Institut für Mathematische Stochastik

Prof. Dr. Z. Sasvári 05. 06. 2015

Klausur Mathematik II,1 für Studierende der Studiengänge Elektrotechnik, Informationssystemtechnik, Mechatronik, Regenerative Energiesysteme und Erziehungswissenschaften/ Elektrotechnik

Name:	**Vorname:**
Immatrikulationsjahrgang:	**Studiengang:**
Matrikelnummer:	**Übungsgruppe:**

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	Summe	Note
Punktzahl:	5+4	12	15+5	20+9	6	13	71+19	
erreichte Punktzahl:								

Hinweise:

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben mit Zusatzaufgaben. Mit den Zusatzaufgaben können Bonuspunkte erhalten werden.
- Der Lösungsweg der Aufgaben ist vollständig darzustellen. Durch die Angabe von Zwischenergebnissen muss der Algorithmus der Lösungsfindung ersichtlich sein.
  Reelle Teilergebnisse sind in der Form eines Bruches oder Funktionswertes von reellen Wurzel-, Exponential-, Logarithmusfunktionen oder trigonometrischen Funktionen (z.B. $\sqrt{3}$, $\sin(1)$) anzugeben, falls sie ohne Taschenrechner nicht weiter vereinfacht werden können.
- Verwendet werden dürfen alle schriftlichen Unterlagen, Formelsammlungen, Lehrbücher, ein von der Fakultät Elektrotechnik empfohlener Taschenrechner.

1. Gegeben ist die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$2y''' - 8y'' + 8y' = -2x.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Lösung der homogenen Differentialgleichung

(b) (**Zusatz**) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Ansatz zur Bestimmung der speziellen Lösung:

Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

2. (a) Begründen Sie, dass $\mathbf{y}_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung des homogenen linearen Differentialgleichungssystems an.

Lösungsweg:

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Methode Variation der Konstanten die allgemeine Lösung des inhomogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \sin x.$$

Lösungsweg:

3. (a) Für $z_1 = -1 + i$ und $z_2 = 1 - i$ berechne man (im Fall der Existenz) Real- und Imaginärteil von

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2), \quad \operatorname{Log}(4z_1 + 2z_2^2) \text{ und } \operatorname{Log}(z_1 + z_2).$$

Geben Sie zunächst Definitions- und Wertebereich der Funktion Log an.

Lösungsweg:

(b) Gibt es holomorphe Funktionen f: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$, d. h. $Ref(z) = u(x,y)$, $Imf(z) = v(x,y)$, für die gilt:

(i) $u(x,y) = \cos x \sinh y$

(ii) $u(x,y) = x^4 e^y$

Bestimmen Sie (im Fall der Existenz) die Funktionen f und ihre Ableitung f'.

(i)	$u(x,y) =$	$v(x,y) =$
	$f'(z) =$	
(ii)	$u(x,y) =$	$v(x,y) =$
	$f'(z) =$	

Lösungsweg:

(c) **(Zusatz)** Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z + \cos(Re(z))$. In welchen Punkten ist f differenzierbar? Ist f holomorph?

4. Die folgenden Integrale sind auf möglichst einfache Weise zu lösen. Tragen Sie die Lösungen in das vorgesehene Feld ein und geben Sie die Lösungswege an.

(a) $I = \int\limits_{\mathcal{C}} z^2 \, dz + \int\limits_{\mathcal{D}} z^2 \, dz,$

wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $\{z \in \mathbb{C} : z = t, \; -e^{\pi} \leq t \leq 1\}$
und $\mathcal{D}$ gegeben ist durch $\{z \in \mathbb{C} : z = e^t \cdot e^{it}, \; 0 \leq t \leq \pi\}$. Beide Kurven werden mathematisch positiv durchlaufen.

$I =$

Begründung:

(b) $I = \int\limits_{\mathcal{C}} \overline{z}^2 \, dz + \int\limits_{\mathcal{D}} \overline{z}^2 \, dz,$

wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $\{z \in \mathbb{C} : z = t, \ -e^{\pi} \leq t \leq 1\}$
und $\mathcal{D}$ gegeben ist durch $\{z \in \mathbb{C} : z = e^t \cdot e^{it}, \ 0 \leq t \leq \pi\}$. Beide Kurven werden mathematisch positiv durchlaufen.

$I =$

Lösungsweg:

(c) $I = \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{z^3}{(z^2-1)(z^2+1)}\, dz,$

wobei $\mathcal{C}$ gegeben ist durch $|z| = 2$ und positiv durchlaufen wird.

$I =$

Lösungsweg:

(d) **(Zusatz)**

$$I = \oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{1}{z(z-1)^2}\, dz,$$

wobei $\mathcal{C}$ positiv durchlaufen wird und gegeben ist durch $|z-a| = b$ mit $a \in \mathbb{R}, b > 0$. In Abhängigkeit von a und b kann I verschiedene Werte annehmen. Geben Sie in der Tabelle drei konkrete Beispiele für a und b mit den zugehörigen unterschiedlichen Integralwerten an, skizzieren Sie den zugehörigen Integrationsweg C und zeigen Sie in jedem Fall, wie der zugehörige Wert von I berechnet wird.

a	b	$I(a,b)$

Begründung:

5. Geben Sie die Laurent-Reihenentwicklung der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)}$$

um die singuläre Stelle $z_0 = -1$ an. Bestimmen Sie mit Hilfe der Reihenentwicklung das Residuum von $f(z)$ an der Stelle z_0.
In welchem Gebiet konvergiert diese Laurent-Reihe?

$Res(f, z_0) =$

Konvergenzgebiet:

Begründung:

6. (a) Gegeben sei die gebrochen lineare Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ mit

$$w = f(z) = \frac{-4z}{2-2z}.$$

Bestimmen Sie die Bilder von $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -1, z_4 = \mathrm{i}$ und $z_5 = -i$. Welcher Punkt z_6 wird in $w = -2$ abgebildet? Tragen Sie das Ergebnis in die folgende Tabelle ein.

k	z_k	w_k
1	0	
2	1	
3	-1	
4	i	
5	$-\mathrm{i}$	
6		-2

(b) Geben Sie für die Abbildung f das Bild der imaginären Achse an (Gleichung und Skizze). Begründen Sie Ihr Ergebnis mit wenigen Sätzen.

Bild der imaginären Achse:

Begründung:

(c) Für die Abbildung f gebe man das Bild des Inneren des Einheitskreises an (mit Skizze und mit Begründung).

Bild des Inneren des Einheitskreises:

Begründung:

Zu Aufgabe ....

Zu Aufgabe ....