7. Wo WIS19/20: Zusatzaufgaben

1. Untersuchen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden komplexen Potenzreihen ($z \in \mathbb{C}$):

   (a) $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

   (b) $f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

   (c) $f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   Bestimmen Sie eine offene Menge $D_i \subseteq \mathbb{C}$ so, dass f_i auf D_i holomorf ist und berechnen Sie $f_i'(z)$ für $z \in D_i$, $i = 1, 2, 3$. Wie oft ist f_i auf D_i differenzierbar, $i = 1, 2, 3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Für die folgende Potenzreihen bestimmen Sie den Konvergenzbereich und zeichnen Sie eine Skizze davon. Im Fall der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2z+1)^n$.

   (b) $-1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$.

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden komplexen Potenzreihen.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n^3 3^{n-1}}$. Untersuchen Sie die absolute Konvergenz in den Randpunkten.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$. Bestimmen Sie ein $z_0 \in \mathbb{C}$ so, dass die Reihe einfach aber nicht absolut konvergiert.

   (c) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, für welche die Reihe in (b) einfach aber nicht zwingend absolut konvergiert. *Hinweis: Beweisen Sie die Identität* $(1-z)\sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n} = z - \sum_{n=2}^{m} \frac{z^n}{n(n-1)} - \frac{z^{m+1}}{m}$, $z \neq 1$, *durch Induktion und beachten Sie dabei die Konvention* $\sum_{\emptyset} := 0$.