

9. Wo WIS19/20: Zusatzaufgaben

1. Zerlegen Sie die Funktion

$$\operatorname{Log}\left(z^2 + \frac{a^4}{z^2}\right), \quad a > 0$$

in eine Summe einfacher Funktionen der Form $\operatorname{Log}(z - z_0)$, $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

2. Seien $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Wie ist z^w definiert? Berechnen Sie i^i und bestimmen Sie $\operatorname{Re}(z^i)$ und $\operatorname{Im}(z^i)$.

3. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $(\operatorname{Log}(z))^2 = i$.

4. Finden Sie eine parametrische Darstellung in Polarkoordinaten des Ortes aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, so dass $\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(z)) = \operatorname{Re}(\operatorname{Log}(z))$ gilt. (Antwort: Logarithmische Spirale.)

5. Zeigen Sie, dass

- $\operatorname{Log}((1 + i)^2) = 2\operatorname{Log}(1 + i)$.
- $\operatorname{Log}((-1 + i)^2) \neq 2\operatorname{Log}(-1 + i)$.