Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. Z. Sasvári 15. 02 2013

Klausur Mathematik II,1 für Studierende der Studiengänge Elektrotechnik, Informationssystemtechnik, Mechatronik, Regenerative Energiesysteme und Erziehungswissenschaften/ Elektrotechnik

Gruppe B

Name:	**Vorname:**
Immatrikulationsjahrgang:	**Studiengang:**
Matrikelnummer:	**Übungsgruppe:**

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Summe
erreichbare Punktzahl:	6	8	12	16+5	6	10	6+6	64+9
erreichte Punktzahl:								

Hinweise:

- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben mit Zusatzaufgaben. Mit den Zusatzaufgaben können Bonuspunkte erhalten werden.
- Der Lösungsweg der Aufgaben ist vollständig darzustellen. Durch die Angabe von Zwischenergebnissen muss der Algorithmus der Lösungsfindung ersichtlich sein.
- Verwendet werden dürfen alle schriftlichen Unterlagen, Formelsammlungen, Lehrbücher, ein von der Fakultät Elektrotechnik empfohlener Taschenrechner.

1. Von der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$-2y''' + 2y'' = x^2,$$

ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung zu bestimmen.
Geben Sie einen **Ansatz** zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung an.

Lösung der homogenen Differentialgleichung: $y_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3.$

Ansatz zur Bestimmung der speziellen Lösung: $y_p(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

Lösungsweg:

2. Ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ mit konstanten Koeffizienten für die Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$, $x \geq 0$, besitzt die Lösungen

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{4x} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wobei $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wie lautet das zugehörige Differentialgleichungssystem?

Differentialgleichungssystem : $\mathbf{y}' = A \cdot \mathbf{y}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsweg:

3. Gibt es holomorphe Funktionen f: $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ mit $z = x+iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$, d. h. $Ref(z) = u(x,y)$, $Imf(z) = v(x,y)$, für die gilt:

   (a) $v(x,y) = -x$
   (b) $u(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
   (c) $v(x,y) = x(1+2y)+1$

   Bestimmen Sie (im Fall der Existenz) die Funktionen f und ihre Ableitung f'.

(a)	$f(z) = -\mathrm{i}\,z + C,\ C \in \mathbb{R}$	$f'(z) = -\mathrm{i}$
(b)		
(c)	$f(z) = z^2 + \mathrm{i}z + C + \mathrm{i}$	$f'(z) = 2z + \mathrm{i},\ C \in \mathbb{R}$

Lösungsweg:

CRD

4. Die folgenden Integrale sind auf möglichst einfache Weise zu lösen. Tragen Sie die Lösung in das vorgesehene Feld ein und geben Sie den Lösungsweg an.

(a)

$$I = \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{z^{-1}}{(z-1)^2(z-4)}\, dz,$$ wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $z = 2 \cdot e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

$I = -\pi\,\mathrm{i}\frac{1}{18}$

Lösungsweg: Residuensatz

(b) $I = \oint\limits_{\mathcal{C}} e^{-|z|^2}\, dz$, wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $|z| = 1$.

$$\boxed{I = 0}$$

Lösungsweg: Integration mit Parameterdarstellung der Kurve $z = e^{\,\mathrm{i}t},\ 0 \le t \le 2\pi$.

(c) $I = \oint\limits_{\mathcal{C}} (z+1)^4 e^{-\frac{1}{z+1}}\, dz$, wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $|z+1| = 1$.

$$\boxed{I = -\pi\,\mathrm{i}\frac{1}{60}}$$

Lösungsweg: Residuensatz

(d) $I = \oint\limits_{\mathcal{C}} (z+1)^{-4} e^{-\frac{1}{z+1}}\, dz$, wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $|z+1| = 1$.

$$\boxed{I = 0}$$

Lösungsweg: Residuensatz

(e) (**Zusatz**) $I = \int\limits_{\mathcal{C}} \cosh(z^3) \cdot 3z^2 \, dz,$

wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $z = x + iy : \; x + 1 = 2\cos(t), \; y = \sin(t), \; 0 \leq t \leq \pi.$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{2}(e^{-1} - e + e^{-27} - e^{27})}$$

Lösungsweg: mit Hilfe einer Stammfunktion

5. Man gebe die Laurent-Reihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z+3)}$$

um die singuläre Stelle $z_0 = 0$ an und bestimme mit Hilfe der Reihenentwicklung das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0. In welchem Gebiet konvergiert diese Laurent-Reihe?

$$f(z) = \sum_{l=-3}^{\infty} (-1)^{l+1} \frac{1}{3^{l+4}} z^l$$

$Res(f, 0) = \frac{1}{27}$

6. In welches Gebiet der w-Ebene wird die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy,\ x \geq 0,\ \pi < y \leq 2\pi\}$$

mittels $w = f(z) = e^{-z}$ abgebildet?

Skizzieren und schraffieren Sie die Urbild- und Bildmengen.

Gleichungen der Randkurven von M	Bilder der Randkurven
1. $z = x + \mathrm{i}\pi,\ x \geq 0$	$w = u,\ u \in [-1, 0)$
2. $z = x + 2\,\mathrm{i}\pi,\ x \geq 0$	$w = u,\ u \in (0, 1]$
3. $z = 0 + \mathrm{i}y,\ \pi < y \leq 2\pi$	$w = e^{-\,\mathrm{i}y}$

Lösungsweg:

7. Die Fixpunkte der gebrochen linearen Abbildung

$$w = f(z) = \frac{(2-2i)z - 2i}{2z - 4i}$$

sind $z_1 = 1$ und $z_2 = i$. Der Punkt $z_3 = 2i$ wird in $w = \infty$ abgebildet.

(a) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

k	z_k	w_k
1	1	1
2	i	i
3	$2i$	∞
4	∞	1 − i
5	0	$\frac{1}{2}$

(b) Für die Abbildung f gebe man das Bild der reellen Achse an. (Skizze und Gleichung der Bildkurve mit Begründung)

$$(u - \frac{3}{4})^2 + (v + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{16}$$

(c) (**Zusatz**) Für die Abbildung f gebe man das Bild der imaginären Achse und das Bild des ersten Quadranten an. (Skizze mit Gleichungen der Randkurven)

Bild der imaginären Achse:

$$v = -2u + \mathrm{i}$$

Bild des ersten Quadranten:

$$\{z \in C : v \geq -2u + \mathrm{i} \text{ und } (u - \frac{3}{4})^2 + (v + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{5}{16}\}$$

Zu Aufgabe ....

Zu Aufgabe ....