Exkurs: Dualität der linearen Programmierung

Wir betrachten zwei Optimierungsprobleme mit linearer Zielfunkt. und konvexen Nebenbed., sog. lineare Programme (LPs):

Das primale Problem:

$$(P) \begin{cases} \min.\ c^T x & \text{über } x \in \mathbb{R}^m \\ \text{unter NB:} & Ax \geq b \end{cases}$$

Das duale Problem:

$$(D) \begin{cases} \max\ b^T y & \text{über } y \in \mathbb{R}^n \\ \text{unter NB:} & A^T y = c \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

Bem: •) "=" und "≥" sind koordinatenweise zu verstehen

•) $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^m$

Terminologie / Definitionen:

•) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^m$ bzw. $y \in \mathbb{R}^n$ heißt zulässig für (P) bzw. (D) wenn er die jew. Nebenbed. erfüllt.

•) (P) bzw. (D) heißt zulässig wenn zumindest ein zul. Vektor x bzw. y existiert.

•) Ein $x \in \mathbb{R}^m$ bzw. $y \in \mathbb{R}^n$ heißt Optimallösung (OL) für (P) bzw. (D) wenn es zulässig ist und die Zielf. unter allen zul. Vektoren minimiert bzw. maximiert

•) Ein zulässiges Problem heißt <u>beschränkt</u> wenn eine OL existiert, sonst <u>unbeschränkt</u>.

Alle genannten Fälle können tatsächlich eintreten.

Beispiele:

- (P) nicht zulässig : $A = 0$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
- (P) unbeschränkt : $A = id$, $b = 0$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Verbindung zwischen (P) und (D): <u>Dualität</u>

<u>Thm (Schwache Dualität)</u>:

Für die LPs (P) und (D) gilt

a) (P) unbeschränkt $\Longrightarrow$ (D) nicht zulässig

b) (D) unbeschränkt $\Longrightarrow$ (P) nicht zulässig

c) Für alle zulässigen Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$b^T y \leq c^T x \qquad (*)$$

<u>Bew</u>: Wir zeigen c):

$$b^T y \underset{\substack{y \geq 0 \\ Ax \geq b}}{\leq} x^T A^T y \underset{A^T y = c}{=} x^T c \qquad \forall \text{ zul. } x, y$$

✓

Für b): Wenn (D) unbeschränkt ist, so kann die linke Seite von (*) beliebig groß gewählt werden $\Longrightarrow$ ...

... $\Rightarrow$ es kann kein zul. $x \in \mathbb{R}^n$ geben. ✓

a) folgt analog. $\square$

Darüber hinaus gilt:

Thm (Starke Dualität):

(P) ist zulässig und beschränkt genau dann wenn (D) zulässig und beschränkt ist. In diesem Fall existieren Optimall. x^* und y^* und es gilt

$$b^T y^* = c^T x^* .$$

Schwache + starke Dualität ergeben folgende Tabelle

(P) \ (D)	zulässig	nicht zulässig
zul.	(P)+(D) beschränkt, $b^T x^* = c^T y^*$	(P) unbeschränkt
nicht zul.	(D) unbeschränkt	möglich

Außerdem gilt noch folgende Auss.

Thm (Satz vom komplementären Schlupf): Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^m$ zulässige Vektoren, welche die Schlupfbed.

$$(**) \qquad (Ax - b)_i \cdot y_i = 0 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

erfüllen. Dann sind x und y Optimallösungen. Umgekehrt erfüllen alle Optimall. (**).

Bew (Satz vom kompl. Schlupf): UE

Für den Beweis der starken Dualität benötigen wir:

<u>Thm (Trennungssatz f. konvexe Menge)</u>: Sei X normierter Vektorraum und A, B nichtleere, konvexe Teilmenge mit $A \cap B = \emptyset$.
Wenn A abgeschlossen und B kompakt ist, so existiert stetiges, lineares Funktional $\ell : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\sup\{\ell(x) : x \in B\} < \inf\{\ell(x) : x \in A\}.$$

<u>Bem</u>: Man sagt "ℓ <u>trennt</u> A und B"

Bew: UE (endl.-dimensional)

<u>Beweis der starken Dualität</u>: Sei (P) zulässig + beschränkt $\Longrightarrow \exists$ Opt.l. x^*

Wir schreiben (a_i) für Zeilen von A, d.h. $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Setze $I := \{i \in \{1, .. n\} : a_i x^* = b_i\}$

.. jene Koordinaten wo Gleichheit in NB von (P) gilt.

Def $K := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \; ; \; \lambda_i \geq 0\}$

$\rightarrow$ "von $\{a_i\}_{i \in I}$ erzeugter Kegel

$\rightarrow$ K ist konvex!

<u>Fall I</u>: K ist nichtleer ($|I| > 0$).

Wir zeigen: $c \in K$ mittels Widerspruch.

Angenommen $c \notin K$, dann gilt $\{c\} \cap K = \emptyset$

$\{c\}$ .. konvex, kompakt, nichtleer

K .. konvex, abgeschl., nichtleer

Trennungssatz: $\exists\, d \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i^T d \geq 0 \quad \forall i \in I$

$c^T d < 0$

Betrachte $z = x^* + \varepsilon d$ für kleines $\varepsilon > 0$.

Es gilt:

- z erfüllt NB von (P), d.h. $Az \geq b$, denn
  - für $i \in I$ gilt $a_i^T z = a_i^T x^* + \varepsilon a_i^T d \geq$
    $\geq a_i^T x^* \geq b_i$ ✓
  - für $i \notin I$ gilt $a_i^T x^* > b_i$, d.h. $\exists\, \varepsilon > 0$ klein
    mit $a_i^T (x^* + \varepsilon d) \geq b_i$ ✓
- $c^T z = c^T x_* + \underbrace{\varepsilon c^T d}_{<0} < c^T x_*$

  d.h. z ist <u>besser</u> als Optimallösung x^* $\lightning$

$\Rightarrow c \in K$ falls $K \neq \emptyset$

<u>Fall II</u>: Wenn K leer ist ~~setze~~ wähle im obigen Beweis $d \in \mathbb{R}^m$ beliebig $\Rightarrow \lightning$

Insgesamt gilt also $K \neq \emptyset$ und $c \in K$ d.h.

$\exists\, (\lambda_i \geq 0)_{i \in I}$ sodaß

$$c = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$$

Setze $\lambda_j = 0$ für $j \notin I$ $\Longrightarrow$ $\underline{c = A^T\lambda \text{ und } \lambda \geq 0}$.

(NB für (D))

Außerdem gilt

$$\underline{b^T\lambda} = \sum_{i \in I} b_i \lambda_i \overset{\text{Def. } I}{=} \sum_{i \in I} (a_i^T x^*) \cdot \lambda_i =$$

$$= \sum_{i \in I} (\lambda_i a_i^T) x^* \underset{c = A^T\lambda}{=} \underline{c^T x^*}$$

$\Longrightarrow$ λ ist Optimallösung für (D) und (**) gilt

$\square$

Vervollständigung der Beweise der Fundamentalsätze I + II

- Wir nehmen an $|\Omega| < \infty$, d.h.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}, \quad \mathcal{F} = 2^\Omega, \quad p_i := \mathbb{P}(\omega_i) > 0$$

- Jedes ~~Maß~~ W-Maß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ lässt sich als Vektor $q \in \mathbb{R}^N$ darstellen mit $q \geq 0$ und $\sum_i q_i = 1$

  Es gilt $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \iff q_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

- Jede ZV $X : \Omega \to \mathbb{R}$ lässt sich ebenfalls als Vektor $x \in \mathbb{R}^N$ mit $x_i := X(\omega_i)$ darstellen

→ Erwartungswerte lassen sich als Vektorprodukte schreiben: $\mathbb{E}^P[X] = p^T x$

Wir definieren

$$A_0 := \left\{ \begin{pmatrix} (\xi \circ X)_T(\omega_1) \\ \vdots \\ (\xi \circ X)_T(\omega_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N : \xi \text{ vorhersehbar} \right\}$$

- A_0 ist die Menge aller mit Anfangskap. 0 erreichbaren Claims
- A_0 ist lineare Teilmenge (d.h. Unterraum) von $\mathbb{R}^N$, denn ξ, ξ' vorhersehbar $\Rightarrow \alpha\xi + \beta\xi'$ vorhers. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Wir setzen $M := \dim(A_0) + 1$ und fixieren

Basis $(a_1, a_2, \dots a_{n-1})$ von $\mathcal{A}_0$

- Jeder mit Anfangskap 0 erreichbare disk. Claim $\tilde{C}$ lässt sich mit $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ identif.

denn
$$\tilde{C} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i \qquad (\text{mit eind. } \lambda)$$

Wir erweitern um "nullte" Koordinate und def. Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

Jeder mit Anf.kap $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ erreichb. disk. Claim $\tilde{C}$ lässt sich mit $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ darstellen

den
$$A\lambda = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i}_{\in \mathcal{A}_0}$$

Beweis von FTAP I : d.h. $(NA) \Longleftrightarrow Q \neq \emptyset$

Wir betrachte duale LPs mit $b = 0 \in \mathbb{R}^N$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und A wie oben definiert, d.h.

$$(P) \begin{cases} \min \lambda_0 \\ \text{unter NB} \quad A\lambda \geq 0 \end{cases}$$

"Finde Strat. ohne Verlustrisiko mit min. Anfangskap."

$$(D) \begin{cases} \max & 0 \\ \text{unter NB} & A^T q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ & q \geq 0 \end{cases}$$

"Finde Martingalmaß"

Bem: (D) ist ~~eines~~ ein reines Zulässigkeitsproblem, da die Zielf. konstant ist.

Die Nebenbed. können wir als "q ist Martingalmaß" interpretieren, denn

$$A^T q = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 + \dots q_N \\ a_1^T q \\ \vdots \\ a_{n-1}^T q \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erste Zeile: $\sum_{i=1}^{N} q_i = 1 \implies \mathbb{Q}(\omega_i) := q_i$ ist Wahrsch.-Maß

Weitere Zeile: $x^T q = 0 \quad \forall x \in \mathcal{A}_0$

$$\iff E^{\mathbb{Q}}[(\xi \circ X)_T] = 0 \quad \forall \xi \text{ vorhersehb.}$$

$$\iff X \text{ ist } \mathbb{Q}\text{-Martingal}$$

$$\iff \mathbb{Q} \text{ Martingalmaß}$$

<u>Wir beweisen fehlende Richtung</u> "$\mathcal{Q} = \emptyset \implies \exists$ Arbitrage"

Sei $\mathcal{Q} = \emptyset$. ~~Ein~~ Zwei Fälle können eintreten:

- Es existiert kein zul. q für (D)
- Es existiert zul. q für (D) und $\exists i \in \{1, \dots N\}$ mit $q_i = 0$ (d.h. q ist Martingalmaß, aber nicht äquivalent zu p!)

St. Dual.

<u>Fall I</u> (D) unzulässig $\Longrightarrow$ (P) unzul. oder unbeschr.

(P) besitzt zul. Lösung $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ (P) unbeschr.

$\Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_0 < 0$ und $A\lambda \geq 0$

d.h. Strategie mit strikt negativen Anfangskap. und pos. Endwert $\Longrightarrow$ Arbitrage.

<u>Fall II</u>, Es existiert zul. $q \in \mathbb{R}^N$ für (D) mit $q_i = 0$

Ersetze $b = 0$ durch $b = e_i$ in (P) & (D).

Wir erhalten

$$(P) \begin{cases} \min \lambda_0 \\ \text{unter } A\lambda \geq e_i \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} \max q_i \\ \text{unter } A^T q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \qquad q \geq 0 \end{cases}$$

q ist noch immer zulässig für (D)

$\xRightarrow{\text{schwache Dual.}}$ für jedes zul. $\lambda \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\lambda_0 \leq q_i = 0$$

$$\text{und } A^T\lambda \geq e_i$$

$\Longrightarrow \exists$ Strat mit negativen Anfangskap und strikt pos. Endwert mit pos. Wahrsch. $P(\omega_i)$ ↯ $\square$

Beweis von FTAP II: Wir betrachten duale LPs mit $b \in \mathbb{R}^N$ beliebig und $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^M$.

Wir schreiben $B(\omega_i) := b_i$ für den zu b assoz. disk. Claim.

$$(P) \begin{cases} \min \lambda_0 \\ \text{unter } A\lambda \geq b \end{cases}$$

"Finde min. Anfangskap. λ_0 um Claim B zu super-replizieren"

$$(D) \begin{cases} \min b^T q \\ \text{unter } A^T q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ q \geq 0 \end{cases}$$

"Minimiere $E^Q[B] = b^T q$ über alle Martingalmaße Q"

Erste Beobachtung: Wegen (NA) hat (D) strikt zulässigen Vektor $q \in \mathbb{R}^N$ mit $q > 0$.

Wir zeigen fehlende Richtung: "(Markt unvollst.)" $\to$ $|Q| > 1$"

Wir nehmen an $\exists$ nicht repl. Claim $b \hat{=} B$.

Wir unterscheiden zwei Fälle, und zeigen: $\exists$ weitere zul. Vektor $q' \neq q$ für (D)

Fall I: (P) unzulässig

$\xrightarrow{\text{schw. Dual}}$ (D) unbeschränkt

$\rightarrow \exists$ unendl. viele zul. Vektoren für (D)

Fall II: (P) zulässig $\xrightarrow{\text{str. Dual}}$ $\exists$ Optimallösung λ^*.

Es existiert $i \in \{1, \ldots N\}$ mit $(A\lambda^*)_i > b_i$ (sonst wäre B erreichbar)

Es gilt $(AX^*)_i\, q_i \neq 0 \xRightarrow{\text{Schlupf}} q$ kann keine

Optimallösung von (D) sein $\Rightarrow \exists$ weiteres $q' \neq q$ zul.

für (D)

Wir haben gezeigt: $\exists\, q' \neq q$ zulässig für (D) d.h.

$\exists$ Martingalmaß $\mathbb{Q}' \neq \mathbb{Q}$

Existiert auch <u>äquivalentes</u> MM $\mathbb{Q}' \neq \mathbb{Q}$?

Setze $q'' = \frac{1}{2}(q' + q)$ .. auch zul. für (D)

Es gilt: $\mathbb{Q}''(\omega_i) = q_i''$ ist Martingalmaß

$\mathbb{Q}''(\omega_i) = \frac{1}{2}(\mathbb{Q}'(\omega_i) + \mathbb{Q}(\omega_i)) > 0$

$\Rightarrow \mathbb{Q}''$ ist EMM

$\mathbb{Q}'' \neq \mathbb{Q} \Rightarrow |Q| > 1$ $\square$