Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. Z. Sasvári

14.1.05

Wiederholungsaufgaben zur Prüfung "Mathematik II,1"

1. Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = x^2 + e^x \sin 2x \quad (D)$$
   (a) Bestimmen Sie die Ordnung n und die Koeffizienten $a_i, i = 0, 1, 2 \ldots n$ so, daß (D) die folgende allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung besitzt:
$$y_h = C_1 e^{3x} + C_2 + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x \ .$$
   (b) Geben Sie einen Ansatz zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (D) an.

2. Man gebe die allgemeine Lösung für das lineare homogene Differentialgleichungssystem an:
$x' = x - 2y$
$y' = x + 4y.$

3. Gibt es holomorphe Funktionen f: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$, d. h. $Ref(z) = u(x, y)$, $Imf(z) = v(x, y)$ für die gilt:

   (a) $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$,
   (b) $u(x, y) = 3y^2 \cos x$?

   Bestimmen Sie ggf. die Funktionen f und ihre Ableitung f'.

4. Man berechne (auf möglichst einfache Weise) die folgenden Integrale

   (a) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{6 \sin z^3 - 6z^3 + z^9}{z^{16}} \, dz$, wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $z = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
   (b) $\displaystyle\oint_{\mathcal{C}} \frac{z^2 + z^{-2}}{(z-1)(z-4)} \, dz$, wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $z = 2 \cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
   (c) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (z + 4\overline{z}) \, dz$, wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $z = t^2 - it$, $0 \le t \le 2$.

5. Von den folgenden komplexen Reihen ist das Konvergenzgebiet und im Fall der Konvergenz der Wert der Reihe zu bestimmen:

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+i)^n (z-i)^n$

   (b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k \left(\frac{1}{z-1}\right)^{2k}$

6. Man bestimme die durch die Funktion $f : w = f(z) = \frac{4i-z}{z}$ vermittelten Bilder der reellen Achse $z = x + 0 \cdot i$ und der Kreise $|z-1| = 1$ und $|z-2| = 2$ in der w-Ebene! Wohin wird das von diesen 3 Kurven begrenzte Gebiet abgebildet? (Begründung!)

Lösungen:

1. (a) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - 12\lambda = 0$$

   DGL:

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} + 4y'' - 12y' = 0$$

   (b)

$$y_s = Ax^3 + Bx^2 + Cx + De^x \sin 2x + Ee^x \cos 2x$$

2. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3. (a) $v(x,y) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + D, \quad D \in \mathbb{R}$

   $f'(z) = (2-i)z$

   (b) Es existiert keine holomorphe Funktion mit dieser Eigenschaft.

4. (a)Residuensatz $\Rightarrow$
$$I = 2\pi i \frac{1}{20}$$
   (b)
$$I = 2\pi i (\frac{5}{16} - \frac{2}{3})$$
   (c)
$$I = 46 + \frac{8}{3} i$$

5. (a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n (z-i)^n = \frac{1}{1-(1+i)(z-i)}, \quad |z-i| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
   (b)
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k \, (\frac{1}{z-1})^{2k} = \cos \frac{1}{z-1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

6. Abbildung des Kreises$|z-1| = 1$ auf die Gerade $v = 2$ und des Kreises $|z-2| = 2$ auf die Gerade $v = 1$, Abbildung der reellen Achse auf die Gerade $u = -1 \Rightarrow$ z.B. Abbildung des Gebietes auf und zwischen den Kreisen in der oberen Halbebene auf den Streifen $\{w \in \mathbb{C} : w = u + iv, u \geq -1, 1 \leq v \leq 2\}$.