Institut für Mathematische Stochastik
Prof. Dr. Z. Sasvári

Klausur Mathematik I,2 für Elektrotechniker und Informationssystemtechniker, Gruppe B

Hinweise:

- Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben.
- Der Lösungsweg der Aufgaben ist vollständig darzustellen, d.h. durch die Angabe von Zwischenergebnissen muss der Algorithmus der Lösungsfindung ersichtlich sein.
- Wir wünschen viel Erfolg!

1. Mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange bestimme man diejenigen Punkte der Niveaufläche
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>b>c>0$$
des Skalarfeldes
$$U(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},$$
die als Extremstellen der Funktion $|grad\, U|$ in Frage kommen. Der Nachweis, dass ein Extremum vorliegt, muss nicht erbracht werden.

(10 Punkte)

2. Für welchen Parameter $c \in \mathbb{R}$ ist das Feld
$$\vec{F}=2(3x^2y^2z+6y^2)\vec{e}_1+2(2x^3yz+cxy-8yz^3)\vec{e}_2+2(x^3y^2-cy^2z^2)\vec{e}_3$$
wirbelfrei? Berechnen Sie in diesem Fall das Linienintegral
$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r}$$
   (a) für den geradlinigen Weg C von $A(-\frac{1}{6},1,2)$ nach B(1,1,2).
   (b) für den geschlossenen Weg C entlang des Einheitskreises in der $x-y$-Ebene.

(10 Punkte)

3. Für die Punkte der Schnittkurve der Flächen
$A_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4(x-1)^2 + (y+2)^2\}$ und
$A_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = -8x + 4y + 24\}$ gilt $x^2 + (\frac{y}{2})^2 = 4$.

   (a) Berechnen Sie das Volumen des geschlossenen Körpers K, der durch die Flächen A_1 und A_2 begrenzt wird.

   (b) Berechnen Sie möglichst einfach den Fluss des Vektorfeldes $\vec{F} = \vec{r},\ \vec{r} = x\vec{e}_1 + 2y\vec{e}_2 + 3z\vec{e}_3$ durch die Oberfläche des Körpers K aus Aufgabe (a).

(10 Punkte)

4. Berechnen Sie das Oberflächenintegral 2. Art $\int\int_{(A)} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dA$ mit $\vec{F} = x\vec{e}_1 - y\vec{e}_2 + y^2\vec{e}_3$ für die Oberfläche

$$z = xy + x^2, \quad -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,$$

wobei für den Normalenvektor $\vec{n}$ auf der Fläche $\vec{n}\vec{e}_3 > 0$ gilt.

(8 Punkte)

5. (a) Die mit der Periode $T = 2\pi$ periodische und gerade Funktion f mit

$$f(x) = \cos\frac{x}{2}, \quad 0 \leq x < \pi$$

   ist in eine Fourierreihe zu entwickeln.

   (b) Für welche $c \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^c}{(3n)!}\ ?$$

(11 Punkte)

6. Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichungen

   (a)

$$(x^2 + x - 2)y' = 4y,$$

   (b)

$$y' - y\cos(x) = e^{\sin(x)}$$

(14 Punkte)