)\Big) \\ &\ge \mathrm{E}M_s = \mathrm{E}\Big(\mathrm{E}\Big(M_s \mid \mathcal{F}_0\Big)\Big) \ \ge\ \mathrm{E}M_0 \end{aligned}$$

  für $s < t$ ($s \in \mathbb{T}$) und somit $\mathrm{E}M_s = \mathrm{E}M_0$ für alle $s \in [0,t]$. Ein Supermartingal mit dieser Eigenschaft ist aber ein Martingal.

∎

Bemerkung: Im Folgenden erfolgt nun die Verallgemeinerung des Itō-Integrals auf rechtsseitig stetige lokale L^2-Martingale als Integratoren und entsprechend allgemeinere Integranden.

Definition D.25 *Für ein rechtsseitig stetiges lokales L^2-Martingal M bezeichne $\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}$ die Menge aller vorhersagbaren (d.h. $\mathcal{P}$-messbaren) Prozesse X, für die eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für M existiert (d.h. M^{τ_n} ist ein rechtsseitig stetiges L^2-Martingal für alle $n \in \mathbb{N}$), so dass*

$$\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \ \in\ \mathcal{L}^2_{M^{\tau_n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Bemerkungen:

- Die Integrale $\int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \,\mathrm{d}M^{\tau_n}$ existieren für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Da eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, gilt für $n,k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left(M^{\tau_{n+k}}\right)^{\tau_n} &= \left(\left(\left(M^{\tau_{n+k}}\right)_t\right)_{t\in\mathbb{T}}\right)^{\tau_n} = \left(M_{\min(t,\tau_{n+k},\tau_n)}\right)_{t\in\mathbb{T}} \\ &= \left(M_{\min(t,\tau_n)}\right)_{t\in\mathbb{T}} = M^{\tau_n}.\end{aligned}$$

Aus dem Lokalisationslemma D.20 folgt somit

$$\int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \,\mathrm{d}M^{\tau_{n+k}} = \int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \,\mathrm{d}M^{\tau_n} \tag{D.11}$$

(hier kann M noch nicht als Integrator verwendet werden, da es kein L^2-Martingal, sondern lediglich ein *lokales* L^2-Martingal ist).

- Wegen (D.7) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}\int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \,\mathrm{d}M^{\tau_n} &= \int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \,\mathrm{d}M^{\tau_{n+k}} \\ = \int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \mathbb{1}_{[0,\tau_{n+k}]} X \,\mathrm{d}M^{\tau_{n+k}} &= \int_0^{\tau_n} \mathbb{1}_{[0,\tau_{n+k}]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_{n+k}} \quad \text{f.s.}\end{aligned}$$

und somit

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_n} = \int_0^{\min(t,\tau_n)} \mathbb{1}_{[0,\tau_{n+k}]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_{n+k}} \quad \text{f.s.}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$, d.h.

$$\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_n}\right)(\omega) = \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_{n+k}]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_{n+k}}\right)(\omega)$$

für fast alle $\omega \in \Omega$ und $t \in [0,\tau_n(\omega)] \cap \mathbb{T}$.

- Für jedes $t \in \mathbb{T}$ stellt das Integral

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_{n+k}]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_{n+k}}$$

somit eine fast sichere Fortsetzung von

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_n}$$

dar, was die folgende Definition eines allgemeineren Itō-Integrals rechtfertigt:

Definition D.26 *Für ein rechtsseitig stetiges lokales L^2-Martingal M mit lokalisierender Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $X \in \mathcal{L}_M^{2,\text{loc}}$ bezeichne für $t \in \mathbb{T}$*

$$\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s \;:=\; \mathbb{P}\text{-f.s.} \lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_n}.$$

Bemerkungen:

- Die obige Definition ist unabhängig von der gewählten lokalisierenden Folge.
- Bei dieser Definition ist das Vorhandensein einer oberen Integralgrenze unbedingt erforderlich, d.h., ein Integral in der Schreibweise $\int X \,\mathrm{d}M$ ist nicht definiert. Dies stellt aber keine Einschränkung dar, da im Folgenden ohnehin lediglich der Prozess

  $$\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

  von Interesse ist.
- Analog zu Satz D.16 für Itō-Integrale bezüglich rechtsseitig stetiger L^2-Martingale gilt der folgende Satz:

Satz D.27 *Es seien M ein rechtsseitig stetiges lokales L^2-Martingal und $X \in \mathcal{L}_M^{2,\text{loc}}$. Dann existiert eine Modifikation von $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit rechtsseitig stetigen Pfaden, die ein lokales L^2-Martingal ist.*

Beweis:

- Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge von M. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$

  $$\left(\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}\right)^{\tau_n} = \left(\int_0^{\min(t,\tau_n)} X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}} = \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

- Für fast alle ω und $t \in \mathbb{T}$ gilt gemäß Definition D.26

  $$\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s\right)(\omega)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty, k\geq n} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_k]}(s,.)\, \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_k} \right)(\omega) \\
&= \lim_{k\to\infty, k\geq n} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_k} \right)(\omega) \\
&\overset{(D.11)}{=} \lim_{k\to\infty} \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_n} \right)(\omega) \\
&= \left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_n} \right)(\omega),
\end{aligned}
$$

d.h. $\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s \right)_{t\in\mathbb{T}} = \left(\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s \right)_{t\in\mathbb{T}} \right)^{\tau_n}$ ist eine Modifikation von $\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s,.)\, X_s \,\mathrm{d}M_s^{\tau_n} \right)_{t\in\mathbb{T}}$ für $n \in \mathbb{N}$, wofür gemäß Satz D.16 eine Modifikation mit rechtsseitig stetigen Pfaden existiert, die ein L^2-Martingal ist.

■

Bemerkungen:

1. Ist M ein *stetiges* lokales L^2-Martingal, so gibt es – analog zu der entsprechenden Bemerkung zu Satz D.16 – eine *stetige* Modifikation von $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s \right)_{t\in\mathbb{T}}$.

2. Analog zu Satz D.17 gilt folgende Substitutionsregel: Es seien M ein rechtsseitig stetiges lokales L^2-Martingal, $X \in \mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}$ sowie $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stochastischer Prozess mit $Y_t := \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s$, also ebenfalls ein rechtsseitig stetiges lokales L^2-Martingal. Für $Z \in \mathcal{L}_Y^{2,\mathrm{loc}}$ ist dann $ZX \in \mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}$ und es gilt
$$\int_0^t Z_s \,\mathrm{d}Y_s = \int_0^t Z_s X_s \,\mathrm{d}M_s \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{T}.$$

3. Im Folgenden wird ein äußerst wichtiger Spezialfall von rechtsseitig stetigen lokalen L^2-Martingalen, nämlich die stetigen lokalen Martingale mit beschränktem Startwert, betrachtet. Für die weiteren Überlegungen wird zunächst folgender Spezialfall des sogenannten **Optional-Sampling-Theorems** (auch als Doob'sches Optional-Stopping-Theorem bezeichnet) – hier in der zeitdiskreten Variante – benötigt.

Lemma D.28 (Zeitdiskretes Optional-Sampling-Theorem für beschränkte Stoppzeiten)
Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\right)$ *mit einer zeitdiskreten Filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und ein an diese Filtration adaptierter integrierbarer stochastischer Prozess* $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*. Dann ist* M *genau dann ein (zeitdiskretes) Martingal, wenn für jede beschränkte (diskrete) Stoppzeit* τ *bezüglich* $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

$$\mathrm{E}M_\tau \;=\; \mathrm{E}M_0$$

gilt.

Beweis:

$\Longrightarrow$: Sei M ein Martingal und τ eine beschränkte Stoppzeit mit $\tau \leq N,\ N \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}M_\tau &= \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}\left(M_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right) \overset{35}{=} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(M_N \mid \mathcal{F}_n) \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right) \\
&\overset{36}{=} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(M_N \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \mid \mathcal{F}_n)\right) \overset{37}{=} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}\left(M_N \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}\right) \\
&= \mathrm{E}\Bigg(M_N \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{\{\tau=n\}}}_{=\mathbb{1}_\Omega}\Bigg) \;=\; \mathrm{E}M_N \overset{38}{=} \mathrm{E}M_0
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: Da die Integrierbarkeit und Adaptiertheit vorausgesetzt wurde, bleibt nur noch $\mathrm{E}\left(M_n \mid \mathcal{F}_m\right) = M_m$ mit $m < n,\ m, n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen, d.h., dass gemäß Definition der bedingten Erwartung

$$\int_F M_m \,\mathrm{d}\mathbb{P} \;=\; \int_F M_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{für alle } F \in \mathcal{F}_m$$

gilt.

Zu jedem $F \in \mathcal{F}_m$ wird durch

$$\tau_F(\omega) \;:=\; \begin{cases} m & \text{für } \omega \in F \\ n & \text{für } \omega \in \Omega \setminus F \end{cases} \;=\; m \cdot \mathbb{1}_F + n \cdot \mathbb{1}_{\Omega\setminus F}$$

eine (beschränkte) Stoppzeit definiert, denn es ist

$$\{\tau_F \leq k\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{F}_k & \text{für } k = 0, \ldots, m-1 \\ F \in \mathcal{F}_k & \text{für } k = m, \ldots, n-1 \\ \Omega \in \mathcal{F}_k & \text{für } k = n, \ldots \end{cases}$$

[35] Martingaleigenschaft
[36] Inverses „Taking out what is known."
[37] Tower property
[38] Martingaleigenschaft

Nach Voraussetzung ergibt sich für alle $F \in \mathcal{F}_m$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}M_0 &= \mathrm{E}M_{\tau_F} = \mathrm{E}\left(M_n \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_F = n\}}\right) + \mathrm{E}\left(M_m \cdot \mathbb{1}_{\{\tau_F = m\}}\right) \\ &= \int\limits_{\Omega \setminus F} M_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_F M_m \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathrm{E}M_n - \int\limits_F M_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_F M_m \,\mathrm{d}\mathbb{P} \end{aligned}$$

und wegen $\mathrm{E}M_n = \mathrm{E}M_0$ ($\tau \equiv n$ ist ebenfalls eine beschränkte Stoppzeit) somit $\int\limits_F M_m \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_F M_n \,\mathrm{d}\mathbb{P}$. ■

Bemerkungen:

1. Das „reine“ Optional-Sampling-Theorem beinhaltet lediglich die Richtung „von links nach rechts“, d.h., dass für ein Martingal $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und eine beschränkte Stoppzeit τ bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

   $$\mathrm{E}M_\tau = \mathrm{E}M_0$$

   gilt. Dazu ist zu bemerken, dass $\mathrm{E}M_n = \mathrm{E}M_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bereits unmittelbar aus der Martingaleigenschaft folgt.

2. Das Optional-Sampling-Theorem (in diskreter Zeit) gilt auch unter folgenden schwächeren Voraussetzungen an die Stoppzeit τ:

   $$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1, \quad \mathrm{E}\,|M_\tau| < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\{\tau > n\}} |M_n| \,\mathrm{d}\mathbb{P} = 0$$

   Denn: Die Stoppzeit $\tau_n = \min(\tau, n)$ ist beschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass gemäß Lemma D.28

   $$\mathrm{E}M_{\tau_n} = \mathrm{E}M_0$$

   gilt. Im Folgenden wird formal $M_\infty \equiv 0$ gesetzt. Da n.V. $\{\tau = \infty\}$ eine $\mathbb{P}$-Nullmenge ist, werden dadurch die folgenden Integrationen nicht beeinflusst. Wegen $\mathrm{E}\,|M_\tau| < \infty$ ist auch $\mathrm{E}M_\tau < \infty$ und es ergibt sich weiter für $n \in \mathbb{N}$

   $$\begin{aligned} &\left|\mathrm{E}M_\tau - \mathrm{E}M_{\tau_n}\right| \\ = &\left| \int\limits_{\{\tau \le n\}} M_\tau \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_{\{\tau > n\}} M_\tau \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int\limits_{\{\tau \le n\}} M_{\tau_n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int\limits_{\{\tau > n\}} M_{\tau_n} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \right| \\ \overset{39}{=} &\left| \int\limits_{\{\tau \le n\}} M_\tau \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_{\{\tau > n\}} M_\tau \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int\limits_{\{\tau \le n\}} M_\tau \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int\limits_{\{\tau > n\}} M_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \right| \\ = &\left| \int\limits_{\{\tau > n\}} M_\tau \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int\limits_{\{\tau > n\}} M_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \right| \overset{40}{\le} \left| \int\limits_{\{\tau > n\}} M_\tau \,\mathrm{d}\mathbb{P} \right| + \left| \int\limits_{\{\tau > n\}} M_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \right| \end{aligned}$$

$$\overset{41}{\leq} \int\limits_{\{\tau>n\}} |M_\tau| \, \mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_{\{\tau>n\}} |M_n| \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\{\tau>n\}} |M_n| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \;=\; 0$$

und wegen des Satzes von der majorisierten Konvergenz (anwendbar, da $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} |M_\tau| \leq |M_\tau|$ integrierbar ist) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} |M_\tau| \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int |M_\tau| \cdot \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &= \int |M_\tau| \cdot \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} \, \mathrm{d}\mathbb{P} \;=\; 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mathrm{E}M_\tau - \mathrm{E}M_{\tau_n} \right| \;=\; \lim_{n\to\infty} |\mathrm{E}M_\tau - \mathrm{E}M_0| \;=\; 0$$

und folglich $\mathrm{E}M_\tau = \mathrm{E}M_0$.

3. Das Optional-Sampling-Theorem lässt sich für *rechtsseitig stetige* Martingale auf einen kontinuierlichen Zeitbereich verallgemeinern (der Beweis führt diesen Fall mittels einer geeigneten Diskretisierung auf den zeitdiskreten Fall zurück).

4. Eine weitere Formulierung des Optional-Sampling-Theorems ist folgende: Sei $(M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal) bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ und σ, τ beschränkte Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $\sigma \leq \tau$ ($\leq T$ für $\mathbb{T} = [0, T]$). Dann gilt

$$M_\sigma \;=\; \mathrm{E}\Big(M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\Big) \text{ f.s.,}$$

d.h.

$$\Big(M_{\sigma(\omega)}\Big)(\omega) \;=\; \Big(\mathrm{E}\Big(M_{\tau(\omega)} \mid \mathcal{F}_{\sigma(\omega)}\Big)\Big)(\omega) \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega$$

(bzw. $M_\sigma \leq \mathrm{E}\Big(M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\Big)$ bzw. $M_\sigma \geq \mathrm{E}\Big(M_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma\Big)$) und somit

$$\mathrm{E}M_\sigma \;=\; \mathrm{E}M_\tau$$

(bzw. $\mathrm{E}M_\sigma \leq \mathrm{E}M_\tau$ bzw. $\mathrm{E}M_\sigma \geq \mathrm{E}M_\tau$).

Eine analoge Formulierung (ohne Stetigkeitsvoraussetzung) gibt es für den zeitdiskreten Fall.

[39] $\tau_n = \tau$ auf $\{\tau \leq n\}$ und $\tau_n = n$ auf $\{\tau > n\}$

[40] Dreiecksungleichung

[41] Jensen'sche Ungleichung

5. Aus dem Optional-Sampling-Theorem in der Formulierung von Bemerkung 4. erhält man sofort, dass ein bei einer (beliebigen) Stoppzeit $\tilde{\tau}$ gestopptes rechtsseitig stetiges Martingal M (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal) bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein (rechtsseitig stetiges) Martingal (bzw. Submartingal bzw. Supermartingal) bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{\min(t,\tilde{\tau})})_{t\in\mathbb{T}}$ ist, denn $\tau := \min(t,\tilde{\tau}) \leq t$ und $\sigma := \min(s,\tilde{\tau}) \leq s$ sind für $s < t$ und $s,t \in \mathbb{T}$ zwei beschränkte Stoppzeiten, die die Voraussetzungen des Satzes aus Bemerkung 4. erfüllen.

   In einem weiteren Schritt kann gezeigt werden, dass $M^{\tilde{\tau}}$ auch bezüglich der ursprünglichen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein Martingal ist.

Satz D.29 *Ein stetiges lokales Martingal $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit beschränktem M_0 ist ein (stetiges) lokales beschränktes Martingal und damit auch ein (stetiges) lokales L^2-Martingal.*

Beweis:

- Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge von M, d.h., M^{τ_n} ist ein stetiges Martingal für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\sigma_k \;:=\; \inf\Big\{t \in \mathbb{T} : |M_t| \geq k\Big\} \quad \text{mit} \quad \inf\emptyset \;:=\; \begin{cases} \infty & \text{für } \mathbb{T} = [0,\infty) \\ T & \text{für } \mathbb{T} = [0,T] \end{cases}$$

  eine Stoppzeit.

- Der Prozess M^{σ_k} ist beschränkt für alle $k \in \mathbb{N}$, denn

  – für $\omega \in \Omega$ und $t < \sigma_k(\omega)$ ist

$$\big|M_t^{\sigma_k}(\omega)\big| \;=\; \Big|M_{\min\big(t,\sigma_k(\omega)\big)}(\omega)\Big| \;=\; \big|M_t(\omega)\big| \;<\; k,$$

  da andernfalls $\sigma_k(\omega) \leq t$ wäre,

  – für $\omega \in \Omega$ und $\sigma_k(\omega) = 0$ ist nach Voraussetzung

$$\big|M_t^{\sigma_k}(\omega)\big| \;=\; \Big|M_{\min\big(t,\sigma_k(\omega)\big)}(\omega)\Big| \;=\; \big|M_0(\omega)\big| \;\leq\; \sup|M_0| \;<\; \infty,$$

  – für $\omega \in \Omega$ und $\sigma_k(\omega) \leq t$ sowie $\sigma_k(\omega) > 0$ ist aufgrund der Stetigkeit von M

$$\big|M_t^{\sigma_k}(\omega)\big| \;=\; \Big|M_{\sigma_k(\omega)}(\omega)\Big| \;=\; k.$$

Somit ist $|M_t^{\sigma_k}| \leq \max\{k, \sup|M_0|\}$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und $k \in \mathbb{N}$, d.h., M ist ein lokal beschränkter Prozess und somit ein lokaler L^2-Prozess mit der lokalisierenden Folge $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$. [42]

- Da M^{τ_n} für $n \in \mathbb{N}$ ein Martingal ist, so ist es gemäß Satz D.19 auch

  $$\left(M^{\tau_n}\right)^{\sigma_n} = M^{\min(\tau_n,\sigma_n)}.$$

  Somit ist die Aussage unter Verwendung der lokalisierenden Folge $\Big(\min(\tau_n,\sigma_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ gezeigt.

- Alternativ kann auch ohne Verwendung von Satz D.19 gezeigt werden, dass M^{σ_k} ein Martingal für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit M ein lokal beschränktes Martingal mit der lokalisierenden Folge $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist. Dies ist gemäß Lemma D.28 genau dann der Fall, wenn

  $$\mathrm{E}M_\tau^{\sigma_k} = \mathrm{E}M_0^{\sigma_k} = \mathrm{E}M_0$$

  für alle beschränkten Stoppzeiten τ gilt – dies ist demnach noch zu zeigen.

- Ist nun τ eine beliebige beschränkte Stoppzeit, so ist auch $\min(\tau,\sigma_k)$ eine beschränkte Stoppzeit für alle $k \in \mathbb{N}$. Da M^{τ_n} gemäß Voraussetzung ein Martingal für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, liefert die zeitstetige Variante des obigen Optional-Sampling-Theorems D.28

  $$\mathrm{E}M^{\tau_n}_{\min(\tau,\sigma_k)} = \mathrm{E}M_0^{\tau_n} = \mathrm{E}M_0.$$

- Es verbleibt somit zu zeigen, dass

  $$\mathrm{E}M_\tau^{\sigma_k} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}M^{\tau_n}_{\min(\tau,\sigma_k)} = \mathrm{E}M_0 \tag{D.12}$$

  gilt:

  - Wegen (D.8) ist

    $$\mathbb{P}\text{-f.s.} \lim_{n\to\infty} M^{\tau_n}_{\min(\tau,\sigma_k)} = M_{\min(\tau,\sigma_k)} = M_\tau^{\sigma_k}.$$

  - Daraus folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz das gewünschte Resultat (D.12), falls $\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|M^{\tau_n}_{\min(\tau,\sigma_k)}\right|$ integrierbar ist. Dies ist aber wegen

    $$\left|M^{\tau_n}_{\min(\tau,\sigma_k)}\right| = \left|M^{\sigma_k}_{\min(\tau,\tau_n)}\right| \leq \max\{k, \sup|M_0|\}$$

    der Fall.

■

[42] Noch zu zeigen wäre, dass $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = \infty$ bzw. $\lim_{k\to\infty} \sigma_k = T$ f.s. ist. Hierfür sind ggf. $\tilde{\sigma}_k(\omega) := \begin{cases} k & \text{für } M_k(\omega) \leq k \\ \sigma_k(\omega) & \text{sonst} \end{cases}$ und $\hat{\sigma}_k := \max_{i=1,\dots,k} \tilde{\sigma}_k$ für $\omega \in \Omega$ und $k \in \mathbb{N}$ zu betrachten.

Bemerkungen:

- Somit können auch stetige lokale Martingale mit beschränktem Startwert als Integratoren von Itō-Integralen verwendet werden.
- Der folgende Satz sagt insbesondere aus, dass stetige lokale Martingale mit beschränktem Startwert auch als *Integranden* von Itō-Integralen mit ebensolchen Prozessen als *Integratoren* verwendet werden können und dass die daraus abgeleiteten Prozesse wiederum stetige lokale Martingale mit beschränktem Startwert sind. Für stetige lokale Martingale $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit beschränktem Startwert können dann insbesondere Integral-Prozesse der Gestalt

  $$\left(\int_0^t M_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

  gebildet werden.

Satz D.30 *Seien M ein stetiges lokales Martingal mit beschränktem Startwert und X ein stetiger Prozess mit beschränktem Startwert. Dann gilt $X \in \mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_M$ und $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ist ein stetiges lokales Martingal mit beschränktem Startwert.*

Beweis:

- Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge von M, d.h., M^{τ_n} ist ein stetiges Martingal für alle $n \in \mathbb{N}$. Da X stetig ist, ist es auch vorhersagbar. Gemäß Definition D.25 ist $X \in \mathcal{L}^{2,\mathrm{loc}}_M$ dann gleichbedeutend mit

  $$\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X \;\in\; \mathcal{L}^2_{M^{\tau_n}}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}X$ ist bezüglich des Doléansmaßes $\mu_{M^{\tau_n}}$ quadratisch integrierbar. Dies wird im Folgenden gezeigt.
- Analog zum Beweis von Satz D.29 wird angenommen, dass $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

  $$\sigma_n \;:=\; \inf\Big\{t \in \mathbb{T} : |M_t| + |X_t| \geq n\Big\}$$

  eine solche lokalisierende Folge ist. Im Folgenden sei daher $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Aufgrund der Beschränktheit von M_0 und X_0 gibt es außerdem ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

  $$|M_0| + |X_0| \;\leq\; N$$

  gilt. Analog zum Beweis von Satz D.29 sind demnach M und X lokal beschränkte Prozesse, für die

  $$\left|M_t^{\tau_n}\right| \;\leq\; n + N \quad \text{und} \quad \left|X_t^{\tau_n}\right| \;\leq\; n + N \tag{D.13}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int \left(\mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X\right)^2 \mathrm{d}\mu_{M^{\tau_n}} \overset{43}{=} \int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \left(X^{\tau_n}\right)^2 \mathrm{d}\mu_{M^{\tau_n}} \\
\overset{(D.13)}{\leq} \; & (n+N)^2 \int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \mathrm{d}\mu_{M^{\tau_n}} \overset{44}{=} (n+N)^2 \cdot \mathrm{E}\left(\int \mathbb{1}_{[0,\tau_n]} \mathrm{d}M^{\tau_n}\right)^2 \\
\overset{(D.7)}{=} \; & (n+N)^2 \cdot \mathrm{E}\left(\int_0^{\tau_n} \mathrm{d}M^{\tau_n}\right)^2 = (n+N)^2 \cdot \mathrm{E}\left(M^{\tau_n}_{\tau_n} - M^{\tau_n}_0\right)^2 \\
\leq \; & (n+N)^2 \cdot \mathrm{E}\left(\left|M^{\tau_n}_{\tau_n}\right| + \left|M^{\tau_n}_0\right|\right)^2 \overset{(D.13)}{\leq} (n+N)^2 \cdot \mathrm{E}\Big(2 \cdot (n+N)\Big)^2 \\
\leq \; & 4 \cdot (n+N)^4 < \infty
\end{aligned}$$

und somit $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]} X \in \mathcal{L}^2_{M^{\tau_n}}$.

- Gemäß Bemerkung 1. zu Satz D.27 ist $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t \in \mathbb{T}}$ ein stetiges lokales L^2-Martingal, also auch ein stetiges lokales Martingal, das den beschränkten Startwert $\int_0^0 X_s \,\mathrm{d}M_s = 0$ besitzt.

■

[43] Für $(t,\omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$ ist $\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(t,\omega) \cdot X(t,\omega) = \mathbb{1}_{[0,\tau_n(\omega)]}(t) \cdot X_t(\omega) = \mathbb{1}_{[0,\tau_n(\omega)]}(t) \cdot X_{\min\left(t,\tau^n(\omega)\right)}(\omega) = \mathbb{1}_{[0,\tau_n(\omega)]}(t) \cdot X^{\tau_n}_t(\omega)$

[44] Itō-Isometrie

D.5 Stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale und quadratischer Variationsprozess

- Im Folgenden sei $\mathbb{T} := [0,T]$, $T > 0$, oder $\mathbb{T} := [0,\infty)$.
- Gegeben seien – analog zu den Betrachtungen in Abschnitt C.6 –
  - eine Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$,
  - eine positive reelle Zahl $p > 0$ sowie
  - eine endliche Zerlegung $\Pi^{[0,t]} = \Big\{t_0, t_1, \ldots, t_n\Big\}$ von $[0,t]$ $(t \in \mathbb{T})$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$.
- Dann heißt

$$S_p^{\Pi^{[0,t]}}(f) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \big|f(t_i) - f(t_{i-1})\big|^p \tag{D.14}$$

  die p-**Variationsumme** von f bezüglich $\Pi^{[0,t]}$.

- Die kleinste obere Schranke aller p-Variationssummen von f auf dem Intervall $[0,t]$ $(t \in \mathbb{T})$

$$V_p^{[0,t]}(f) \;:=\; \sup_{\Pi^{[0,t]}} S_p^{\Pi^{[0,t]}}(f)$$

  heißt **totale** p-**Variation** auf $[0,t]$. Im Fall $p = 1$ heißt diese auch **Totalvariation** oder einfach nur **Variation**, im Fall $p = 2$ **quadratische Variation**.

- Ist $V_p^{[0,t]}(f) < \infty$, so heißt f **von beschränkter** p-**Variation auf** $[0,t]$, andernfalls von unbeschränkter p-Variation auf $[0,t]$.
- Ist f für alle $t \in \mathbb{T}$ von beschränkter p-Variation auf $[0,t]$, dann heißt f von **lokal beschränkter** p-**Variation**.
- Insbesondere sind alle Treppen-, monotone und Lipschitz-stetige Funktionen auf $[0,t]$ von beschränkter (Total-)Variation auf $[0,t]$. Beispielsweise sind die Pfade eines Poissonprozesses aufgrund der Monotonie von lokal beschränkter Variation.
- Von besonderem Interesse sind dabei insbesondere Folgen von immer „feineren" Zerlegungen eines Intervalls $[0,t]$ $(t \in \mathbb{T})$: Es bezeichne $\left|\Pi^{[0,t]}\right| := \max\limits_{i=1,\ldots,n} \big(t_i - t_{i-1}\big)$ den Feinheitsgrad einer Zerlegung $\Pi^{[0,t]}$. Eine Folge $\left(\Pi_k^{[0,t]}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen mit $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\Pi_k^{[0,t]}\right| = 0$ heißt **reguläre Zerlegungsfolge**. Falls der Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} S_p^{\Pi_k^{[0,t]}}(f)$$

  existiert, heißt er die p-**Variation** von f bezüglich der regulären Zerlegungsfolge $\left(\Pi_k^{[0,t]}\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

- Ist f auf $[0,t]$ von beschränkter p-Variation, dann existiert auch die p-Variation von f bezüglich jeder regulären Zerlegungsfolge von $[0,t]$, wobei dieser Wert von der konkret gewählten Zerlegungsfolge abhängen kann.

- Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, eine Zerlegung $\Pi^{[0,t]} = \Big\{t_0, t_1, \ldots, t_n\Big\}$ sowie einen sogenannten Zwischenvektor $\boldsymbol{\xi} := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ mit $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ heißt

$$S^{\Pi^{[0,t]}, \boldsymbol{\xi}}(f,g) \ := \ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Big(g(t_i) - g(t_{i-1})\Big)$$

  die **Riemann-Stieltjes-Summe** von f bezüglich $\Pi^{[0,t]}$, $\boldsymbol{\xi}$ und g.

  Für $g : t \mapsto t$ erhält man die entsprechende Riemann-Summe von f.

- Existiert nun für $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ und jede reguläre Zerlegungsfolge $\Big(\Pi_k^{[0,t]}\Big)_{k \in \mathbb{N}}$ sowie jede dazugehörige Folge von Zwischenvektoren $\big(\boldsymbol{\xi}_k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} S^{\Pi_k^{[0,t]}, \boldsymbol{\xi}_k}(f,g)$$

  und ist dieser eindeutig bestimmt, so heißt f auf $[0,t]$ Riemann-Stieltjes-integrierbar und

$$\int_0^t f \, \mathrm{d}g \ := \ \int_0^t f(s) \, \mathrm{d}g(s) \ := \ \lim_{k \to \infty} S^{\Pi_k^{[0,t]}, \boldsymbol{\xi}_k}(f,g) \tag{D.15}$$

  das **Riemann-Stieltjes-Integral** von f bezüglich g auf $[0,t]$.

- Ein Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^t f \, \mathrm{d}g$ besitzt unter anderem folgende Eigenschaften:

  – Das Riemann-Stieltjes-Integral ist nicht nur bezüglich des Integranden, sondern auch bezüglich des *Integrators* linear, d.h.

$$\int_0^t f \, \mathrm{d}(g_1 + g_2) \ = \ \int_0^t f \, \mathrm{d}g_1 + \int_0^t f \, \mathrm{d}g_2, \tag{D.16}$$

  falls sowohl $\int_0^t f \, \mathrm{d}g_1$ als auch $\int_0^t f \, \mathrm{d}g_2$ existieren.

  – Sind sowohl f als auch die Ableitung g' von g auf $[0,t]$ Riemann-integrierbar, so existiert das Riemann-Stieltjes Integral $\int_0^t f \, \mathrm{d}g$ und es gilt

$$\int_0^t f \, \mathrm{d}g \ = \ \int_0^t f(s) \cdot g'(s) \, \mathrm{d}s.$$

– Das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^t f \, \mathrm{d}g$ existiert insbesondere dann, wenn g auf $[0,t]$ von beschränkter Variation und f auf $[0,t]$ stückweise stetig mit anderen Sprungstellen als g ist.

– Ist f auf $[0,t]$ stetig und g eine Treppenfunktion auf $[0,t]$ mit Sprüngen der Höhe $g_1,\ldots,g_n$ an den Stellen $s_1,\ldots,s_n$, so ist

$$\int_0^t f \, \mathrm{d}g \;=\; \sum_{i=1}^n f(s_i)\cdot g_i$$

(„Summen sind Riemann-Stieltjes-Integrale“).

– Existiert das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^t f \, \mathrm{d}g$, so existiert auch das Riemann-Stieltjes-Integral $\int_0^t g \, \mathrm{d}f$ (Vertauschung von Integrator und Integrand!) und es gilt

$$\int_0^t f \, \mathrm{d}g + \int_0^t g \, \mathrm{d}f \;=\; f(t)\cdot g(t) - f(0)\cdot g(0). \tag{D.17}$$

Speziell erhält man somit für stetige Funktionen f, die auf $[0,t]$ von beschränkter Variation sind,

$$2\cdot\int_0^t f \, \mathrm{d}f \;=\; f(t)^2 - f(0)^2. \tag{D.18}$$

- Ein stochastischer Prozess $V=(V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ auf $\big(\Omega,\,\mathcal{F},\,\mathbb{P}\big)$ heißt ein **Prozess von lokal beschränkter Variation**, falls sämtliche Pfade $\big(V_t(\omega)\big)_{t\in\mathbb{T}}$ von V mit $\omega\in\Omega$ von lokal beschränkter Variation sind, d.h., wenn $\big(V_s(\omega)\big)_{s\in[0,t]}$ von beschränkter Variation für alle $\omega\in\Omega$ und $t\in\mathbb{T}$ ist.

- Für Prozesse $V=(V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ von lokal beschränkter Variation und Prozesse $X=(X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ lässt sich demnach unter geeigneten Voraussetzungen an X (z.B. Stetigkeit) für $t\in\mathbb{T}$ ein stochastisches Integral

$$\int_0^t X_s \, \mathrm{d}V_s$$

als pfadweises Riemann-Stieltjes-Integral bilden, d.h.

$$\left(\int_0^t X_s \, \mathrm{d}V_s\right)(\omega) \;:=\; \int_0^t X_s(\omega) \, \mathrm{d}V_s(\omega).$$

Insbesondere existiert dann ein stochastischer Integral-Prozess

$$\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}V_s\right)_{t\in\mathbb{T}} . \tag{D.19}$$

- Analog zu Satz D.30 gibt es auch für stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale eine Aussage, unter welchen Voraussetzungen an den Integranden X und den Integrator V der Integralprozess (D.19) wiederum als Integrator eines stochastischen Riemann-Stieltjes-Integrals in Frage kommt (d.h., welche Klassen von Prozessen in Bezug auf Integration „abgeschlossen" sind).

Satz D.31 *Seien $V = (V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiger Prozess von lokal beschränkter Variation und $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiger Prozess mit beschränktem Startwert. Dann ist der Integralprozess $\left(\int_0^t X_s \mathrm{d}V_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ebenfalls ein stetiger Prozess von lokal beschränkter Variation.*

(Ohne Beweis)

Bemerkungen:

1. Analog zu Satz D.29 und zum Beweis von Satz D.30 ergibt sich aus der Stetigkeit und dem beschränktem Startwert des Prozesses X die lokale Beschränktheit dieses Prozesses, d.h., es gibt eine lokalisierende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen (z.B. $a_n := n + \sup|X_0|$), so dass

$$\left|X^{\tau_n}\right| \;\leq\; a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Tatsächlich ist neben der Stetigkeit die lokale Beschränktheit von X hinreichend dafür, dass der Integralprozess in Satz D.31 ein Prozess von lokal beschränkter Variation ist.

2. Somit können stetige Prozesse X mit beschränktem Startwert als *Integranden* sowohl von stochastischen Riemann-Stieltjes-Integralen (bezüglich eines stetigen Prozesses V von lokal beschränkter Variation) als auch von Itō-Integralen (bezüglich eines stetigen lokalen Martingals M mit beschränktem Startwert) verwendet werden. Darüber hinaus können für solche Prozesse M und V, falls V_0 beschränkt ist, für $t \in \mathbb{T}$ die Integrale

$$\int_0^t V_s \,\mathrm{d}M_s \qquad \text{(Itō-Integral)} \qquad \text{und}$$

$$\int_0^t M_s \,\mathrm{d}V_s \qquad \text{(stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral)}$$

gebildet werden.

3. Es stellt sich umgekehrt die Frage, ob Prozesse, die als *Integratoren* eines Itō-Integral verwendet werden, auch als Integratoren für stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale in Frage kommen. Der nächste Satz beantwortet diese Frage – in Bezug auf Prozesse von lokal beschränkter Variation als Integrator – mit „Nein“, da lediglich triviale stetige lokale Martingale von lokal beschränkter Variation sind:

Satz D.32 *Es sei $M^{(0)} = (M_t^{(0)})_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiges lokales Martingal von lokal beschränkter Variation und $M_0 = 0$. Dann gilt*

$$M^{(0)} \equiv 0.$$

(Ohne Beweis)

Bemerkungen:

- Der obige Satz gilt auch für ein stetiges lokales Martingal $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$, wenn der Startwert M_0 eine beliebige, aber beschränkte Zufallsgröße ist: In diesem Fall wird der Prozess $(M_t - M_0)_{t\in\mathbb{T}}$ betrachtet und es folgt $M \equiv M_0$, d.h. ein stetiges lokales Martingal von lokal beschränkter Variation mit beschränktem Startwert ist konstant.

- Für stetige Prozesse von lokal beschränkter Variation $V = (V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ gilt gemäß (D.18)

$$2 \cdot \int_0^t V_s \,\mathrm{d}V_s = V_t^2 - V_0^2,$$

wobei hier ein stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral verwendet wird.

- Für stetige lokale Martingale $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit beschränktem Startwert kann analog ein Itō-Integral

$$\int_0^t M_s \,\mathrm{d}M_s$$

gebildet werden, allerdings zeigt bereits der Spezialfall eines Wienerprozesses $W = (W_t)_{t\in\mathbb{T}}$, dass

$$2 \cdot \int_0^t W_s \,\mathrm{d}W_s \neq W_t^2 - W_0^2 = W_t^2$$

gilt: Der Prozess $\left(\int_0^t W_s \,\mathrm{d}W_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$ ist wie der Wienerprozess selbst ein stetiges Martingal (siehe Satz D.16 mit Bemerkungen). Der Prozess $\left(W_t^2\right)_{t\in\mathbb{T}}$ dagegen ist *kein* Martingal, wohl aber der Prozess

$$\left(W_t^2 - t\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

(siehe Lemma 3.6).

- Im Folgenden wird derjenige Prozess $[M] = \Big([M]_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$, für den für ein stetiges lokales Martingal M mit beschränktem Startwert

  $$2 \cdot \int_0^t M_s \,\mathrm{d}M_s \;=\; M_t^2 - M_0^2 - [M]_t$$

  gilt, als quadratischer Variationsprozess bezeichnet. Der quadratische Variationsprozess stellt somit gewissenermaßen einen „Korrekturterm" für das Rechnen mit Itō-Integralen gegenüber dem Rechnen mit stochastischen Riemann-Stieltjes-Integralen dar. Für einen Wienerprozess W ist beispielsweise $[W]_t = t$ für $t \in \mathbb{T}$.

Definition D.33 *Es sei $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiges lokales Martingal mit beschränktem M_0. Dann heißt der Prozess*

$$[M] = \Big([M]_t\Big)_{t\in\mathbb{T}} \quad \textit{mit} \quad [M]_t \;:=\; M_t^2 - M_0^2 - 2 \cdot \int_0^t M_s \,\mathrm{d}M_s$$

der ***quadratische Variationsprozess*** *von M.*

Bemerkungen:

- Die Bezeichnung „quadratischer Variationsprozess" ist durch folgende Eigenschaft motiviert: Es seien $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiges lokales Martingal mit beschränktem M_0 und $\Big(\Pi_k^{[0,t]}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reguläre Zerlegungsfolge mit $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$. Dann gilt für die quadratische Variation bezüglich dieser Zerlegungsfolge

  $$\lim_{k\to\infty} S_2^{\Pi_k^{[0,t]}}(M) \;=\; \Big[M\Big]_t \qquad \text{in Wahrscheinlichkeit.} \tag{D.20}$$

  Ist M darüber hinaus noch beschränkt, so gilt (D.20) im quadratischen Mittel, d.h. im Sinne der L^2-Konvergenz.

- Für stetige Prozesse von lokal beschränkter Variation $(V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ gilt – gemäß obigen Betrachtungen –

  $$V_t^2 - V_0^2 - 2 \cdot \int_0^t V_s \,\mathrm{d}V_s \;=\; 0,$$

  d.h., die Definition eines quadratischen Variationsprozesses für stetige Prozesse von lokal beschränkter Variation wäre nicht sinnvoll, zumal der quadratische Variationsprozess eben gerade ein wesentliches Unterscheidungskriterium zwischen stetigen lokalen Martingalen mit beschränktem Startwert gegenüber stetigen Prozessen von lokal beschränkter Variation darstellt. Lediglich für konstante lokale Martingale ist der quadratische Variationsprozess Null (siehe dazu auch Satz D.32).

- Ist M lediglich ein *rechtsseitig* stetiges lokales L^2-Martingal mit existierenden linksseitigen Limites („càdlàg"), kann unter Verwendung des linksseitig stetigen Prozesses $M_- = \Big((M_-)_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ mit

  $$(M_-)_t \;:=\; \lim_{s\uparrow t} M_s$$

  für $t \in \mathbb{T}\setminus\{0\}$ und $(M_-)_0 := M_0$ ebenfalls der quadratische Variationsprozess unter Verwendung des Integrals

  $$\int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}M_s$$

  gebildet werden.

- Aus der Beziehung

  $$M_t^2 - M_0^2 - [M]_t \;=\; 2\cdot\int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}M_s$$

  für $t \in \mathbb{T}$ leiten sich aus den Sätzen D.16 und D.27 einschließlich der dazugehörigen Bemerkungen unmittelbar folgende Eigenschaften von $[M]$ ab:

  – Es gibt immer eine rechtsseitig stetige Modifikation von $[M]$, da es immer eine rechtsseitig stetige Modifikation von $\int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}M_s$ gibt und M wenigstens rechtsseitig stetig ist.

  – Ist M *stetig*, so gibt es immer eine *stetige* Modifikation von $[M]$.

  – Der Prozess

  $$\Big(M_t^2 - M_0^2 - [M]_t\Big)_{t\in\mathbb{T}} \tag{D.21}$$

  ist immer ein lokales L^2-Martingal, da $\int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}M_s$ ein lokales L^2-Martingal ist. Ist M darüber hinaus ein Martingal, so ist (D.21) ebenfalls ein Martingal.

- Für ein stetiges lokales Martingal M mit beschränktem M_0 gibt es eine Modifikation des dazugehörigen quadratischen Variationsprozesses $[M]$, die monoton wachsend und somit von beschränkter Variation ist. Somit kann $[M]$ als Integrator eines stochastischen Riemann-Stieltjes-Integrals verwendet werden. Außerdem ist diese Modifikation von $[M]$ wegen $[M]_0 = 0$ nichtnegativ.

- Für ein rechtsseitig stetiges L^2-*Martingal* M (nicht *lokales* Martingal!) gelten folgende Beziehungen zwischen dem Doléansmaß μ_M und dem quadratischen Variationsprozess $[M]$:

1. Für $t \in \mathbb{T}$ ist

$$\mu_M\Big([0,t]\times\Omega\Big) \;=\; \mathrm{E}M_t^2 - \mathrm{E}M_0^2 \;=\; \mathrm{E}\Big([M]_t\Big) \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t \mathrm{d}[M]_s\right),$$

denn

$$\begin{aligned}
\mu_M\Big([0,t]\times\Omega\Big) &\overset{45}{=} \mu_M\Big((0,t]\times\Omega\Big) \overset{46}{=} \mathrm{E}\Big((M_t^2 - M_0^2)\cdot \mathbb{1}_\Omega\Big) \\
&\overset{47}{=} \mathrm{E}\left([M]_t + 2\cdot \int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}M_s\right) \\
&= \mathrm{E}[M]_t + 2\cdot \mathrm{E}\left(\int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}M_s\right) \\
&\overset{48}{=} \mathrm{E}[M]_t.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort

$$\mathrm{E}\Big([M]_t\Big) \;<\; \infty \quad \text{für alle } t\in\mathbb{T}.$$

2. Für jede vorhersagbare Menge $A \in \mathcal{P}$ und jedes $t \in \mathbb{T}$ lässt sich darüber hinaus zeigen, dass

$$\mu_M\left(A \cap \Big([0,t]\times\Omega\Big)\right) \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t \mathbb{1}_A(s,.)\,\mathrm{d}[M]_s\right) \tag{D.22}$$

gilt.

3. Aufgrund der bekannten Isometrie zwischen dem L^2 und dem $\mathcal{L}_M^2$ gilt für $X \in \mathcal{L}_M^2$ und $t \in \mathbb{T}$

$$\mathrm{E}\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2 \;=\; \int_{[0,t]} X^2 \,\mathrm{d}\mu_M.$$

[45] $\mu_M(\{0\}\times\Omega) = 0$

[46] $(0,t]\times\Omega \in \mathcal{R}$

[47] gemäß (verallgemeinerter) Definition von $[M]$

[48] Der Prozess $\left(\int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{R}}$ ist ein Martingal, da M ein Martingal ist; somit sind die Erwartungswerte für alle $t \in \mathbb{T}$ gleich dem Erwartungswert für $t = 0$, der wiederum Null ist.

Ist X auf $[0,t]$ *beschränkt*, lässt sich mit Hilfe von (D.22) die sogenannte **Itō-Isometrie**

$$\mathrm{E}\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s\right)^2 \;=\; \mathrm{E}\left(\int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}[M]_s\right)$$

zeigen (siehe dazu auch Lemma C.12 für den Spezialfall des Wienerprozesses). Diese gilt ebenfalls für (allgemeine) $X \in \mathcal{L}_M^2$ und $t \in \mathbb{T}$, falls $\mathrm{E}\left(\int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}[M]_s\right) < \infty$ gilt.

- Mit Hilfe des quadratischen Variationsprozesses $[M]$ eines stetigen lokalen Martingals M mit beschränktem M_0 können diejenigen Prozesse $X \in \mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}}$ (siehe Definition D.25) charakterisiert werden, für die das Itō-Integral bezüglich M gebildet werden kann. Es gilt nämlich

$$\mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}} \;=\; \left\{X \text{ vorhersagbarer Prozess: } \mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}[M]_s < \infty\right) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{T}\right\} \tag{D.23}$$

Wird speziell ein Wienerprozess W betrachtet, so ist

$$\mathcal{L}_W^{2,\mathrm{loc}} \;=\; \left\{X \text{ vorhersagbarer Prozess: } \mathbb{P}\left(\int_0^t X_s^2 \,\mathrm{d}s < \infty\right) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{T}\right\}$$

(siehe dazu auch (C.5)).

- In der Literatur wird für ein lokales L^2-Martingal M teilweise auch der **vorhersagbare quadratische Variationsprozess**

$$\langle M\rangle \;=\; \Big(\langle M\rangle_t\Big)_{t\in\mathbb{T}}$$

verwendet („angle bracket process“ gegenüber dem „square bracket process“), der ein vorhersagbarer Prozess ist. Für *stetige* lokale L^2-Martingale stimmen beide Variationsprozesse überein.

- Analog zum quadratischen Variationsprozess für ein stetiges lokales Martingal M mit beschränktem Startwert lässt sich ein *Kovariationsprozess* für zwei stetige lokale Martingale M und N mit jeweils beschränkten Startwerten definieren:

Definition D.34 *Es seien $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ bzw. $N = (N_t)_{t\in\mathbb{T}}$ zwei stetige lokale Martingale mit beschränktem M_0 bzw. N_0. Dann heißt der Prozess*

$$[M,N] = \Big([M,N]_t\Big)_{t\in\mathbb{T}} \quad \textit{mit} \quad [M,N]_t \;:=\; \frac{1}{4}\Big([M+N]_t - [M-N]_t\Big)$$

der ***Kovariationsprozess*** *von M und N.*

Bemerkungen:

- Für zwei *reelle* Funktion $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ und eine endliche Zerlegung $\Pi^{[0,t]} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ mit $t_0 = 0$ und $t_n = t$ ($t \in \mathbb{T}, n \in \mathbb{N}$) lässt sich analog zu (D.14) die Kovariationssumme

$$S^{\Pi^{[0,t]}}(f,g) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big) \cdot \Big(g(t_i) - g(t_{i-1})\Big)$$

definieren. Da für zwei reelle Zahlen a, b

$$\frac{1}{4}\bigg((a+b)^2 - (a-b)^2\bigg) \;=\; \frac{1}{4}\bigg(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2\bigg) \;=\; a \cdot b$$

gilt, ist

$$\begin{aligned} S^{\Pi^{[0,t]}}(f,g) \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\Big(f(t_i) - f(t_{i-1})\Big)}_{a} \cdot \underbrace{\Big(g(t_i) - g(t_{i-1})\Big)}_{b} \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} \cdot \Bigg(\Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) + g(t_i) - g(t_{i-1})\Big)^2 \\ &\qquad - \Big(f(t_i) - f(t_{i-1}) - g(t_i) + g(t_{i-1})\Big)^2\Bigg) \\ &=\; \frac{1}{4}\bigg(S_2^{\Pi^{[0,t]}}(f+g) - S_2^{\Pi^{[0,t]}}(f-g)\bigg). \end{aligned}$$

- Aus (D.20) lässt sich dann folgende Eigenschaft des Kovariationsprozesses $[M,N]$ zweier stetiger lokaler Martingale M und N mit beschränkten Startwerten ableiten: Sei $\Big(\Pi_k^{[0,t]}\Big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reguläre Zerlegungsfolge mit $t \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$. Dann gilt für die Kovariation bezüglich dieser Zerlegungsfolge

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S^{\Pi_k^{[0,t]}}(M,N) \;&=\; \frac{1}{4} \cdot \bigg(\lim_{k\to\infty} S_2^{\Pi_k^{[0,t]}}(M+N) - \lim_{k\to\infty} S_2^{\Pi_k^{[0,t]}}(M-N)\bigg) \\ &=\; \frac{1}{4} \cdot \Big([M+N]_t - [M-N]_t\Big) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.} \end{aligned}$$

- Wegen $a \cdot b = \frac{1}{2}\Big((a+b)^2 - a^2 - b^2\Big)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt außerdem

$$[M,N] \;=\; \frac{1}{2}\bigg([M+N] - [M] - [N]\bigg) \tag{D.24}$$

für zwei stetige lokale Martingale M und N mit beschränkten Startwerten.

- Definition D.34 lässt sich auf càdlàg lokale L^2-Martingale M und N verallgemeinern. In Analogie zu Definition D.33 gilt außerdem für $t \in \mathbb{T}$

$$[M,N]_t \;=\; M_t \cdot N_t - M_0 \cdot N_0 - \int_0^t (M_-)_s \,\mathrm{d}N_s - \int_0^t (N_-)_s \,\mathrm{d}M_s$$

bzw. im Falle der Stetigkeit

$$[M,N]_t \ = \ M_t \cdot N_t - M_0 \cdot N_0 - \int_0^t M_s \,\mathrm{d}N_s - \int_0^t N_s \,\mathrm{d}M_s. \tag{D.25}$$

Dies lässt sich mit der verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel (siehe Abschnitt D.6) zeigen.

- Es gilt $[M] = [M,M]$.

- Der Kovariationsprozess $[M,N]$ ist von lokal beschränkter Variation, da er als Linearkombination von quadratischen Variationsprozessen[49] von lokal beschränkter Variation dargestellt werden kann. Somit kommt $[M,N]$ – ebenso wie quadratische Variationsprozesse – als Integrator eines stochatischen Riemann-Stieltjes-Integrals in Frage.

- Wird der Kovariationsprozess $[M,N]$ als Integrator eines stochastischen Riemann-Stieltjes-Integrals in der Form des Differentials $\mathrm{d}[M,N]_s$ verwendet, ist häufig auch die Schreibweise

  „$\mathrm{d}M_s \,\mathrm{d}N_s$“

  („Produkt“ von Differentialen) anzutreffen. Analog ist

  „$\mathrm{d}M_s \,\mathrm{d}M_s$“ bzw. „$(\mathrm{d}M_s)^2$“

  eine alternative Schreibweise für $\mathrm{d}[M]_s$, falls der quadratische Variationsprozess $[M]$ als Integrator verwendet wird.

- Da für den quadratischen Variationsprozess $[W]$ eines Wienerprozesses W

  $[W]_t \ = \ t$ für $t \in \mathbb{T}$

  gilt, wird dies häufig auch als „Rechenregel“

  „$\mathrm{d}W_t \,\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t$“

  geschrieben.

- Formal kann $[V] \equiv 0$ für den quadratischen Variationsprozess eines Prozesses V von lokal beschränkter Variation gesetzt werden. Dasselbe gilt für den Kovariationsprozess, falls wenigstens einer der beiden Prozesse ein Prozess von lokal beschränkter Variation ist. Dies führt beispielsweise im Zusammenhang mit dem Wienerprozess W zu den „Rechenregeln“

  „$\mathrm{d}W_t \,\mathrm{d}V_t = 0$“ und „$\mathrm{d}V_t \,\mathrm{d}V_t = 0$“.

  Insbesondere gilt dies für $\mathrm{d}V_t = \mathrm{d}t$.

[49] $M + N$ bzw. $M - N$ sind ebenfalls stetige lokale Martingale mit beschränktem Startwert; allgemein ist jede Linearkombination lokaler Martingale wiederum ein lokales Martingal, d.h., die Menge der lokalen Martingale bildet ebenso wie die Menge der Prozesse von lokal beschränkter Variation einen Vektorraum.

- Für zwei *unabhängige* Wienerprozesse $W^1 = (W_t^1)_{t\in\mathbb{T}}$ und $W^2 = (W_t^2)_{t\in\mathbb{T}}$ ergibt sich

$$\Big[W^1, W^2\Big] \;\equiv\; 0 \qquad \text{(d.h. „}\mathrm{d}W_t^1\,\mathrm{d}W_t^2 = 0\text{“)}, \tag{D.26}$$

denn bekanntlich ist für $t \in \mathbb{T}$

$$\Big[W^1\Big]_t \;=\; \Big[W^2\Big]_t \;=\; t$$

und $\frac{1}{2}(W^1+W^2)$ aufgrund der Unabhängigkeit von W^1 und W^2 wiederum ein Wienerprozess, so dass

$$\Big[W^1 + W^2\Big]_t \;=\; 2\cdot\Big[\tfrac{1}{2}(W^1 + W^2)\Big]_t \;=\; 2t$$

und somit wegen (D.24)

$$\Big[W^1, W^2\Big] \;=\; \frac{1}{2}\bigg(\Big[W^1 + W^2\Big] - \Big[W^1\Big] - \Big[W^2\Big]\bigg) \;\equiv\; 0$$

gilt.

D.6 Semimartingale und verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel

- Im Folgenden sei $\mathbb{T} := [0,T]$, $T > 0$, oder $\mathbb{T} := [0,\infty)$.

- Für einen stetigen Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit beschränktem Startwert X_0 kann gemäß den Ausführungen in Abschnitt D.4 sowohl ein Itō-Integral

  $$\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s$$

  bezüglich eines stetigen lokalen Martingals $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit beschränktem Startwert M_0 als auch gemäß den Ausführungen in Abschnitt D.5 ein stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral

  $$\int_0^t X_s \,\mathrm{d}V_s$$

  bezüglich eines stetigen Prozesses von lokal beschränkter Variation $V = (V_t)_{t\in\mathbb{T}}$ gebildet werden.

- Gemäß Satz D.32 sind diese beiden, als Integratoren geeigneten Prozessklassen in gewissem Sinn „disjunkt“. Es sind jedoch Prozesse denkbar, die sich additiv in ein lokales Martingal und in einen Prozess von lokal beschränkter Variation aufspalten lassen. Dies führt im Folgenden zum Begriff des *Semimartingals*, für das sich unmittelbar auch ein Integral bilden lässt:

Definition D.35 *Ein Prozess $S = (S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt ein* ***stetiges Semimartingal*** *mit Startwert S_0, wenn es ein stetiges lokales Martingal $M^{(0)} = \left(M_t^{(0)}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $M_0^{(0)} = 0$ und einen stetigen Prozess von lokal beschränkter Variation $V^{(0)} = \left(V_t^{(0)}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ mit $V_0^{(0)} = 0$ gibt, so dass*

$$\begin{aligned} S &= S_0 + M^{(0)} + V^{(0)}, \quad \textit{d.h.} \\ S_t &= S_0 + M_t^{(0)} + V_t^{(0)} \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{T} \end{aligned} \tag{D.27}$$

gilt. Der quadratische Variationsprozess $[S]$ von S ist definiert als

$$\left[S\right] := \left[M^{(0)}\right].$$

Ist außerdem $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ein stetiger Prozess mit beschränktem Startwert X_0, so bezeichnet für $t \in \mathbb{T}$

$$\int_0^t X_s \,\mathrm{d}S_s := \int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s^{(0)} + \int_0^t X_s \,\mathrm{d}V_s^{(0)} \tag{D.28}$$

das ***stochastische Integral von X bezüglich S****.*

Bemerkungen:

1. Die Darstellung (D.27) ist – bis auf fast sichere Gleichheit – eindeutig: Angenommen, $S_0 + \tilde{M}^{(0)} + \tilde{V}^{(0)}$ wäre eine alternative Darstellung von S. Dann ergibt sich

$$M^{(0)} + V^{(0)} \;=\; \tilde{M}^{(0)} + \tilde{V}^{(0)}.$$

Somit ist

$$M^{(0)} - \tilde{M}^{(0)} \;=\; \tilde{V}^{(0)} - V^{(0)}$$

ein stetiges lokales Martingal von lokal beschränkter Variation mit Startwert 0. Gemäß Satz D.32 ist dann $M^{(0)} - \tilde{M}^{(0)} = V^{(0)} - \tilde{V}^{(0)} \equiv 0$, d.h., die Darstellung ist eindeutig.

2. Der aus dem Integral bezüglich eines stetigen Semimartingals S gebildete Integralprozess

$$\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}S_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

(X ist dabei ein stetiger Prozess mit beschränktem Startwert) ist wieder ein Semimartingal: In (D.28) ist $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}M_s^{(0)}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ gemäß Satz D.30 ein stetiges lokales Martingal mit Startwert 0 sowie $\left(\int_0^t X_s \,\mathrm{d}V_s^{(0)}\right)_{t\in\mathbb{T}}$ gemäß Satz D.31 ein stetiger Prozess von lokal beschränkter Variation mit Startwert 0.

3. Für den quadratischen Variationsprozess $[S]$ eines stetigen Semimartingals $S = S_0 + M^{(0)} + V^{(0)}$ mit beschränktem Startwert S_0 (um die Existenz des Integrals $\int_0^t S_s \,\mathrm{d}S_s$ zu sichern) ergibt sich analog zu definition D.33 für $t \in \mathbb{T}$ (aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird $M = M^{(0)}$ und $V = V^{(0)}$ verwendet)

$$[S]_t \;=\; S_t^2 - S_0^2 - 2 \cdot \int_0^t S_s \,\mathrm{d}S_s \quad \text{bzw.} \quad \int_0^t S_s \,\mathrm{d}S_s \;=\; \frac{1}{2} \cdot \left(S_t^2 - S_0^2 - [S]_t\right),$$

denn

$$\begin{aligned}
\int_0^t S_s \,\mathrm{d}S_s \;&=\; \int_0^t S_s \,\mathrm{d}M_s + \int_0^t S_s \,\mathrm{d}V_s \\
&=\; \int_0^t (S_0 + M_s + V_s)\,\mathrm{d}M_s + \int_0^t (S_0 + M_s + V_s)\,\mathrm{d}V_s \\
&=\; \int_0^t S_0 \,\mathrm{d}M_s + \int_0^t M_s \,\mathrm{d}M_s + \int_0^t V_s \,\mathrm{d}M_s \\
&\quad + \int_0^t S_0 \,\mathrm{d}V_s + \int_0^t M_s \,\mathrm{d}V_s + \int_0^t V_s \,\mathrm{d}V_s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= S_0 \cdot (M_t - M_0) + \frac{1}{2}\left(M_t^2 - M_0^2 - [M]_t\right) + \int_0^t V_s \,\mathrm{d}M_s \\
&\quad + S_0 \cdot (V_t - V_0) + \int_0^t M_s \,\mathrm{d}V_s + \frac{1}{2}\left(V_t^2 - V_0^2\right) \\
&\overset{50}{=} S_0 \cdot (M_t + V_t) + \frac{1}{2}\left(M_t^2 + V_t^2 - [M]_t\right) + \int_0^t V_s \,\mathrm{d}M_s + \int_0^t M_s \,\mathrm{d}V_s \\
&\overset{51}{=} S_0 \cdot (M_t + V_t) + \frac{1}{2}\left(M_t^2 + V_t^2 - [M]_t\right) + M_t \cdot V_t \\
&= \frac{1}{2}\left(S_0^2 + M_t^2 + V_t^2 + 2S_0M_t + 2S_0V_t + 2M_tV_t\right) - \frac{1}{2}S_0^2 - \frac{1}{2}[M]_t \\
&= \frac{1}{2}\left((S_0 + M_t + V_t)^2 - S_0^2 - [M]_t\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(S_t^2 - S_0^2 - [S]_t\right)
\end{aligned}
$$

4. Wird in Definition D.35 der Prozess M allgemeiner als ein càdlàg lokales L^2-Martingal und der Prozess V als ein càdlàg Prozess von lokal beschränkter Variation vorausgesetzt, erhält man ein sogenanntes càdlàg Semimartingal (bzw. RCLL Semimartingal), für das analog zu obiger Vorgehensweise ebenfalls ein Integral gebildet werden kann. Im Folgenden beschränken wir uns jedoch auf die (einfacher zu handhabenden) stetigen Semimartingale.

5. Eine Vielzahl weiterer „angenehmer“ Eigenschaften von stetigen Semimartingalen erhält man mit Hilfe der folgenden verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel, die für den Spezialfall eines Wiener-Prozesses bereits aus Lemma C.15 bekannt ist.

Satz D.36 (Verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel) *Es seien V ein stetiger Prozess von lokal beschränkter Variation mit beschränktem Startwert V_0, M ein stetiges lokales Martingal mit beschränktem Startwert M_0 und $g \in C^{1,2}$ eine Funktion $g : (v,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto g(v,m) \in \mathbb{R}$ (d.h. bezüglich der ersten Komponente einmal, bezüglich der zweiten Komponente zweimal stetig differenzierbar). Dann gilt für $t \in \mathbb{T}$*

$$
g(V_t, M_t) = g(V_0, M_0) + \int_0^t g_v(V_s, M_s)\,\mathrm{d}V_s + \int_0^t g_m(V_s, M_s)\,\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_{mm}(V_s, M_s)\,\mathrm{d}[M]_s, \tag{D.29}
$$

[50] $M_0 = V_0 = 0$

[51] Gemäß (D.17) ist $\int_0^t V_s \,\mathrm{d}M_s + \int_0^t M_s \,\mathrm{d}V_s = M_tV_t - M_0V_0$. Hierbei ist allerdings noch zu klären, ob $\int_0^t V_s \,\mathrm{d}M_s$ sowohl als Itō- als auch als stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral denselben Wert besitzt. Die Antwort darauf findet sich in (D.30) als Anwendung der verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel.

wobei g_v, g_m und g_{mm} jeweils die partiellen Ableitungen nach der ersten und zweiten Komponente bezeichnen.

(Ohne Beweis)

Bemerkungen:

1. Die differentielle Schreibweise für die verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel ist

$$\mathrm{d}g(V_t, M_t) \;=\; g_v(V_t, M_t)\mathrm{d}V_t + g_m(V_t, M_t)\mathrm{d}M_t + \tfrac{1}{2} \cdot g_{mm}(V_t, M_t)\mathrm{d}[M]_t.$$

2. Die Integrale $\int_0^t g_v(V_s, M_s)\,\mathrm{d}V_s$ bzw. $\int_0^t g_{mm}(V_s, M_s)\,\mathrm{d}[M]_s$ sind dabei stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale, das Integral $\int_0^t g_m(V_s, M_s)\,\mathrm{d}M_s$ ist ein Itō-Integral.

3. Der Prozess

$$\Big(g(V_t, M_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$$

ist ein Semimartingal mit Startwert $g(V_0, M_0)$:

- Die Prozesse $\Big(g_v(V_t, M_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$, $\Big(g_m(V_t, M_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ und $\Big(g_{mm}(V_t, M_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ sind nach Voraussetzung stetig und außerdem auf jedem abgeschlossenen Intervall $[0, t]$, $t \in \mathbb{T}$, lokal beschränkt, da die Prozesse V und M nach Voraussetzung stetig mit beschränktem Startwert und somit lokal beschränkt sind.
- Folglich existieren die stochastischen Riemann-Stieltjes-Integrale $\int_0^t g_v(V_s, M_s)\,\mathrm{d}V_s$ sowie $\int_0^t g_{mm}(V_s, M_s)\,\mathrm{d}[M]_s$, und der Prozess

$$\left(\int_0^t g_v(V_s, M_s)\,\mathrm{d}V_s + \frac{1}{2}\int_0^t g_{mm}(V_s, M_s)\,\mathrm{d}[M]_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

ist somit wegen der 1. Bemerkung zu Satz D.31 stetig und von lokal beschränkter Variation mit dem Startwert 0.
- Da außerdem $\Big(g_m^2(V_t, M_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ stetig ist und somit

$$\int_0^t g_m^2(V_s, M_s)\,\mathrm{d}[M]_s$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ existiert, ist wegen (D.23)

$$\Big(g_m(V_t, M_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}} \;\in\; \mathcal{L}_M^{2,\mathrm{loc}},$$

d.h., das Integral $\int\limits_0^t g_m(V_s, M_s)\,\mathrm{d}M_s$ existiert. Darüber hinaus ist

$$\left(\int\limits_0^t g_m(V_s, M_s)\,\mathrm{d}M_s\right)_{t\in\mathbb{T}}$$

wegen der 1. Bemerkung zu Satz D.16 ein stetiges lokales Martingal mit dem Startwert 0.

Somit ist jeder Prozess, der sich durch eine durch die Funktion g beschriebene Transformation aus den Prozessen V und M ergibt, ein Semimartingal – so z.B. $(V_t \cdot M_t)_{t\in\mathbb{T}}$.

4. Die Anwendung der verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel auf $g : g(v,m) := v \cdot m$ ergibt wegen $g_v(v,m) = m$, $g_m(v,m) = v$ und $g_{mm}(v,m) = 0$ die sogenannte Regel der **partiellen Integration**

$$V_t \cdot M_t \;=\; V_0 \cdot M_0 + \int\limits_0^t M_s\,\mathrm{d}V_s + \int\limits_0^t V_s\,\mathrm{d}M_s \quad (t \in \mathbb{T}). \tag{D.30}$$

Dies entspricht – trotz des Auftretens des Itō-Integrals $\int\limits_0^t V_s\,\mathrm{d}M_s$ – der üblichen Rechenregel (D.17) für Riemann-Stieltjes-Integrale.

5. Die verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel kann auch auf die – insbesondere in der Finanzmathematik – wichtige Klasse der sogenannten **Exponentialprozesse** angewendet werden. Ein Prozess $E = (E_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt dabei ein Exponentialprozess, wenn es ein stetiges lokales Martingal $M = (M_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit beschränktem Startwert und eine reelle Zahl a gibt, so dass

$$E_t \;=\; \mathrm{e}^{a\cdot M_t - \frac{a^2}{2}\cdot[M]_t}$$

für $t \in \mathbb{T}$ gilt. Für den Fall des Wienerprozesses (d.h. $M = W$ und $[M]_t = t$) ist bereits aus Lemma 3.6 bekannt, dass E ein Martingal ist.

Die Anwendung der verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel mit $g(v,m) := \mathrm{e}^{a\cdot m - \frac{a^2}{2}\cdot v}$ und folglich $g_v(v,m) = -\frac{a^2}{2}\cdot g(v,m)$, $g_m(v,m) = a\cdot g(v,m)$ und $g_{mm}(v,m) = a^2\cdot g(v,m)$ ergibt

$$\begin{aligned}
E_t \;&=\; g\Big([M]_t, M_t\Big)\\
&= g\Big([M]_0, M_0\Big) + \int\limits_0^t g_v\Big([M]_s, M_s\Big)\,\mathrm{d}[M]_s + \int\limits_0^t g_m\Big([M]_s, M_s\Big)\,\mathrm{d}M_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t g_{mm}\Big([M]_s, M_s\Big)\,\mathrm{d}[M]_s\\
&= g\Big(0, M_0\Big) - \frac{a^2}{2}\cdot\int\limits_0^t g\Big([M]_s, M_s\Big)\,\mathrm{d}[M]_s + a\cdot\int\limits_0^t g\Big([M]_s, M_s\Big)\,\mathrm{d}M_s + \frac{a^2}{2}\cdot\int\limits_0^t g\Big([M]_s, M_s\Big)\,\mathrm{d}[M]_s
\end{aligned}$$

$$= g\Big(0, M_0\Big) + a \cdot \int\limits_0^t E_s \,\mathrm{d}M_s. \tag{D.31}$$

Somit ist ein Exponentialprozess nicht nur ein Semimartingal (was sich allein schon durch die Anwendbarkeit der verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formel ergibt), sondern sogar ein stetiges lokales Martingal mit beschränktem Startwert, da in der Semimartingal-Darstellung (D.31) kein stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral mehr auftritt und $E_0 = g(0, M_0) = \mathrm{e}^{a \cdot M_0}$ beschränkt ist.

Die differentielle Schreibweise von (D.31) liefert außerdem

$$\mathrm{d}E_t \;=\; a \cdot E_t \,\mathrm{d}M_t. \tag{D.32}$$

Somit ist E die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (D.32) (siehe dazu auch (3.16)). Die verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel ist demnach insbesondere dafür geeignet, Lösungen von stochastischen Differentialgleichungen zu überprüfen bzw. die zu einem Prozess gehörige stochastische Differentialgleichung überhaupt erst herzuleiten.

6. Die verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel lässt sich auch direkt für stetige Semimartingale angeben:

Satz D.37 (Verallgemeinerte Itō-Doeblin-Formel für Semimartingale)
Es seien $S = (S_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ein stetiges Semimartingal und $h \in C^2$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $h : s \in \mathbb{R} \mapsto h(s) \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $t \in \mathbb{T}$

$$h(S_t) = h(S_0) + \int\limits_0^t h'(S_s) \,\mathrm{d}S_s + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^t h''(S_s) \,\mathrm{d}[S]_s.$$

Beweis (nur für beschränkten Startwert S_0): Für die übliche Semimartingaldarstellung $S = S_0 + M^{(0)} + V^{(0)}$ ergibt sich direkt aus Satz D.36 mit $g(v, m) := h(v + m)$ (und somit $g_v(v, m) = h'(v + m)$, $g_m(v, m) = h'(v + m)$ sowie $g_{mm}(v, m) = h''(v + m)$) für $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned}
h(S_t) \quad &= \quad h\Big((S_0 + V^{(0)})_t + M_t^{(0)}\Big) \;=\; g\Big(S_0 + V_t^{(0)}, M_t^{(0)}\Big) \\
&\overset{(D.29)}{=} \quad g\Big(S_0 + V_t^{(0)}, M_t^{(0)}\Big) + \int\limits_0^t g_v\Big(S_0 + V_s^{(0)}, M_s^{(0)}\Big) \,\mathrm{d}\Big(S_0 + V_s^{(0)}\Big) \\
&\qquad + \int\limits_0^t g_m\Big(S_0 + V_s^{(0)}, M_s^{(0)}\Big) \,\mathrm{d}M_s^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^t g_{mm}\Big(S_0 + V_s^{(0)}, M_s^{(0)}\Big) \,\mathrm{d}\Big[M^{(0)}\Big]_s \\
&= \quad h(S_0) + \int\limits_0^t h'(S_s) \,\mathrm{d}\Big(S_0 + V_s^{(0)}\Big) + \int\limits_0^t h'(S_s) \,\mathrm{d}M_s^{(0)} + \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^t h''(S_s) \,\mathrm{d}\Big[S\Big]_s
\end{aligned}$$

$$= \quad h(S_0) + \int_0^t h'(S_s)\,\mathrm{d}S_s + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t h''(S_s)\,\mathrm{d}[S]_s. \tag{D.33}$$

■

Bemerkungen:

1. Differentielle Schreibweise: $\mathrm{d}h(S_t) \;=\; h'(S_t)\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2} \cdot h''(S_t)\mathrm{d}[S]_t$
2. Der Prozess $\Big(h(S_t)\Big)_{t\in\mathbb{T}}$ ist wiederum ein Semimartingal, d.h., Transformationen von Semimartingalen mittels zweimal stetig differenzierbarer Funktionen sind ebenfalls Semimartingale. Das Integral bezüglich S wird dabei – gemäß Definition D.35 – in ein Itō-Integral bezüglich $M^{(0)}$ und ein stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral bezüglich $V^{(0)}$ [52] aufgeteilt.
3. Ist S lediglich ein stetiger Prozess von lokal beschränkter Variation (d.h. $M^{(0)} \equiv 0$), so entfällt in (D.33) das Integral $\frac{1}{2} \cdot \int_0^t h''(S_s)\,\mathrm{d}[S]_s$. Dieser Ausdruck stellt somit einen weiteren Unterschied in den „Rechenregeln" für Itō-Integrale und stochastische Riemann-Stieltjes-Integrale dar.
4. Die verallgemeinerten Itō-Doeblin-Formeln lassen sich auch für den mehrdimensionalen Fall angeben:

Satz D.38 (Verallgemeinerte mehrdimensionale Itō-Doeblin-Formel) *Es seien $V^1, \ldots, V^m$ stetige Prozesse von lokal beschränkter Variation mit beschränkten Startwerten V_0^1, …, V_0^m sowie M^1, …, M^n stetige lokales Martingale mit beschränkten Startwerten $M_0^1, \ldots, M_0^n$ und g : $(v_1, \ldots, v_m, m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen g_{v_i} für $i = 1, \ldots, m$, g_{m_j} für $j = 1, \ldots, n$ und $g_{m_j m_k}$ für $j, k = 1, \ldots, n$. Dann gilt für $t \in \mathbb{T}$*

$$\begin{aligned} & g(V_t^1, \ldots, V_t^m, M_t^1, \ldots, M_t^n) \\ = \;& g(V_0^1, \ldots, V_0^m, M_0^1, \ldots, M_0^n) \\ & + \sum_{i=1}^m \int_0^t g_{v_i}(V_s^1, \ldots, V_s^m, M_s^1, \ldots, M_s^n)\,\mathrm{d}V_s^i \\ & + \sum_{j=1}^n \int_0^t g_{m_j}(V_s^1, \ldots, V_s^m, M_s^1, \ldots, M_s^n)\,\mathrm{d}M_s^j \\ & + \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^t g_{m_j m_k}(V_s^1, \ldots, V_s^m, M_s^1, \ldots, M_s^n)\,\mathrm{d}\Big[M^j, M^k\Big]_s \end{aligned}$$

(Ohne Beweis)

[52] Genau genommen handelt es sich um ein stochastisches Riemann-Stieltjes-Integral bezüglich $S_0 + V^{(0)}$. Ein Riemann-Stieltjes-Integral ist jedoch gemäß (D.16) auch bezüglich des Integrators linear, und das Integral bezüglich S_0 ergibt (betrachtet als „zeitlich konstanter" Prozess) Null.

Satz D.39 (Verallgemeinerte mehrdimensionale Itō-Doeblin-Formel für Semimartingale)
Es seien $S^1, \ldots, S^m$ stetige Semimartingale und $h : (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit stetigen partiellen Ableitungen h_{s_i} für $i = 1, \ldots, m$ und $h_{s_i s_k}$ für $i, k = 1, \ldots, m$. Dann gilt für $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} h(S_t^1, \ldots, S_t^m) &= h(S_0^1, \ldots, S_0^m) + \sum_{i=1}^m \int_0^t h_{s_i}(S_s^1, \ldots, S_s^m) \, \mathrm{d}S_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \int_0^t h_{s_i s_k}(S_s^1, \ldots, S_s^m) \, \mathrm{d}\Big[S^i, S^k\Big]_s \end{aligned}$$

(Ohne Beweis)

Bemerkungen:

1. Da Linearkombinationen von Semimartingalen wiederum Semimartingale sind (so wie dies auch für lokale Martingale sowie für Prozesse von lokal beschränkter Variation der Fall ist), ergeben obige mehrdimensionale Transformationen wiederum Semimartingale. Die Klasse der Semimartingale ist somit gegenüber Tranformationen mit zweifach stetig partiell integrierbaren Funktionen abgeschlossen. Insbesondere ist das *Produkt* von Semimartingalen wieder ein Semimartingal. In Verallgemeinerung von (D.30) und (D.25) ergibt sich für zwei Semimartingale S^1 und S^2 für $t \in \mathbb{T}$

$$S_t^1 \cdot S_t^2 = S_0^1 \cdot S_0^2 + \int_0^t S_s^1 \, \mathrm{d}S_s^2 + \int_0^t S_s^2 \, \mathrm{d}S_s^1 + \Big[S^1, S^2\Big]_t. \tag{D.34}$$

2. Die Anwendung von Satz D.39 auf m *unabhängige* Wienerprozesse $W^1, \ldots, W^m$ ergibt wegen

$$\Big[W^i, W^k\Big]_t = \begin{cases} t & \text{für } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $t \in \mathbb{T}$ und $i, k = 1, \ldots, m$ (siehe (D.26))

$$\begin{aligned} & h(W_t^1, \ldots, W_t^m) \\ = \; & h(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t h_{s_i}(W_s^1, \ldots, W_s^m) \, \mathrm{d}W_s^i + \frac{1}{2} \cdot \int_0^t \sum_{i=1}^m h_{s_i s_i}(W_s^1, \ldots, W_s^m) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Heinz Bauer, *Maß- und Integrationstheorie,* Verlag de Gruyter, 2. Auflage 1992

[2] Heinz Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie,* Verlag de Gruyter, 5. Auflage 2002

[3] Nicholas H. Bingham und Rüdiger Kiesel, *Risk Neutral Valuation,* Springer Verlag, 2. Auflage 2004

[4] Alison Etheridge, *A Course in Financial Calculus,* Cambridge University Press 2002

[5] Hans Föllmer und Alexander Schied, *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time,* Verlag de Gruyter, 3. Auflage 2011

[6] Albrecht Irle, *Finanzmathematik,* Teubner-Verlag, 2. Auflage 2003

[7] Jürgen Kremer, *Einführung in die Diskrete Finanzmathematik,* Springer-Verlag 2006

[8] Marek Musiela und Marek Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling,* Springer Verlag, 2. Auflage 2007

[9] René L. Schilling und Lothar Partzsch, *Brownian Motion,* Verlag de Gruyter 2012

[10] René L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales,* Cambridge University Press 2005

[11] Klaus D. Schmidt, *Maß und Wahrscheinlichkeit,* Springer-Verlag 2009

[12] Albert N. Shiryaev, *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory,* Verlag World Scientific 1999

[13] Jürgen Tietze, *Einführung in die Finanzmathematik,* Verlag Vieweg+Teubner, 10. Auflage 2010