Finanzmathematik

Inhalt: Martin Keller-Ressel
Satz: Martin Haubold

7. Juli 2016

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung und Motivation

0.1 Zentrale Fragestellungen der Finanzmathematik

Bewertung von Derivaten und Absicherung gegen aus deren Handel entstehenden Risiken

Definition. Ein **Derivat** ist ein Finanzprodukt dessen Auszahlung sich vom Preis eines oder mehrerer gehandelter Basisgüter ("underlying") ableitet.

Beispiel.

- Recht in drei Monaten 125.000 Schweizer Franken gegen 100.000 EUR zu erhalten.
  (Basisgut: Wechselkurs EUR/CHF; Derivat: "Call-Option")
- Recht innerhalb des nächsten Jahres 100 Daimler-Aktien zum Preis von 60 EUR/Stück zu erwerben.
  (Basisgut: Daimler-Aktie; Derivat: "amerikanische Call-Option")
- Versicherung gegen Zahlungsausfall spanischer Staatsanleihen mit Laufzeit 5 Jahre. (Basisgut: Kurs spanischer Staatsanleihen; Derivat: CDS (credit default swap))
- Recht in den nächsten 6 Monaten 10.000 MWh elektrische Energie zum Preis von 30 EUR/MWh zu konsumieren mit Mindestabnahme von 50.000 MWh
  (Underlying: Strompreis; Derivat: "Swing-Option")

Auszahlungsvereinbahrungen für Derivate können sehr komplex sein ... zu komplex?
$\rightarrow$ Rolle von CDOs (Partizipationsrechte an gebündelten Kredite) in Finanzkrise.

Zugehörige Fragestellungen:

- Was ist der "faire Preis" für ein solches Derivat ("Pricing")?
  Fair: für Käufer und Verkäufer akzeptabel.
- Wie kann sich der Verkäufer gegen Risiken aus der eigenen Verpflichtung absichern ("Hedging")?

Zusammenstellung von Portfolios die nach Risiko- und Ertragsgesichtspunkten optimal sind. *Zugehörige Fragestellungen:*

- Wie vergleiche ich unsichere zukünftige Gewinn- und Verlustmöglichkeiten?
- Wie wäge ich Risiko gegen Ertrag ab?

- Was bedeutet optimal?

Bemerkung. Abgrenzung zur Versicherungsmathematik: Auszahlungen von Versicherungsverträgen hängen i.A. nicht von gehandelten Basisgütern ab.
Beispiel: Kfz-Versicherung, Hausratsversicherung
Mischformen möglich: z.B. fondsgebundene Lebensversicherung

Mathematische Werkzeuge dieser Vorlesung: Hauptsächlich Wahrscheinlichkeitstheorie, etwas lineare Algebra, Optimierung und Maßtheorie

0.2 Mathematisches Finanzmarktmodell

Wir betrachten:

- **W-Raum** $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
  später auch weitere W-Maße $\mathbb{Q}$ auf demselben Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$
  $\omega \in \Omega \ldots$ Elementarereignisse, Szenarien

- **Zeitachse** $\mathcal{I}$ entweder
  $\mathcal{I} = \{0, 1, \ldots, T\} \ldots$ diskretes Modell (T-Perioden-Modell)
  $\mathcal{I} = [0, T] \ldots$ zeitstetiges Modell
  $T \ldots$ Zeithorizont

Eine messbare Abbildung $(\Omega, \mathcal{I}) \to \mathbb{R}^d$, $(\omega, t) \mapsto S_t(\omega)$ heißt **stochastischer Prozess**.

Insbesondere ist

- $t \mapsto S_t(\omega)$ Funktion $\mathcal{I} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $(\forall \omega \in \Omega)$

- $\omega \mapsto S_t(\omega)$ Zufallsvariable $(\forall t \in \mathcal{I})$

beide Sichtweisen sind wichtig

Eine **Filtration** ist eine Folge $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{I}}$ von σ-Algebren $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ $\forall s \leq t, s, t \in \mathcal{I}$
Interpretation. $\mathcal{F}_t$ ist dem Marktteilnehmer zum Zeitpunkt t verfügbare Information, Ereignisse $A \in \mathcal{F}_t$ gelten als zum Zeitpunkt t bekannt.
Zusätzlich werden wir stets annehmen, dass $\mathcal{F}_0$ die triviale σ-Algebra ist.

Aus W-Theorie: Eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable X heißt **messbar** bzgl. $\mathcal{F}_t$, wenn für alle Borel-Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^d$

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$$

gilt.
Schreibweise. $X \in \mathcal{F}_t$ (Beachte: X ist kein Element von $\mathcal{F}_t$ im Sinne der Mengenlehre)

Definition. Ein stochastischer Prozess $S = (S_t)_{t \in \mathcal{I}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt **adaptiert** an $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{I}}$ wenn

$$S_t \in \mathcal{F}_t, \ \forall t \in \mathcal{I}$$

gilt.
Interpretation. Der Wert S_t ist zum Zeitpunkt t bekannt.

Da $\mathcal{F}_0$ trivial ist, ist für jeden adaptieren Prozess X der Anfangswert X_0 deterministisch.

Für das Finanzmarktmodell, modellieren wir d **Wertpapiere** (assets) als stochastische Prozesse

$$S^i : \Omega \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \ (\omega, t) \mapsto S_t^i(\omega)$$

$S_t^i \ldots$ Preis des i-ten Wertpapiers zum Zeitpunkt t, $i \in \{0, \ldots, d\}$
typischerweise ist S^i $(i \in \{1, \ldots, d\})$ eine Aktie (stock), könnte auch Wechselkurs, etc. sein.

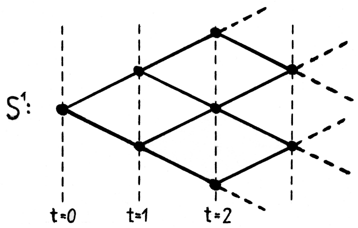
S^0 trägt Sonderrolle: Verrechnungskonto, "Numeraire", beschreibt die Verzinsung von nicht in Wertpapieren angelegtem Kapital.

Definition. Ein **Finanzmarktmodell** mit Zeitachse $\mathcal{I}$ ist gegeben durch

- einen filtrierten W-Raum $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{I}}, \mathbb{P}\right)$
- einen an $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ adaptierten, $\mathbb{R}_{\geq 0}^{d+1}$−wertigen stochastischen Prozess $\left(\bar{S}_t\right)_{t \in \mathcal{I}} = (S_t^0, S_t)_{t \in \mathcal{I}} = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)_{t \in \mathcal{I}}$

Beispiel.

- **Cox-Ross-Rubinstein-Modell** (zeitdiskret)
  $R_t \ldots$ Rendite der t-ten Periode, Zufallsvariable mit zwei möglichen Werten $b > a$
  definiere $S_t^0 := (1 + r)^t$ (Verzinsung mit konstanter Zinsrate r)
  und $S_t^1 := S_0^1 \cdot \prod_{n=1}^{t} (1 + R_n)$

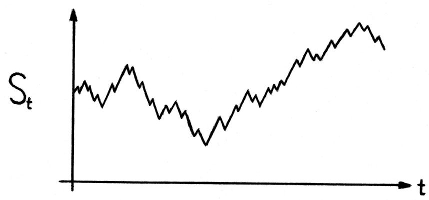


"rekombinierender Baum"

Ereignisse $\omega \mathrel{\widehat{=}}$ Pfade in diesem Baum ($\Rightarrow |\Omega| < \infty$)
$\Rightarrow$ zeitdiskretes Mehrperiodenmodell auf endlichem W-Raum

- **Samuelson-/ Black-Scholes-Modell** (zeitstetig)
  Brownsche Bewegung: Stochastischer Prozess $(B_t)_{t\geq 0}$ in stetiger Zeit, sodass
  - $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)), \forall t \geq s \geq 0$
  - $(B_t - B_s)$ ist unabhängig von $(B_s - B_r), \forall t \geq s \geq r \geq 0$
  - $t \mapsto B_t(\omega)$ ist stetig $\forall \omega \in A$ mit $\mathbb{P}[A] = 1$

  (genauere Behandlung gegen Ende des Semesters)
  $S_t^0 = \exp(rt)$
  $S_t^1 = \exp\Big((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\Big)$
  $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t \ldots$ Trend, $\sigma B_t \ldots$ stoch. Fluktuation)

  $|\Omega| = \infty$
  $\Rightarrow$ zeitstetiges Modell auf unendlichen W-Raum

$\Rightarrow$ große Unterschiede in mathematischer Handhabung

0.3 Anleihe und elementare Beispiele für Derivate

Hier betrachten wir nur ein Wertpapier $S_t = S_t^1$

Anleihe (bond), genauer Null-Kupon-Anleihe: Der Verkäufer einer Anleihe mit Endfälligkeit T und Nominale N verspricht dem Käufer zum Zeitpunkt T den Betrag von N Währungseinheiten zu zahlen.

Anleihen können auf dem Sekundärmarkt weiterverkauft werden.

Preis bei Erstauflage: $B(0, T)$
Preis bei Weiterverkauf: $B(t, T), (t \leq T)$

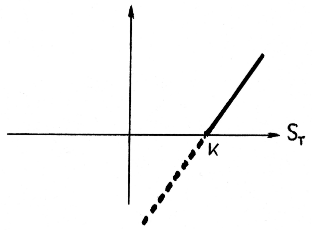
Wir normieren stets $N = 1 \;\Rightarrow\; B(T, T) = 1$

Anleihen können statt Bankkonto als Numeraire $S_t^0 = B(t,T)$ genutzt werden.

Es existieren auch Kupon-Anleihen bei denen zu Zeitpunkten $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ weitere Zahlungen (Kupons) erfolgen.

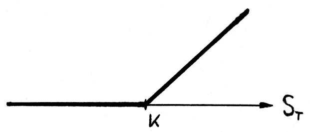
Terminvertrag (forward contract) aus Käufersicht: Vereinbarung zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt T eine Einheit des Basisgutes zum Preis K zu kaufen.
Bemerkung. Kaufverpflichtung!!

Auszahlungprofil: $S_T - K$
$T \ldots$ Fälligkeit (maturity)
$K \ldots$ Ausübungspreis (strike)



Europäische Call-Option: Recht zu bestimmten zukünftigem Zeitpunkt T eine Einheit des Basisgutes zum Preis K zu kaufen
Bemerkung. keine Kaufverpflichtung!!

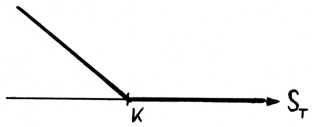
Auszahlungsprofil (zum Zeitpunkt T):
0 wenn $S_T \leq K$, (keine Ausübung)
$S_T - K$ wenn $S_T \geq K$, (Ausübung)
$= (S_T - K)_+$



Preis zum Zeitpunkt t: C_t

Europäische Put-Option: Recht zu bestimmten zukünftigem Zeitpunkt T eine Einheit des Basisgutes zum Preis K zu verkaufen
Bemerkung: keine Verkaufsverpflichtung!!

Auszahlungsprofil: $(K - S_T)_+$



Amerikanische Put-/Call-Option: Recht zu beliebigem zukünftigem Zeitpunkt $\tau \in [0, T]$ eine Einheit des Basisgutes zum Preis K zu verkaufen/kaufen.

Auszahlungsprofil (zum Zeitpunkt τ): $(K - S_\tau)_+$, $(S_\tau - K)_+$

Der optimale Ausübungszeitpunkt $\tau \in [0, T]$ muss als Lösung eines Optimierungsproblems bestimmt werden!

Preis zum Zeitpunkt t: C_t^{AM}, P_t^{AM}

0.4 Elementare Replikations- und Arbitrageargumente

Was können wir (mit elementaren Mitteln) über 'faire' Preise $F_t, P_t, C_t, B(t, T)$ aussagen?

Für die Überlegungen verwenden wir:

Replikationsprinzip: Zwei Investitionsstrategien mit den selben zukünftigen Auszahlungen haben heute den selben Wert.

No-Arbitrageprinzip: Ohne Kapitaleinsatz kann kein sicherer Gewinn ohne Risiko eines Verlustes erzielt werden.
Arbitrage…"zu gut um wahr zu sein"

Manchmal ist auch folgende schwächere Form des Replikationsprinzips nützlich:

Superreplikationsprinzip: Hat eine Investitionsstrategie in jedem Fall eine größere zukünftige Auszahlung als eine weitere Strategie, so hat sie auch heute den größeren Wert.

Lemma 0.1. *Für den Preis C_t des europäischen Calls gilt:*

$$(S_t - B(t, T)K)_+ \leq C_t \leq S_t$$

Beweis. untere Schranke(Widerspruchsbeweis): Angenommen es gilt

$$S_t - B(t,T)K - C_t = \epsilon > 0$$

dann können wir folgende Arbitragestrategie formulieren:

Portfolio	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Verkaufe Basisgut	$-S_t$	$-S_T$	$-S_T$
Kaufe Anleihe	$\epsilon + B(t,T)K$	$\frac{\epsilon}{B(t,T)} + K$	$\frac{\epsilon}{B(t,T)} + K$
Σ	0	$K - S_T + \frac{\epsilon}{B(t,T)} > 0$	$\frac{\epsilon}{B(t,T)} > 0$
	kein Anfangskapital	sicherer Gewinn	

$\Rightarrow$ Widerspruch zu No-Arbitrageprinzip
$\Rightarrow C_t \geq S_t - B(t,T)K$
da außerdem $C_t \geq 0$
$\Rightarrow (C_t \geq S_t - B(t,T)K)_+$

Obere Schranke: Übungsaufgabe.

□

Lemma 0.2. *(Put-Call-Parität) Für die Preise des Puts (P_t), Calls (C_t) und des Basisgutes (S_t) gilt:*

$$C_t - P_t = S_t - KB(t,T)$$

Beweis.
Wir benutzen das Replikationsprinzip und erstellen zwei Portfolios mit derselben Auszahlung.

Portfolio 1	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
Kaufe Call	C_t	0	$S_T - K$
Kaufe Anleihe	$KB(t,T)$	K	K
Σ	$C_t + KB(t,T)$	K	S_T

Portfolio 1	Wert in t	Wert in T	
		$S_T \leq K$	$S_T > K$
Kaufe Put	P_t	$K - S_T$	0
Kaufe Basisgut	S_t	S_T	S_T
Σ	$P_t + S_t$	K	S_T

Gleiche Auszahlung $\Rightarrow$ gleicher Wert in t

$\Rightarrow C_t + KB(t,T) = P_t + S_t$ $\square$

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Bedingte Erwartung und Martingal

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ W-Raum.
Wir definieren für $p \geq 1$

$$L^p(\mathbb{P}) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R}^d \mid X \; ist \; \mathcal{F} - messbar, \; \mathbb{E}\left[|X|^p\right] < \infty\}$$

$$\|X\|_p := \mathbb{E}\left[|X|^p\right]^{\frac{1}{p}} \ldots L^p - Norm$$

Die Räume $(L^p(\mathbb{P}), \|\cdot\|_p)$ sind vollständige, normierte Vektorräume, d.h. Banachräume.
Besonders wichtig: $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \ldots$ Raum der quadratintegrierbaren Zufallsvariablen, ist Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle X, Y \rangle_{L^2} = \mathbb{E}[XY]$

Es gilt:

- $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \subseteq L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für $p \geq q$
- $L^p(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \subseteq L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ für $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$

Definition. Seien $\mathbb{P}$, $\mathbb{Q}$ zwei W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann heißt $\mathbb{Q}$

- **äquivalent** zu $\mathbb{P}$ ($\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$), wenn

$$\mathbb{P}[A] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}[A] = 0, \; \forall A \in \mathcal{F}$$

- **absolutstetig** bzgl. $\mathbb{P}$ ($\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$), wenn

$$\mathbb{P}[A] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}[A] = 0, \; \forall A \in \mathcal{F}$$

- **singulär** zu $\mathbb{P}$ ($\mathbb{Q} \perp \mathbb{P}$), wenn $A \in \mathcal{F}$ existiert mit $\mathbb{Q}[A] = 0$ und $\mathbb{P}[A] = 1$

Bemerkung.

- Die Relationen $\sim$ und $\perp$ sind symmetrisch
- Es gilt: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \;\Leftrightarrow\; (\mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \;\wedge\; \mathbb{P} \ll \mathbb{Q})$

Theorem 1.1 (Satz von Radon-Nikodym)**.** *Seien $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$ W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$. Dann existiert eine Dichte $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sodass*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right], \; \forall X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$$

Die Dichte $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ ist $\mathbb{P}$-f.ü. eindeutig.

Korollar 1.2. *Seien $\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$ W-Maße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Dann existieren die Dichten $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ und es gilt*

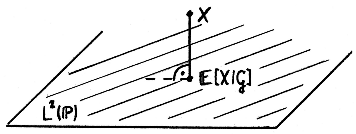
$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} > 0, \ \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} > 0 \ f.s \ und \ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \left(\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right)^{-1}$$

Frage. Gegeben sei eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine σ-Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.
Was ist die beste $\mathcal{G}$-messbare Schätzung für X, d.h. was ist die beste Prognose für X mit der durch $\mathcal{G}$ gegebenen Information?

Proposition 1.3. *Sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann exitiert eine fast sicher eindeutige Orthogonalprojektion von X auf $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, welche wir mit $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ bezeichnen.*
Es gilt:

a) $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ minimiert den Abstand von X zu $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, d.h.

$$\|X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\|_2 = \min_{Z \in L^2(\mathbb{P})} \|X - Z\|_2$$



b) $(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])$ ist orthogonal zu $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, d.h.

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])] = 0, \ \forall A \in \mathcal{G}$$

Beweis (Skizze). $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ist abgeschlossener Teilraum von Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Mit Sätzen der Funktionalanalysis folgt:

- $\exists$ Orthogonalprojektion Y von X auf $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
- Y ist eindeutig
- a) und b) gelten

□

wichtige Beobachtung. b) macht auch Sinn, wenn $X \in L^1(\mathbb{P})$

Definition. Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Die Zufallsvariable $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A(X)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A(Y)], \ \forall A \in \mathcal{G}$$

heißt **bedingte Erwartung** von X und wir schreiben $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] := Y$.

Bemerkung. Wieso existiert $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ und ist eindeutig? $\Rightarrow$ Übungsaufgabe.
Zwei Beweis-Methoden: Satz von Radon-Nikodym oder Satz von Hahn-Banach

Proposition 1.4 (Eigenschaften der bedingten Erwartung). *Seien $X,\ Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Dann gilt:*

a) (Linearität): $\mathbb{E}[\alpha X + Y|\mathcal{G}] = \alpha\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$, $(\alpha \in \mathbb{R})$

b) (Monotonie): $X \geq Y$ f.s. $\Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$

c) Sei $X \in \mathcal{G}$, so gilt $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
Ist außerdem $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ so gilt:

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$$

d) (Turmeigenschaft): Sei $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$$

e) Ist X unabhängig von $\mathcal{G}$ so gilt:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$$

Beweis. a) Übungsaufgabe.

b) Übungsaufgabe.

c) Nehme an $X \geq 0$, $Y \geq 0$, der allgemeine Fall folgt durch aufteilen $X = X^+ - X^-$ und Linearität. Approximiere X monoton z.B. mit $X_n = 2^{-n}\lfloor 2^n X \rfloor$.
Es gilt $X_n \uparrow X$ f.s. und

$$X_n \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \uparrow X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \quad f.s. \text{ (wegen } X, Y \geq 0)$$

Mit monotoner Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X_n \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X \cdot \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]]$$

Andererseits:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X_n \cdot \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right]\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{(X_n = k2^{-n})} \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-n} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{(X_n = k2^{-n})} Y\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A Y X_n\right] \\
&\overset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X Y\right] \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X \cdot \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right]\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X Y\right] \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left[XY \mid \mathcal{G}\right] &= X \cdot \mathbb{E}\left[Y \mid \mathcal{G}\right]
\end{aligned}
$$

d) Sei $A \in \mathcal{H}$ (und daher auch $A \in \mathcal{G}$). Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \cdot \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mid \mathcal{H}\right]\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \cdot \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A X\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \cdot \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{H}\right]\right] \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{H}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right] \mid \mathcal{H}\right] \quad f.s.
\end{aligned}
$$

e) Übungsaufgabe.

□

Proposition 1.5 (Maßwechsel bei bedingten Verteilungen)**.** *Auf dem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sei eine* σ*-Algebra* $\mathcal{G}, \subseteq \mathcal{F}$ *und ein äquivalentes Maß* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ *gegeben. Dann gilt:*

$$
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{G}\right] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{G}\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{G}\right]}
$$

für alle $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.

Der Beweis ist Übungsaufgabe.

Bemerkung. Wichtiger Spezialfall: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter W-Raum und $X \in \mathcal{F}_T$. Dann heißt

$$
M_t := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t\right]
$$

Maßwechselprozess zu $\mathbb{Q}$ und es gilt

$$
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{M_t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[X \cdot M_T \mid \mathcal{F}_t\right], \ \forall t \in [0, T]
$$

Mit der bedingten Erwartung können wir nun den Begriff des Martingals definieren. Wir verwenden Indexmenge/Zeitachse $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ (meist $\mathcal{I} = \mathbb{N},\ \mathcal{I} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ oder $\mathcal{I} = [0, T]$) und Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{I}}$.

Definition. Sei X ein bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{I}}$ adaptierter $\mathbb{R}$-wertiger stochastischer Prozess. X heißt **Martingal**, wenn gilt:

a) $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \infty,\ \forall t \in \mathcal{I}$

b) $X_s = \mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right],\ \forall s \leq t;\ s, t \in \mathcal{I}$

Interpretation. Gegeben die heutige Information $(\mathcal{F}_s)$ ist die beste Schätzung für X zum Zeitpunkt t $(\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right])$ der heutige Wert (X_s).

Definition. Falls in Punkt b) statt "="die Ungleichung "$\leq$"bzw. "$\geq$"gilt, so heißt X **Submartingal** bzw. **Supermartingal**.

Bemerkung.

- Für die Indexmenge $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ reicht es statt b) die Eigenschaft

$$b')\ X_{n-1} = \mathbb{E}\left[X_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  zu zeigen (wegen Turmeigenschaft).

- Mit Turmeigenschaft folgt auch
  - X Martingal $\Rightarrow t \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ ist konstant
  - X Submartingal $\Rightarrow t \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ ist steigend
  - X Supermartingal $\Rightarrow t \mapsto \mathbb{E}\left[X_t\right]$ ist fallend

  "Das Leben ist ein Supermartingal, die Erwartungen fallen mit der Zeit."

- Einen $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozess nennen wir Martingal, wenn jede Komponente ein Martingal ist.

Beispiel.

a) Seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\left[Y_n\right] = 0$. Definiere $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ dann ist S ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$, denn
   – S_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar $\Rightarrow$ adaptiert
   – $\mathbb{E}\left[|S_n|\right] \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[|Y_k|\right] < \infty \Rightarrow$ integrierbar
   – $\mathbb{E}\left[S_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{E}\left[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right] + S_{n-1} = \mathbb{E}\left[Y_n\right] + S_{n-1} = S_{n-1}$

b) Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_n] = 1$. Definiere $M_n = \prod_{k=1}^n Y_k$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ dann ist M ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$, denn

   - M_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar $\Rightarrow$ adaptiert
   - $\mathbb{E}[|M_n|] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[|Y_k|] < \infty \Rightarrow$ integrierbar
   - $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[Y_n \cdot M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{n-1}] \cdot M_{n-1} = \mathbb{E}[Y_n] \cdot M_{n-1}$ $= M_{n-1}$

c) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{I}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter W-Raum, $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ ein absolutstetiges W-Maß und

$$M_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle| \mathcal{F}_t\right], \quad t \in \mathcal{I}$$

der zugehörige Dichteprozess.
Dann ist M ein $\mathbb{P}$-Martingal, denn

   - $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle| \mathcal{F}_t\right] \in \mathcal{F}_t \Rightarrow M$ adaptiert
   - $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|M_t|] \le \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left|\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right| \middle| \mathcal{F}_t\right]\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left|\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|\right] < \infty \Rightarrow$ integrierbar
   - $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle| \mathcal{F}_t\right]\middle| \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle| \mathcal{F}_s\right] = M_s$

1.2 Anlagestrategien und stochastisches Integral

Wir wollen nun das Konzept einer Anlagestrategie mathematisch formalisieren.

Annahme.

- $\mathcal{I} = \mathbb{N}$, d.h diskretes Marktmodell
- Anlagestrategie bleibt zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n unverändert
- Eine Anlagestrategie kann nur auf Information aus der Vergangenheit basieren (kein 'in die Zukunft schauen' oder Insiderinformation)

Definition. Eine **Strategie** $\overline{\boldsymbol{\xi}}_n = \left(\xi_n^0, \boldsymbol{\xi}_n\right) = \left(\xi_n^0, \ldots, \xi_n^d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein $\mathbb{R}^{d+1}$-wertiger stochastischer Prozess für den

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}_n \in \mathcal{F}_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{$\star$}$$

gilt.

Bemerkung.

- Eigenschaft ($\star$) heißt **Vorhersehbarkeit** (vorhersehbar = predictable).
- ξ_n^i steht für die Anzahl der Wertpapiere S^i, die im Zeitraum $(n-1, n]$ gehalten werden.
- Negative Werte von ξ_n^i stehen für Leerverkäufe (short sale) und werden durch Lieferverpflichtung gegen Kaution (collateral) realisiert.
- Durch diese Definition ist $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ zum Zeitpunkt 0 nicht definiert, wir verwenden daher die Konvention $\overline{\boldsymbol{\xi}}_0 = \overline{\boldsymbol{\xi}}_1$

Definition. Der Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ wird der **Wertprozess** (WP)

$$V_n = \overline{\boldsymbol{\xi}}_n \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_n = \sum_{i=0}^{d} \xi_n^i S_n^i$$

zugeordnet. V_n entspricht dem Gesamtwert des nach der Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ gebildeten Portfolios zum Zeitpunkt n.

Im allgemeinen muss beim Umschichten des Portfolios zum Zeitpunkt n Geld zugeschossen oder abgezogen werden, und zwar

$$\delta_n := \underbrace{\overline{\boldsymbol{\xi}}_{n+1} \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_n}_{\substack{Wert\ nach \\ Umschichten}} - \underbrace{\overline{\boldsymbol{\xi}}_n \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_n}_{\substack{Wert\ unmittelbar \\ vor\ Umschichten}}$$

Definition. Eine Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ heißt **selbstfinanzierend** (SF), wenn

$$\delta_n = \overline{\boldsymbol{\xi}}_{n+1} \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_n - \overline{\boldsymbol{\xi}}_n \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Interpretation. Einer selbstfinanzierenden Strategie wird kein Geld zugeschossen oder abgezogen.

Ziel. Verbindung zwischen SF-Eigenschaft, diskretem stochastischem Integral und Martingaleigenschaft herstellen.

Lemma 1.6. *Sei $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ eine selbstfinanzierende Strategie. Dann lässt sich der Wertprozess V schreiben als*

$$V_n = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{\boldsymbol{\xi}}_k \cdot (\overline{\boldsymbol{S}}_k - \overline{\boldsymbol{S}}_{k-1}) \tag{$\circledast$}$$

Beweis.

$$V_n = V_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{\boldsymbol{\xi}}_k \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_k - \overline{\boldsymbol{\xi}}_{k-1} \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_{k-1} \right) \overset{SF}{=} V_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{\boldsymbol{\xi}}_k \cdot (\overline{\boldsymbol{S}}_k - \overline{\boldsymbol{S}}_{k-1})$$

$\square$

Definition. Sei X ein adaptierter und H ein vorhersehbarer stochastischer Prozess bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann heißt

$$(H \circ X)_n := \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

diskretes stochastisches Integral von H bzgl. X.

Bemerkung. Mit dieser Definition können wir ($\circledast$) kompakt schreiben als

$$V_n = V_0 + \left(\overline{\boldsymbol{\xi}} \circ \overline{\boldsymbol{S}} \right)_n$$

Definition. Ein stochastischer Prozess $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt **lokal beschränkt**, wenn jedes H_n eine beschränkte Zufallsvariable ist, d.h.

$$\exists B_n \in \mathbb{R} : \ |H_n| \leq B_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Theorem 1.7. *Sei X ein adaptierter stochastischer Prozess. Dann ist X ein Martingal genau dann, wenn auch das stochastische Integral $(H \circ X)$ für jeden lokal beschränkten vorhersehbaren Prozess H ein Martingal ist.*

Interpretation.

- stochastische Integration erhält Martingaleigenschaft
- Ein "fairer" Finanzmarkt lässt sich auch durch ausgeklügeltste Anlagestrategien nicht in einen "vorteilhaften" Finanzmarkt verwandeln.

Beweis. "$\Rightarrow$"

- Adaptiertheit von $(H \circ X)$ folgt aus Definition.
- Integrierbarkeit:

$$\begin{aligned} |H_n| \leq B_n \ &\Rightarrow \ \mathbb{E}\left[|H_n \cdot (X_n - X_{n-1})|\right] \leq B_n \cdot \mathbb{E}\left[|X_n| + |X_{n-1}|\right] < \infty \\ &\Rightarrow \ \mathbb{E}\left[(H \circ X)_n\right] < \infty \end{aligned}$$

- Martingaleigenschaft:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[(H \circ X)_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} H_k(X_k - X_{k-1}) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= (H \circ X)_{n-1} + \mathbb{E}[\underbrace{H_n}_{\in \mathcal{F}_{n-1}!}(X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= (H \circ X)_{n-1} + H_n \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[(X_n - X_{n-1}) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right]}_{=0} \\ &= (H \circ X)_{n-1} \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"
Fixiere $N \in \mathbb{N}$ und betrachte lokal beschränkten vorhersehbaren Prozess $H_n = \mathbf{1}_{\{n=N\}}$
Es gilt: $(H \circ X)_{N-1} = 0$ und $(H \circ X)_N = X_N - X_{N-1}$
Da $(H \circ X)$ Martingal folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\left[(H \circ X)_N \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_N - X_{N-1}) \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_N \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] - X_{N-1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ X_{N-1} = \mathbb{E}\left[X_N \middle| \mathcal{F}_{N-1}\right] \quad \forall N \in \mathbb{N}$ □

Zur Erinnerung: $(S^1, \dots, S^d) \dots$ Wertpapiere, $S^0 \dots$ Numeraire/Verrechnungskonto
Nicht in Wertpapieren investiertes Kapital kann auf Verrechnungskonto angelegt werden.

$\Rightarrow$ Vergleich von Vermögenswerten zu unterschiedlichen Zeitpunkten $k < n$ nur in Relation zu Numeraire sinnvoll

Definition.

- Der $\mathbb{R}^d$-wertige stochastische Prozess

$$\boldsymbol{X}_n = \left(X_n^1, \dots, X_n^d\right) = \left(\frac{S_n^1}{S_n^0}, \dots, \frac{S_n^d}{S_n^0}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

  heißt **diskontierter (/abgezinster) Wertpapierprozess**.

- Gegeben die Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ mit Wertprozess V, dann heißt

$$\widetilde{V}_n = \frac{V_n}{S_n^0}$$

  diskontierter Wertprozess zu $\overline{\boldsymbol{\xi}}$.

Lemma 1.8.

a) Der diskontierte Wertprozess einer selbstfinanzierenden Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}} = (\xi^0, \boldsymbol{\xi})$ *erfüllt*

$$\widetilde{V}_n = V_0 + (\boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{X})_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Sei $\boldsymbol{\xi}$ *ein* $\mathbb{R}^d$*-wertiger vorhersehbarer Prozess. Dann ist* $\overline{\boldsymbol{\xi}} = (\xi^0, \boldsymbol{\xi})$ *eine selbstfinanzierende Strategie genau dann, wenn*

$$\xi_n^0 = V_0 + (\boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{X})_n - \boldsymbol{\xi}_n \cdot \boldsymbol{X}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Interpretation. Wenn wir mit diskontierten Größen arbeiten ist es nicht nötig ξ^0 anzugeben. Stattdessen reicht es $\boldsymbol{\xi}$ und das Anfangskapital V_0 anzugeben.

Beweis.

a)

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_n &= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\widetilde{V}_k - \widetilde{V}_{k-1}\right) \\
&= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\overline{\boldsymbol{\xi}}_k \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_k}{S_k^0} - \frac{\overline{\boldsymbol{\xi}}_{k-1} \cdot \overline{\boldsymbol{S}}_{k-1}}{S_{k-1}^0}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{SF}{=} V_0 + \sum_{k=1}^{n} \overline{\boldsymbol{\xi}}_k \cdot \left(\frac{\overline{\boldsymbol{S}}_k}{S_k^0} - \frac{\overline{\boldsymbol{S}}_{k-1}}{S_{k-1}^0} \right) \\
&= V_0 + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_k \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_{k-1}) \\
&= V_0 + (\boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{X})_n
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\delta_n =& \xi_{n+1}^0 S_n^0 - \xi_n^0 S_n^0 + \boldsymbol{\xi}_{n+1} \cdot \boldsymbol{S}_{n+1} - \boldsymbol{\xi}_n \cdot \boldsymbol{S}_n \\
\Rightarrow \frac{\delta_n}{S_n^0} =& \xi_{n+1}^0 - \xi_n^0 + \boldsymbol{\xi}_{n+1} \cdot \boldsymbol{X}_{n+1} - \boldsymbol{\xi}_n \cdot \boldsymbol{X}_n
\end{aligned}
$$

" $\Rightarrow$ ":

$$
\frac{\delta_n}{S_n^0} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}
$$

Aufsummieren:

$$
\begin{aligned}
0 =& \xi_{n+1}^0 - \xi_0^0 - \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\xi}_k \cdot (\boldsymbol{X}_k - \boldsymbol{X}_{k-1}) \\
& + \boldsymbol{\xi}_{n+1} \cdot \boldsymbol{X}_{n+1} - \boldsymbol{\xi}_0 \cdot \boldsymbol{X}_0 \\
\Rightarrow \xi_{n+1}^0 =& V_0 + (\boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{X})_{n+1} - \boldsymbol{\xi}_{n+1} \cdot \boldsymbol{X}_{n+1}
\end{aligned}
$$

" $\Leftarrow$ ":

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta_n}{S_n^0} =& \boldsymbol{\xi}_{n+1} \cdot (\boldsymbol{X}_{n+1} - \boldsymbol{X}_n) + \boldsymbol{\xi}_n \cdot \boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\xi}_{n+1} \cdot \boldsymbol{X}_{n+1} \\
& + \boldsymbol{\xi}_{n+1} \cdot \boldsymbol{X}_n - \boldsymbol{\xi}_n \cdot \boldsymbol{X}_n = 0
\end{aligned}
$$

□

Korollar 1.9. *Sei der diskontierte Wertpapierprozess* $\boldsymbol{X}$ *ein Martingal und* $\boldsymbol{\xi}$ *eine selbstfinanzierende Strategie. Dann ist auch der diskontierte Wertprozess*

$$
\widetilde{V}_n = V_0 + (\boldsymbol{\xi} \circ \boldsymbol{X})_n
$$

ein Martingal.

Korollar 1.10. *Sei* X *ein adaptierter stochastischer Prozess. Wenn für jeden lokal* *beschränkten vorhersehbaren Prozess H*

$$\mathbb{E}\left[(H \circ X)_T\right] = 0$$

gilt, dann ist $(X_n)_{n\in\{0,\dots,T\}}$ *ein Martingal.*

1.3 Stoppzeiten und Martingalungleichungen

Definition. Eine Zufallsgröße $\tau : \Omega \to \mathcal{I} \cup \{+\infty\}$ heißt **Stoppzeit** bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{I}}$, wenn

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

Interpretation. Zu jedem Zeitpunkt t ist mit Sicherheit bekannt ob τ bereits vorbei ist ("$\tau \leq t$") oder noch nicht ("$\tau > t$").

Bemerkung.

- τ darf den Wert ∞ annehmen!
- Mit der Notation $t \wedge \tau := \min\{t, \tau\}$ können wir den gestoppten Prozess $X_{t\wedge\tau} : \omega \mapsto X_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega)$ definieren.
- Für f.s. endliche Stoppzeiten ($\mathbb{P}[\tau < \infty] = 1$) ist auch die Zufallsgröße $X_\tau : \omega \mapsto X_{\tau(\omega)}(\omega)$ wohldefiniert.
  Sie lässt sich (für $\mathcal{I} = \mathbb{N}_0$) als

  $$X_\tau = \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tau=t\}} \cdot X_t$$

  schreiben.

Ab jetzt sei $\mathcal{I} = \mathbb{N}$

Theorem 1.11 (Optionales Stoppen)**.** *Sei X ein Martingal und* τ *eine Stoppzeit bzgl. einer Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{I}}$*. Dann ist auch der gestoppte Prozess* $X_{t\wedge\tau}$ *ein Martingal bzgl.* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{I}}$*.*

Beweis ist Übungsaufgabe. *Anwendung.* Betrachte Wette auf unabhängige faire Münzwürfe:

$$Y := \begin{cases} +1, & \text{mit W-keit } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{mit W-keit } \frac{1}{2} \end{cases}$$

laufender Gewinn: $S_t = \sum_{i=0}^{t} Y_i$
natürliche Filtration: $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_0, \dots, Y_t)$

Frage: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass S den Wert $+A$ vor dem Wert $-B$ erreicht?
Ansatz: Definiere Ereignis:

$$D := \{S \text{ erreicht } +A \text{ vor } -B\}$$

Definiere Stoppzeit:

$$\tau := \min\{t \in \mathbb{N}_0 : S_t = A \text{ oder } S_t = -B\}$$

Es gilt

$$\{\tau \leq t\} = \bigcup_{k=0}^{t} \underbrace{(\{S_k = A\} \cup \{S_k = -B\})}_{\in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

d.h. τ ist Stoppzeit.
Des weiteren ist S ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.
$\Rightarrow (S_{t\wedge\tau})$ ist $(\mathcal{F}_t)$-Martingal
$\Rightarrow \mathbb{E}[S_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}[S_{0\wedge\tau}] = \mathbb{E}[S_0] = 0$, $\forall t \geq 0$

Wir wollen $t \to \infty$ gehen lassen.
Definiere Ereignis:

$$\begin{aligned} E_k :=& \{Y_i = +1, \ \forall i \in \{k(A+B), \ldots, (k+1)(A+B)-1\}\} \\ &\widehat{=} (A+B) \text{ Gewinne hintereinander} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[E_k] = 2^{-(A+B)} \quad \text{(wg. Unabhängigkeit)}$$

Wenn E_k eintritt, dann gilt $\tau < k+1$

Umkehrung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau > k(A+B)] &= \mathbb{P}\left[E_0^c \cap E_1^c \cap \ldots \cap E_{k-1}^c\right] \\ &= (1 - \mathbb{P}[E_0])^k \quad \text{(wg. Unabhängigkeit)} \\ &= (1 - 2^{-(A+B)})^k \\ &\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{P}[\tau = \infty] \leq \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[\tau > k(A+B)] = 0 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}[\tau < \infty] = 1 \end{aligned}$$

Des weiteren $|S_{t\wedge\tau}| \leq \max(A,B)$
$\Rightarrow\ \mathbb{E}[S_\tau] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[S_{t\wedge\tau}] = 0$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_\tau] &= -B\cdot\mathbb{P}[S_\tau = -B] + A\cdot\mathbb{P}[S_\tau = A]\\ &= -B + (A+B)\cdot\mathbb{P}[S_\tau = A]\\ &= 0\\ \Rightarrow \mathbb{P}[S_\tau = A] &= \frac{B}{A+B}\end{aligned}$$

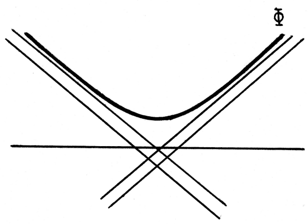
Die Wahrscheinlichkeit, dass S den Wert $+A$ vor $-B$ erreicht ist also $\frac{B}{A+B}$

Lemma 1.12 (Bedingte Jensen'sche Ungleichung)**.** *Sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $X \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\Phi(X) \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Dann gilt:*

$$\Phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \leq \mathbb{E}[\Phi(X)|\mathcal{G}] \quad f.s.$$

Beweis. Sei $\mathcal{L} := \{L(x) = ax+b :\ L(x) \leq \Phi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ (lineare Funktionen, die unter dem Graph von Φ liegen)
Für $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex gilt

$$\Phi(x) = \sup_{L\in\mathcal{L}} L(x)$$



Daher:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\Phi(X)|\mathcal{G}] &= \mathbb{E}\left[\sup_{L\in\mathcal{L}} L(X)\middle|\mathcal{G}\right]\\ &\geq \sup_{L\in\mathcal{L}} \mathbb{E}[L(X)|\mathcal{G}] \quad \text{(Monotonie)}\\ &= \sup_{L\in\mathcal{L}} L(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \quad \text{(Linearität)}\\ &= \Phi(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \quad \square\end{aligned}$$

Theorem 1.13. *Sei X ein Martingal, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und $\mathbb{E}[|\Phi(X_t)|] < \infty$ $t \in \mathcal{I}$. Dann ist $(\Phi(X_t))_{t\in\mathcal{I}}$ ein Submartingal.*

Beweis.
$$\Phi(X_{t-1}) \overset{Marting.}{=} \Phi(\mathbb{E}\left[X_t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]) \overset{Jensen}{\leq} \mathbb{E}\left[\Phi(X_t) \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

□

Bemerkung. Insbesondere gilt:
X Martingal $\Rightarrow |X|$ Submartingal
X Martingal, $\mathbb{E}\left[|X_t|^p\right] < \infty \Rightarrow |X|^p$ Submartingal $(p > 1)$

Theorem 1.14 (Doobsche Maximalungleichung)**.** *Sei X ein Martingal oder ein nicht-negatives Submartingal und $\lambda > 0$. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}\left[(\max_{k \leq t} |X_k|) \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_t|\right]}{\lambda}, \quad t \in \mathcal{I}$$

Bemerkung. Die Ungleichung liefert eine Abschätzung des laufenden Maximums durch den Endwert.

Beweis. Wir setzen $Y_t = |X_t|$, $Z_t = \max_{k \leq t} |X_t|$. Nach Theorem 1.13 ist Y ein nicht-negatives Submartingal. Definiere Stoppzeit $\tau = \min\{k : Y_k \geq \lambda\}$
Es gilt:
$$\mathbb{P}\left[Z_t \geq \lambda\right] = \mathbb{P}\left[\tau \leq t\right] \quad \text{(I)}$$

Des weiteren:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mathbf{1}_{(\tau \leq t)} &\leq Y_\tau \cdot \mathbf{1}_{(\tau \leq t)} \quad \text{(II)} \\ &= \sum_{k=0}^{t} Y_k \cdot \mathbf{1}_{(\tau = k)} \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_t \cdot \underbrace{\mathbf{1}_{(\tau=k)}}_{\in \mathcal{F}_k}] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[Y_t \middle| \mathcal{F}_k\right] \cdot \mathbf{1}_{(\tau=k)}\right] \quad \text{(III)} \\ &\geq \mathbb{E}\left[Y_k \cdot \mathbf{1}_{(\tau=k)}\right] \quad \text{für } k \leq t \end{aligned}$$

Wir folgern:

$$\begin{aligned}
\lambda \cdot \mathbb{P}[Z_t \geq \lambda] &\overset{(I)}{=} \lambda \cdot \mathbb{P}[\tau \leq t] \\
&= \mathbb{E}\left[\lambda \cdot \mathbf{1}_{(\tau \leq t)}\right] \\
&\overset{\text{(II)}}{=} \sum_{k=0}^{t} \mathbb{E}\left[Y_k \cdot \mathbf{1}_{(\tau = k)}\right] \\
&\overset{\text{(III)}}{\leq} \sum_{k=0}^{t} \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \mathbf{1}_{(\tau = k)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \sum_{k=0}^{t} \mathbf{1}_{(\tau = k)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \mathbb{P}[\tau \leq t]\right] \\
&\overset{\text{(I)}}{=} \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \mathbf{1}_{(Z_t \geq \lambda)}\right] \\
&\overset{(Y \geq 0)}{\leq} \mathbb{E}[Y_t]
\end{aligned}$$

□

Bemerkung. Als Nebenresultat erhalten wir aus dem Beweis

$$\lambda \cdot \mathbb{P}[Z_t \geq \lambda] \leq \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \mathbf{1}_{(Z_t \geq \lambda)}\right] \tag{$\circledast$}$$

Theorem 1.15 (Doob's L_p-Ungleichung)**.** *Sei X ein Martingal oder nichtnegatives Submartingal und $p > 1$. Dann gilt:*

$$\mathbb{E}\left[(\max_{k \leq t} |X_k|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \cdot \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

d.h.

$$\left\| \max_{k \leq t} |X_k| \right\|_p \leq \frac{p}{p-1} \left\| X_t \right\|_p$$

Bemerkung. $\|X\|_p := \mathbb{E}\left[|X|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ ist die Norm des Banachraums $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Wichtigster Fall: $p = 2$

Beweis. Setze $Y_t = |X_t|$, $Z_t = \max_{k \leq t} |X_t|$ wie im Beweis von Theorem 1.14.
Definiere: $Z_n := \max(Z_t, n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$
Es gilt:

$$z^p = p \cdot \int_0^z x^{p-1} dx = p \cdot \int_0^\infty x^{p-1} \mathbf{1}_{(x \leq z)} dx$$

Einsetzen von Z_n für z

$$Z_n^p = p \cdot \int_0^\infty x^{p-1} \mathbf{1}_{(x \leq Z_n)} dx$$

Bilden von Erwartungen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_n^p\right] &= p \cdot \int_0^\infty x^{p-1} \mathbb{P}\left[x \leq Z_n\right] dx \\
&\overset{\circledast}{\leq} p \cdot \int_0^\infty x^{p-2} \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \mathbf{1}_{(x \leq Z_n)}\right] dx \\
&= p \cdot \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \int_0^\infty x^{p-2} \mathbf{1}_{(x \leq Z_n)} dx\right] \\
&= p \cdot \mathbb{E}\left[Y_t \cdot \int_0^{Z_n} x^{p-2} dx\right] \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}\left[Y_t \cdot Z_n^{p-1}\right]
\end{aligned}$$

Höldersche Ungleichung:

$$\mathbb{E}\left[A \cdot B\right] \leq \left\|A\right\|_p \cdot \left\|B\right\|_q, \quad \text{für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[Z_n^p\right] \leq \frac{p}{p-1} \left\|Y_t\right\|_p \cdot \left\|Z_n^{p-1}\right\|_q$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p = q(p-1)$$

$$\Rightarrow \left\|Z_n^{p-1}\right\|_p = \mathbb{E}\left[Z_n^{q(p-1)}\right]^{\frac{1}{q}} = \mathbb{E}\left[Z_n^p\right]^{\frac{1}{q}} = \mathbb{E}\left[Z_n^p\right]^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[Z_n^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left\|Y_t\right\|_p$$

Lemma von Fatou liefert:

$$\left\|Z_n\right\|_p = \mathbb{E}\left[Z_n^p\right]^{\frac{1}{p}} = \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}\left[Z_n^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \left\|Y_t\right\|_p$$

$\square$

2 Bewertung und Absicherung in diskreten Märkten

Ziel. Arbitrage- und Replikationsprinzip in mathematische Sprache übersetzen und zur Bewertung von Derivaten nutzen.

Zentrale Resultate. I. und II. Hauptsatz der Bewertungstheorie.

Wir betrachten einen Finanzmarkt mit endlichem Zeithorizont T, d.h. $\mathcal{I} = \{0, 1, 2, \ldots, T\}$

2.1 Arbitrage und I. Hauptsatz

Definition. Eine selbstfinanzierende Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}} = (\xi^0, \boldsymbol{\xi})$ mit diskontiertem Wertprozess $\widetilde{V}$ heißt **Arbitrage** wenn gilt:

- $V_0 = 0$ (kein Anfangskapital)
- $\mathbb{P}\left[\widetilde{V}_T \geq 0\right] = 1$ (sicher kein Verlust)
- $\mathbb{P}\left[\widetilde{V}_T > 0\right] > 0$ (positiver Gewinn mit positiver W-keit)

Bemerkung.

- Falls $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ Arbitrage, so ist auch $c \cdot \overline{\boldsymbol{\xi}}$ $(c \geq 1)$ Arbitrage
  $\Rightarrow$ beliebiges hochskalieren von Gewinnen möglich
- Es spielt keine Rolle ob in der Definition der diskontierte oder undiskontierte Wertprozess verwendet wird
- Ist $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ Arbitrage unter $\mathbb{P}$, so auch unter jedem W-Maß $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$.
- Arbitragestrategien sind "zu gut um wahr zu sein".
  Ein realistisches Finanzmarktmodell sollte keine Arbitrage erlauben, d.h. arbitragefrei sein.
- Gemäß den Überlegungen aus dem letzten Kapitel werden wir auch $\boldsymbol{\xi}$ als Arbitragestrategie bezeichnen, da ja ξ^0 durch die Forderung $V_0 = 0$ und die Eigenschaft der Selbstfinanziertheit eindeutig festgelegt ist.

Definition. Gegeben sei ein Finanzmarktmodell auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Ein W-Maß $\mathbb{Q}$ heißt **äquivalentes Martingalmaß** (EMM) wenn

- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ gilt und
- $\mathbf{X}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist

Wir schreiben

$$\mathcal{Q} := \{\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \text{ ist EMM}\}$$

für die Menge aller EMMs.

Interpretation. $\mathbb{Q}$ ist subjektive Einschätzung eines Marktteilnehmers, der weder "bullish"($\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_s\right] > \mathbf{X}_s$) noch "bearish"($\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{X}_t | \mathcal{F}_s\right] < \mathbf{X}_s$) ist.
$\Rightarrow$ "risikoneutrales Maß"

Louis Bachelier (1900):
"L'espérance mathématique du spéculateur est nulle"

Theorem 2.1 (Erster Fundamentalsatz der Bewertungstheorie)**.** *Ein Finanzmarktmodell ist arbitragefrei genau dann, wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert*

Bemerkung.

- Kurzschreibweise: (NA) $\Leftrightarrow \;\mathcal{Q} \neq \varnothing$
- Wieso fundamental?
  - Löst Problem der Derivatebewertung
  - Arbitragefreiheit ist ökonomisch gut begründbar
  - Gilt in vielen Abwandlungen (stetige Zeit, Sprungprozesse,...)
    "Meta-Theorem"
- Ideengeschichte: Beweis für:
  - $|\Omega| < \infty$: Harrison, Pliska (1981)
  - $|\Omega| = \infty$ und $\mathcal{I}$ diskret: Dalang, Morton, Willinger (1990)
  - $|\Omega| = \infty$ und $\mathcal{I}$ stetig: Delbaen, Schachermayer (1998)

  Weitere Beiträge von Kreps

Beweis Teil 1. " $\Leftarrow$ ": Widerspruchsbeweis: Sei $\mathbb{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß und $\boldsymbol{\xi}$ eine Arbitragestrategie mit Wertprozess $\widetilde{V}_t = (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_t$ d.h.

$$\widetilde{V}_0 = 0$$
$$\mathbb{P}\left[\widetilde{V}_T \geq 0\right] = 1$$
$$\mathbb{P}\left[\widetilde{V}_T > 0\right] > 0$$

Wegen $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ gilt auch

$$\mathbb{Q}\left[\widetilde{V}_T \geq 0\right] = 1$$
$$\mathbb{Q}\left[\widetilde{V}_T > 0\right] > 0,$$

also folgt $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{V}_T\right] > 0$ und $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{V}_T^-\right] = 0 < \infty$.
Andererseits ist laut Theorem 1.7 $\widetilde{V}_t$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal, d.h.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{V}_T\right] = \widetilde{V}_0 = 0$$

$\Rightarrow$ Widerspruch

□

Die Rückrichtung beweisen wir nur für $|\Omega| < \infty$ d.h. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$

Notation/Vorüberlegung. Jede Zufallsvariable $X \to \Omega$ auf einem endlichen W-Raum können wir als Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\omega_1) \\ \vdots \\ X(\omega_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

darstellen.
Ebenso können wir jedes W-Maß $\mathbb{P}$ als Vektor

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}[\omega_1] \\ \vdots \\ \mathbb{P}[\omega_N] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

mit $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ und $p_i \geq 0$ darstellen.
Erwartungswerte lassen sich als Vektorprodukte schreiben:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X] = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \mathbb{P}[\omega_i] \cdot X(\omega_i)$$

Auf einem endlichen W-Raum ist jede Zufallsvariable beschränkt und jeder stochastische Prozess lokal beschränkt.
Für den Beweis benötigen wir noch zusätzlich folgenden **Trennungssatz**:

Theorem (Trennungssatz für konvexe Mengen)**.** *a) Sei X ein normierter Vektor-*

raum, $A \subseteq X$ nichtleer, abgeschlossen und konvex sowie $B \subseteq X$ nichtleer, kompakt und konvex mit $A \cap B = \varnothing$. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional $l : X \to \mathbb{R}$ mit

$$\sup\{l(x) : x \in B\} < \inf\{l(x) : x \in A\}$$

b) Sei X ein normierter Vektorraum, $A \subseteq X$ nichtleer und konvex sowie $B \subseteq X$ nichtleer, konvex und offen mit $A \cap B = \varnothing$. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional $l : X \to \mathbb{R}$ mit

$$l(x) < \inf\{l(x) : x \in A\} \quad \forall x \in B$$

Beweis Teil 2. " $\Rightarrow$ ": **Schritt 1:** Definiere

$$\mathcal{A}_0 := \{(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T : \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar}\}\,;$$

dies ist die Menge der ohne Anfangskapital mit einer selbstfinanzierenden Strategie erreichbaren ("attainable") diskontierten Portfoliowerte.
Für Ω endlich können wir $\mathcal{A}_0$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^N$ schreiben:

$$A_0 := \left\{ \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_N) \end{pmatrix} : \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar} \right\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

A_0 ist linearer Teilraum, da für $\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2$ vorhersehbar auch $c \cdot \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2$ vorhersehbar ist.
Definiere

$$B := \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N : y_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} y_i = 1 \right\}$$

B ist konvex und kompakt.

Schritt 2: Wir zeigen Behauptung I: (NA) $\Rightarrow\ A_0 \cap B = \varnothing$
Mittels Kontraposition: $A_0 \cap B \neq \varnothing \ \Rightarrow\ \neg$(NA)
Angenommen $\exists \mathbf{y} \in A_0 \cap B$, dann existiert eine selbstfinanzierende Strategie $\boldsymbol{\xi}$ mit Wertprozess $\mathbf{V}_t = (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_t$ und $\mathbf{V}_T = \mathbf{y} \in B$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= 0 \\ \mathbb{P}\left[\mathbf{V}_T \geq 0\right] &= 1 \\ \mathbb{P}\left[\mathbf{V}_T > 0\right] &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Es existiert Arbitrage $\Rightarrow$ Behauptung I richtig.

Schritt 3: Aus $A_0 \cap B = \varnothing$ folgern wir mit dem Trennungssatz die Existenz eines linearen Funktionals $l : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R};\ \mathbf{y} \mapsto \sum_{i=1}^N l_i \cdot y_i$ mit

$$\sup\{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A_0\} < \inf\{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} \qquad (\star)$$

Aus der Linearität von A_0 folgt $l(\mathbf{x}) = 0$ auf A_0. Andernfalls würde $\mathbf{x} \in A_0$ existieren mit $l(\mathbf{x}) \neq 0$. Aus der Linearität von A_0 linear folgt $c \cdot \mathbf{x} \in A_0$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und daher

$$l(c \cdot \mathbf{x}) = c \cdot l(\mathbf{x}) < \inf\{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch.
Insgesamt folgt aus $(\star)$ und A_0 linear also

$$0 < \inf\{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\}.$$

Setze nun

$$\mathbf{q} := \alpha \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} l(\mathbf{e_1}) \\ \vdots \\ l(\mathbf{e_N}) \end{pmatrix}}_{>0,\text{ da } \mathbf{e_i} \in B}$$

und wähle $\alpha \in (0, \infty)$ so dass $\sum_{i=1}^N q_i = 1$
$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}[\omega_i] := q_i$ definiert W-Maß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$!
Sei $\mathbf{y} \in A_0$,d.h.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_N) \end{pmatrix}$$

Dann gilt $\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} = \alpha \cdot l(\mathbf{y}) = 0$

$$\Rightarrow\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right] = \sum_{i=1}^N q_i y_i = \mathbf{q} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ ist Martingalmaß $\square$

2.2 Erreichbarkeit und II. Hauptsatz

Definition.

- Ein **Claim** C ist eine Zufallsvariable, d.h. eine messbare Abbildung $\Omega \to \mathbb{R}$, die wir als Auszahlung zum Zeitpunkt T interpretieren.
- Ein **europäisches Derivat** mit Auszahlungsprofil (payoff) $f : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ ist ein Claim der Form
$$C = f\left(S_T^0, \ldots, S_T^d\right)$$

Bemerkung.

- Jedes Derivat ist ein Claim. Der Begriff des Claims ist allgemeiner, denn C kann von Pfaden der Basisgüter $\left(S^0, \ldots, S^d\right)$ und weiteren zufälligen Ereignissen abhängen.
- Europäische Puts/Calls fallen unter den Begriff des europäischen Derivats.

Frage. Was ist der "faire" Preis d.h. der marktgerechte Preis Π_t von C zum Zeitpunkt $t \leq T$?

Ansatz I: Replikation

Definition. Sei C Claim in Finanzmarkt $\overline{\mathbf{S}} = \left(S^0, \ldots, S^d\right)$. Wenn eine selbstfinanzierende Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ mit Anfangskapital $w \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$w + \left(\overline{\boldsymbol{\xi}} \circ \overline{\mathbf{S}}\right)_T = C \tag{REP}$$

gilt, so heißt C **erreichbar** und $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ **Replikations-** oder **Hedgingstrategie**.

Bemerkung.

- Nach dem Replikationsprinzip folgt aus (REP)
$$\Pi_0 = w$$
$$\text{und } \Pi_t = w + \left(\overline{\boldsymbol{\xi}} \circ \overline{\mathbf{S}}\right)_t$$
- Im Allgemeinen ist es günstiger mit diskontierten Größen zu arbeiten:
$$\widetilde{C} = \frac{C}{S_T^0} \ldots \text{ diskontierter Claim}$$
$$\widetilde{\Pi}_t = \frac{\Pi_t}{S_t^0} \ldots \text{ diskontierte Preisprozess}$$

Dann ist (REP) äquivalent zu

$$w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T = \widetilde{C} \tag{REP'}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\Pi}_0 &= \Pi_0 = w \\ \widetilde{\Pi}_t &= w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_t \end{aligned}$$

- Hedgingaspekt: Perspektive des Verkäufers
  - → Erhält zum Zeitpunkt $t = 0$ Preis $\Pi_0 = w$
  - → Schuldet zum Zeitpunkt T Auszahlung $-C$
    ⇒ Risiko, da C ungewiss

  Hedging: Verkäufer kann nun zusätzlich $\Pi_0 = w$ in selbstfinanzierende Strategie $\boldsymbol{\xi}$ investieren.
  Wert des Gesamtportfolios zum Zeitpunkt T:

$$w + \left(\overline{\boldsymbol{\xi}} \circ \overline{\mathbf{X}}\right)_T - C = 0$$

  Risiko wurde vollständig eliminiert!
  Für erreichbare Claims ist perfektes Hedging möglich.

Definition. Ein Finanzmarkt heißt **nicht-redundant**, wenn aus $(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T = 0$ f.s. folgt, dass $\boldsymbol{\xi} = 0$ f.s.

Lemma 2.2. *Sei C ein erreichbarer Claim in einem gegebenen Finanzmarkt $\overline{\mathbf{S}}$.*

a) Wenn $\overline{\mathbf{S}}$ arbitragefrei ist, so ist der Preisprozess Π_t von C eindeutig.

b) Wenn $\overline{\mathbf{S}}$ zusätzlich nicht-redundant ist, so ist auch die Replikationsstrategie $\boldsymbol{\xi}$ eindeutig.

Beweis. Übung! □

Bemerkung. Im Fall von Lemma 2.2 (und Integrierbarkeit von C unter $\mathbb{Q}$) heißt die Gleichung

$$\widetilde{C} = w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T$$

Martingaldarstellung von $\widetilde{C}$ unter $\mathbb{Q}$, da $\widetilde{C}$ als Endwert des $\mathbb{Q}$-Martingals Π_t dargestellt wird.
Insbesondere folgt $w = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right]$ für alle EMMs $\mathbb{Q}$!

Definition. Ein Markt heißt **vollständig**, wenn jeder beschränkte diskontierte Claim erreichbar ist.

Theorem 2.3 (Zweiter Hauptsatz der Bewertungstheorie)**.** *Ein arbitragefreier Finanzmarkt ist genau dann vollständig, wenn es nur ein einziges äquivalentes Martingalmaß gibt (d.h. $|\mathcal{Q}| = 1$).*

Beweis. " $\Rightarrow$ " Mit Widerspruch: Nehme an, der Markt ist vollständig und es existieren zwei äquivalente Martingalmaße $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$ mit $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}' \Rightarrow \ \exists\, A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{Q}[A] \neq \mathbb{Q}'[A]$
Betrachte Claim $\widetilde{C} = \mathbf{1}_A$ mit

$$w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T = \widetilde{C}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[A] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right] \\ &= w = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}'}\left[w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}'}\left[\widetilde{C}\right] = \mathbb{Q}'[A]\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch

" $\Leftarrow$ " (unter Voraussetzung $|\Omega| < \infty$):
Schreibe

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}[\omega_1] \\ \vdots \\ \mathbb{Q}[\omega_N] \end{pmatrix}$$

für beliebiges EMM $\mathbb{Q}$.

$$\mathcal{A} = \{w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T : w \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar}\}$$

sei die Menge der mit beliebigem Anfangskapital w erreichbaren diskontierten Portfoliowerte.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_1) \\ \vdots \\ w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_N) \end{pmatrix} : w \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar} \right\} \subseteq \mathbb{R}^N$$

$\rightarrow$ Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}^N$ als linearer Unterraum.
Der Markt sei nun unvollständig, d.h. es existiert ein nicht erreichbarer diskontierter

Claim $\widetilde{C}$, schreibe

$$\widetilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \widetilde{C}(\omega_1) \\ \vdots \\ \widetilde{C}(\omega_N) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

mit $\{\widetilde{\mathbf{c}}\} \cap A = \varnothing$
Nach dem Trennungssatz existiert ein lineares Funktional $\mathbf{x} \mapsto l(\mathbf{x})$, sodass

$$l(\widetilde{\mathbf{c}}) < \inf \{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\}$$

Aus der Linearität von A folgt (analog zum Beweis von Theorem 2.1)

$$l(\mathbf{x}) = 0,\ \forall \mathbf{x} \in A \ \Rightarrow\ l(\widetilde{\mathbf{c}}) < 0 \ \Rightarrow\ \mathbf{l} \neq \mathbf{0}$$

Setze $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \epsilon \cdot \begin{pmatrix} l(e_1) \\ \vdots \\ l(e_N) \end{pmatrix}$ mit $\epsilon > 0$ klein, sodass

$$q_i' > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Es gilt:

- $\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}$ (wegen $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$)
- $\mathbf{x}$ aus A ist von der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\,(\omega_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\,(\omega_N) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad l(\mathbf{x}) &= w \cdot \sum_{i=1}^N l(e_i) + \sum_{i=1}^N l(e_i)\,(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\,(\omega_i) \\ &= 0 \quad \forall w \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N l(e_i) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^N q_i' = \sum_{i=1}^N q_i = 1$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{q}'$ definiert ein W-Maß $\mathbb{Q}' \sim \mathbb{P}$ mit $\mathbb{Q}'[\omega_i] = q_i$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}'}\left[(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right] &= \sum_{i=1}^{N} q_i' \left(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X}\right)_T (\omega_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} q_i \left(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X}\right)_T (\omega_i) + \epsilon \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} l(e_i) \left(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X}\right)_T (\omega_i)}_{=0} \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right] = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ nach Korollar 1.10 ist $\mathbb{Q}'$ weiteres Martingalmaß
$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ ist nicht eindeutig $\square$

Korollar 2.4. *In einem vollständigen Finanzmarkt ist der Preisprozess eines jeden Claims C eindeutig und gegeben durch*

$$\Pi_t = S_t^0 \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left.\frac{C}{S_T^0}\right| \mathcal{F}_t\right] \tag{+}$$

wobei $\mathbb{Q}$ das (eindeutige) EMM bezeichnet.
Ist der Markt nicht-redundant, so ist die Absicherungsstrategie $\boldsymbol{\xi}$ eindeutige Lösung von

$$\widetilde{\Pi}_n - \widetilde{\Pi}_{n-1} = \boldsymbol{\xi}_n \cdot (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_{n-1}), \quad \boldsymbol{\xi}_n \in \mathcal{F}_{n-1}$$

Bemerkung. Falls X eindimensional und $X_n - X_{n-1} \neq 0$ f.s.

$$\xi_n = \frac{\widetilde{\Pi}_n - \widetilde{\Pi}_{n-1}}{X_n - X_{n-1}} = \frac{\text{Preisänderung Claim}}{\text{Preisänderung Basisgut}}$$

(+) heißt **risiko-neutrale Bewertungsgleichung**

Wiederholung W-Theorie. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum. $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$ heißt **Atom** wenn für alle $B \subseteq A,\ B \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\mathbb{P}[B] = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A]$$

Insbesondere ist $\mathbb{P}$ konstant auf jedem Atom A.
Ein W-Raum, der sich als Vereinigung von N disjunkten Atomen $A_1, A_2, \ldots, A_N$ schreiben lässt kann mit einem N-Elementigen W-Raum $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ identifiziert werden.
Wir verwenden außerdem folgendes Lemma (ohne Beweis):

Lemma 2.5. *dim* $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \#\{\textit{Atome in } \Omega\}$

Theorem 2.6. *Sei* $\overline{\mathbf{S}} = \left(S_i^0, \ldots, S_i^d\right)_{i \in \mathcal{I}}$, $\mathcal{I} = \{0, \ldots, T\}$ *ein vollständiges Finanzmarkt-Modell über einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Dann hat* $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ *höchstens* $(1+d)^t$ *Atome.*

Insbesondere ist $|\Omega| < \infty$.

Beweis-Skizze. Beweis mittels Induktion nach $|\mathcal{I}|$
$|\mathcal{I}| = 2$, d.h. $\mathcal{I} = \{0,1\}$ (Einperiodenmodell)
Betrachte Menge $\mathcal{A} = \{(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T + w : w \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar}\}$ der erreichbaren diskontierten Claims.
Wegen $\mathcal{I} = \{0,1\}$ gilt:

$$w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T = w + \xi_1 \cdot (X_1 - X_0)$$

mit $\xi_1 \in \mathcal{F}_0$, d.h. ξ_1 ist deterministisch $\in \mathbb{R}^d$
$\Rightarrow \mathcal{A}$ ist höchstens $(d+1)$-dimensionaler linerarer Teilraum von $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\overset{vollst.}{\Longrightarrow} \mathcal{A} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \Rightarrow \dim L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \leq d+1$
$\Rightarrow \Omega$ hat höchstens $d+1$ Atome

Induktionsschritt: Angenommen die Behauptung gilt für $|\mathcal{I}| = n-1$. Betrachte $\mathcal{I} = \{0, 1, \ldots, n\}$.
Sei ξ Replikationsstrategie für Claim C. Es gilt:

$$\widetilde{C} = \underbrace{\mathbb{E}\left[\widetilde{C} \,\middle|\, \mathcal{F}_{n-1}\right]}_{=\widetilde{\Pi}_{n-1} \in \mathcal{F}_{n-1}} + \underbrace{\xi_n}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} \cdot (X_n - X_{n-1})$$

Wegen der Induktionsvorraussetzung sind $\widetilde{\Pi}_{n-1},\ \xi_n$ f.s. konstant auf jedem Atom A von $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, \mathbb{P})$. Sei nun $\mathbb{P}_A[B] := \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]}$ die Einschränkung von $\mathbb{P}$ auf A und $\Omega_A := \Omega \cap A$, $\mathcal{F}_n^A := \mathcal{F}_n \cap A$ die Einschränkungen von $\Omega,\ \mathcal{F}_n$ auf A, d.h. $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, \mathbb{P})$ hat $(d+1)^{n-1}$ Atome.
Mit der gleichen Argumentation wie für die Indunktionsvorraussetzung gilt

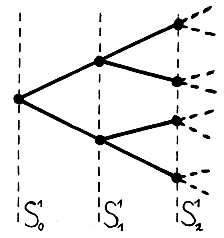
$$dim\ L^\infty\left(\Omega_A, \mathcal{F}_n^A, \mathbb{P}_A\right) = d+1$$

$\Rightarrow \left(\Omega_A, \mathcal{F}_n^A, \mathbb{P}_A\right)$ hat höchstens $d+1$ Atome, für alle Atome A von $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, \mathbb{P})$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\#\{Atome\ von\ (\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})\} =& \#\{Atome\ von\ (\Omega, \mathcal{F}_{n-1}, \mathbb{P})\} \\
& \times \#\{Atome\ von\ (\Omega_A, \mathcal{F}_n^A, \mathbb{P}_A)\} \\
\leq & (1+d)^{n-1} \cdot (1+d) = (1+d)^n.
\end{aligned}$$

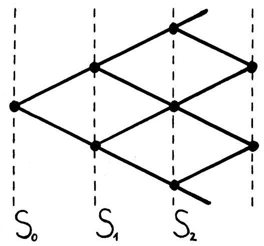
□

Interpretation. Für $d = 1$ (Ein Wertpapier) sind vollständige Marktmodelle im Wesentlichen Binärbäume:



Sobald sich an einer Verzweigung mehr als zwei Äste (mit jeweils positiven Wahrscheinlichkeiten) befinden, ist das Modell unvollständig.
Des weiteren ist jedes Finanzmarktmodell auf unendlichen W-Räumen mit diskreter Zeitachse $\mathcal{I} = \{0, \ldots, n\}$ unvollständig.

Das Binärbaummodell lässt sich vereinfachen, indem man den Baum **rekombinierend** wählt:



$\Rightarrow$ **Cox-Ross-Rubinsteinmodell** ist "das" diskrete vollständige Marktmodell.

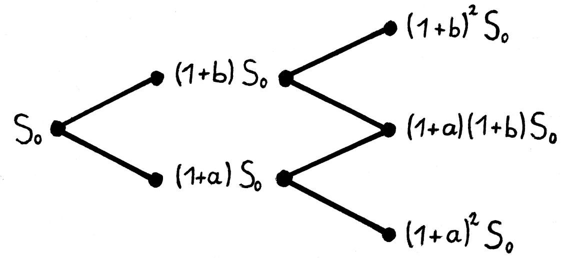
2.3 Das CRR-Modell

CRR = Cox-Ross-Rubinstein, auch Binomialmodell

Parameter: $r \ldots$ konstanter Zinssatz
$b \ldots$ Rendite bei Aufwärtsbewegung
$a \ldots$ Rendite bei Abwärtsbewegung

Wir nehmen an: $-1 < a < b$

Modell für ein Wertpapier $S = S^1$ und Numeraire S^0



Formalisierung. Setze $\Omega = \{+1, -1\}^T$ $(+1 \ldots \text{auf},\ -1 \ldots \text{ab})$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$
$\omega = (+1, +1, -1, +1, \ldots)$ repräsentiert Pfad im Baumdiagramm
$y_n(\omega) \ldots$ n-tes Element von ω
$R_n(\omega) \ldots$ Rendite in n-ter Marktperiode

$$R_n(\omega) = \begin{cases} b, & \text{wenn } y_n(\omega) = +1 \\ a, & \text{wenn } y_n(\omega) = -1 \end{cases}$$

Wertpapier: $S_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^n (1 + R_n)$

Numeraire: $S_n^0 = (1 + r)^n$

$$\Rightarrow \ X_n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + R_n}{1 + r}$$

Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n) \ldots$ natürliche Filtration
Außerdem mehmen wir an: $\mathbb{P}[\omega] > 0,\ \forall \omega \in \Omega$ und machen keine weiteren Annahmen an $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oder $\mathbb{R}$, insbesondere keine Unabhängigkeitsannahmen an die Renditen.

Theorem 2.7. *Das CRR-Model ist arbitragefrei genau dann, wenn $a < r < b$.*
In diesem Fall ist das Modell vollständig und das EMM $\mathbb{Q}$ eindeutig.
Die Renditen $(R_n)_{n\in\mathcal{I}}$ sind stochastisch unabhängig unter $\mathbb{Q}$ mit identischer Verteilung

$$\mathbb{Q}\left[R_n = b\right] = \frac{r-a}{b-a}$$
$$\mathbb{Q}\left[R_n = a\right] = \frac{b-r}{b-a}$$

Beweis. Sei $\mathbb{Q}$ W-Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$.
Setze $q_n := \mathbb{Q}\left[R_n = b \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_{n-1} \cdot \frac{1+R_n}{1+r} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] \\ &= X_{n-1} \cdot \left(\frac{1+b}{1+r} q_n + \frac{1+a}{1+r}(1-q_n)\right)\end{aligned}$$

D.h. $\mathbb{Q}$ Martingalmaß $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_n \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = X_{n-1}$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad \frac{1+b}{1+r} q_n + \frac{1+a}{1+r}(1-q_n) &= 1 \\ q_n(b-a) &= r-a \\ q_n &= \frac{r-a}{b-a}\end{aligned}$$

Insbesondere ist q_n deterministisch

$$\Rightarrow \quad \mathbb{Q}\left[R_n = b \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right] = \mathbb{Q}\left[R_n = b\right] = \frac{r-a}{b-a}$$

$\mathbb{Q}$ ist W-Maß und $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \;\Leftrightarrow\; q_n \in (0,1) \;\Leftrightarrow\; a < r < b$

Unabhängigkeit der Renditen unter $\mathbb{Q}$: Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[f(R_n)g(R_1,\ldots,R_{n-1})\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[f(R_n)g(R_1,\ldots,R_{n-1}) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[g(R_1,\ldots,R_{n-1}) \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[f(R_n) \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[g(R_1,\ldots,R_{n-1}) \cdot (f(b)q_n + f(a)(1-q_n))\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[g(R_1,\ldots,R_{n-1})\right] \cdot \left(f(b)\frac{r-a}{b-a} + f(a)\frac{b-r}{b-a}\right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[g(R_1,\ldots,R_{n-1})\right] \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[f(R_n)\right]\end{aligned}$$

$\Rightarrow R_n$ unabhängig von $\mathcal{F}_{n-1}$
$\Rightarrow$ $(R_1, \ldots, R_n)$ unabhängig. $\square$

Theorem 2.8. *Sei $C = h(S_1, \ldots, S_T)$ ein Derivat im CRR-Modell. Dann ist C erreichbar mit replizierender Strategie ξ und Preisprozess Π_n. Es gilt:*

a) Es existieren Funktionen $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \{0, \ldots, T\}$ sodass

$$\Pi_n = f_n(S_1, \ldots, S_n), \quad \forall n \in \{0, \ldots, T\}$$

und die Werte von f_n an den Knoten des rekombinierenden Baums sind rekursiv bestimmt durch

$$\begin{aligned} f_T(S_1, \ldots, S_T) &= h(S_1, \ldots, S_T) \\ f_{n-1}(S_1, \ldots, S_{n-1}) &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{r-a}{b-a} f_n^b(S_1, \ldots, S_{n-1}) + \frac{b-r}{b-a} f_n^a(S_1, \ldots, S_{n-1})\right) \end{aligned} \tag{REK}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_n^b(S_1, \ldots, S_{n-1}) &= f_n\left(S_1, \ldots, S_{n-1}, S_{n-1}(1+b)\right) \\ f_n^a(S_1, \ldots, S_{n-1}) &= f_n\left(S_1, \ldots, S_{n-1}, S_{n-1}(1+a)\right) \end{aligned}$$

b) Die replizierende Strategie ist gegeben durch

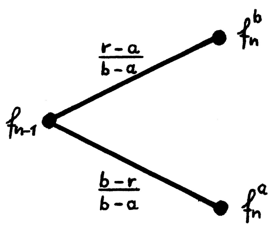
$$\xi_n = \Delta_n(S_1, \ldots, S_{n-1})$$

wobei

$$\Delta_n(S_1, \ldots, S_{n-1}) = \frac{f_n^b(S_1, \ldots, S_{n-1}) - f_n^a(S_1, \ldots, S_{n-1})}{S_{n-1}(b-a)}$$

Bemerkung.

- (REK) entspricht einem Rückwärtsdurchlauf des Baumdiagramms



wobei f_{n-1} als (gewichteter) Mittelwert von f_n^a und f_n^b unter $\mathbb{Q}$ bestimmt wird.

- Lässt sich am Computer auch für große Bäume effizient implementieren
- Für europäische Derivate ($C = h(S_T)$) ergeben sich Vereinfachungen, z.B. reicht es $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu wählen und $\Pi_n = f_n(S_n),\ \xi_n = \Delta_n(S_{n-1})$
- Die Formel für ξ_n wird auch als Delta-Hedge bezeichnet

$$\Delta_n = \frac{\text{Preisänderung Claim}}{\text{Preisänderung Underlying}}$$

- Weitere Interpretationen von Δ_n

$\Delta_n > 0$: Keine Leerverkäufe im Replikations-Portfolio. Preisänderung des Claims hat selbes Vorzeichen wie Preisänderung des Wertpapiers

$\Delta_n < 0$: Leerverkäufe im Replikations-Portfolio. Preisänderung des Claims hat entgegengesetztes Vorzeichen zu Preisänderung des Wertpapiers

$\Delta_n \approx 0$: Preisänderungen des Claims sind klein im Verhältnis zum Wertpapier. Kaum Investitionen in Wertpapier zur Replikation notwendig

2.4 Unvollständige Märkte

In unvollständigen Märkten existieren Claims, die nicht erreichbar sind
$\Rightarrow$ Replikationsprinzip nicht anwendbar

Alternativ verwenden wir:

Arbitrageprinzip: Wir betrachten das Finanzmarktmodell $\overline{\mathbf{S}} = \left(S^0, S^1, \ldots, S^d\right)$ und Claims $(C^1, \ldots, C^M)$ mit Preisprozessen $(\Pi^1, \ldots, \Pi^M)$.

Annahme. Auch unter Investition in Claims $C^1, \ldots, C^M$ darf keine Arbitrage entstehen, d.h. erweiterter Finanzmarkt

$$\left(S^0, S^1, \ldots, S^d, \Pi^1, \ldots, \Pi^M\right)$$

ist ebenfalls arbitragefrei.

Sub-/Superreplikationprinzip: Betrachte Claim C
Eine selbstfinanzierende Strategie $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \left(\xi^0, \boldsymbol{\xi}\right)$ heißt **Superreplikationsstrategie**, wenn

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}_T \cdot \overline{\mathbf{S}}_T \geq C \quad f.s. \tag{SUP}$$

und **Subreplikationsstrategie**, wenn

$$\overline{\boldsymbol{\xi}}_T \cdot \overline{\mathbf{S}}_T \leq C \quad f.s. \tag{SUB}$$

Mit $w = \overline{\boldsymbol{\xi}}_0 \cdot \overline{\mathbf{S}}_0 \ldots$Angangskapital und $\mathbf{X} \ldots$ diskontierter Preisprozess können wir äquivalent schreiben:

$$w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \geq \widetilde{C} \quad f.s. \tag{SUP'}$$

und

$$w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \leq \widetilde{C} \quad f.s. \tag{SUB'}$$

Definition. Der **kleinste Superreplikationspreis** $\Pi^{\uparrow}$ für C ist gegeben durch

$$\Pi^{\uparrow} = \inf\{w \in \mathbb{R} : w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \geq \widetilde{C}\}$$

Der **größte Subreplikationspreis** $\Pi^{\downarrow}$ für C ist gegeben durch

$$\Pi^{\downarrow} = \sup\{w \in \mathbb{R} : w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \leq \widetilde{C}\}$$

Interpretation.

- Minimales Anfangskapital um $\widetilde{C}$ sicher zu superreplizieren bzw. Maximales Anfangskapital um $\widetilde{C}$ sicher zu subreplizieren
- Ein Verkäufer, der für C den Preis $\Pi^{\uparrow}$ einnimmt, kann sich auch im unvollständigen Märkt perfekt absichern (hedgen), denn

$$\underbrace{\Pi^{\uparrow} + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T - \widetilde{C}}_{\substack{Verkauf von Claim \\ +Absicherung}} \geq 0 \quad f.s.$$

Theorem 2.9. *Gegeben sei ein arbitragefreier Finanzmarkt* $\overline{\mathbf{S}} = \left(S^0, S^1, \dots, S^d\right)$ *mit der Menge äquivalenter Martingalmaße* $\mathcal{Q}$ *und Claims* $(C^1, \dots, C^M)$ *mit Preisprozessen* $\left(\Pi_n^1, \dots, \Pi_n^M\right)_{n \in \{1,\dots,T\}}$.
Wenn der erweiterte Finanzmarkt $\left(\overline{\mathbf{S}}, \Pi^1, \dots, \Pi^M\right)$ *arbitragefrei ist, dann existiert ein* $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ *sodass*

$$\Pi_n^j = S_n^0 \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C^j}{S_T^0}\middle| \mathcal{F}_n\right] \quad \forall j \in \{1, \dots, M\} \tag{$\star$}$$

Insbesondere gilt:

a) Alle Π^j *sind* $\mathbb{Q}$*-Martingale*

b) Es gelten die Preisschranken

$$S_n^0 \cdot \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C^j}{S_T^0}\middle| \mathcal{F}_n\right] \quad \leq \quad \Pi_n^j \quad \leq \quad S_n^0 \cdot \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C^j}{S_T^0}\middle| \mathcal{F}_n\right]$$

Bemerkung.

- Falls $\overline{\mathbf{S}}$ vollständig ist, gilt $|\mathcal{Q}| = 1$ d.h. der Preis ist eindeutig
$\Rightarrow$ Übereinstimmung mit Korollar 2.4
- Im Allgemeinen ist der Preis für einen Claim C im unvollständigen Markt nicht eindeutig, aber es existieren Preisschranken
- *Ein* äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ bestimmt die Preise *aller* Claims $C^1, \dots, C^M$
- In der Praxis wird das Maß $\mathbb{Q}$ aus den bekannten Preisen "einfacher" Claims (Calls und Puts) ermittelt und dann für die Bewertung von komplexeren Claims verwendet, für die keine Preise bekannt sind ("Kalibrieren an Marktpreise")

Beweis. Betrachte erweitertes Finanzmarktmodell $\left(\mathbf{S}, \Pi^1, \ldots, \Pi^M\right)$.
Nach dem ersten Fundamentalsatz (Theorem 2.1) existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ sodass

$$\frac{S_n^i}{S_n^0} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T^i}{S_T^0}\middle|\mathcal{F}_n\right] \quad \forall i \in \{0, \ldots, d\} \tag{I}$$

$$\frac{\Pi_n^j}{S_n^0} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C^j}{S_T^0}\middle|\mathcal{F}_n\right] \quad \forall j \in \{1, \ldots, M\} \tag{II}$$

Aus (I) folgt $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ d.h. $\mathbb{Q}$ ist auch äquivalentes Martingalmaß für reduziertes Modell $\overline{\mathbf{S}} = \left(S^0, S^1, \ldots, S^d\right)$.
Aus (II) folgt $(\star)$ und Behauptung a).
Behauptung b) folgt durch Minimieren bzw. Maximieren über $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$ $\square$

Theorem 2.10. *Sei $\overline{\mathbf{S}}$ ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mi der Menge äquivalenter Martingalmaße $\mathcal{Q}$. Seien C ein Claim und $\Pi^\uparrow$ bzw. $\Pi^\downarrow$ die optimalen Super- bzw. Subreplikationspreise für C.*
Dann gilt:

$$\Pi^\uparrow = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{S_T^0}\right]$$

und

$$\Pi^\downarrow = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{C}{S_T^0}\right]$$

d.h. die Schranken in Theorem 2.9 b) sind gerade $\Pi^\uparrow$ und $\Pi^\downarrow$.

Bemerkung. Gemeinsam mit der Definition von $\Pi^\uparrow$ ergibt sich

$$\inf\{w \in \mathbb{R} : w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \geq \widetilde{C}\} = \sup\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right] : \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}\}$$

Aussagegen dieser Art sind **Dualitätssätze** für Optimierungsprobleme. Statt eine Minimierungsproblem kann ein Maximierungsproblem mit dem selben Optimalwert gelöst werden und umgekehrt.
$\Rightarrow$ Das Berechnen von Preisschranken für Claims und das Berechnen von optimalen Sub/Superreplikationsstrategien sind zueinander duale Optimierungsprobleme.

Beweis.

- Sei $(w, \boldsymbol{\xi})$ Superreplikationsstrategie, d.h.

$$w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \geq \widetilde{C}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \;&\Rightarrow\; \mathbf{X} \text{ } \mathbb{Q}\text{-Martingal} \\
&\Rightarrow\; (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X}) \text{ } \mathbb{Q}\text{-Martingal} \\
&\Rightarrow\; w = w + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right] \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right] \quad \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \\
&\Rightarrow\; w \geq \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right] \\
&\Rightarrow\; \Pi^{\uparrow} \geq \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right]
\end{aligned}
$$

(wir wollen aber Gleichheit!)

- $|\Omega| < \infty$
  Definiere $\mathcal{A}_0$ und A_0 (mit Anfangskapital 0 erreichbare Claims) wie im Beweis von Theorem 2.1. Definiere zusätzlich

$$\mathcal{A}' := \{(w, w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T) : w \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar}\}$$

und "Vektorisierung"

$$A' := \left\{ \begin{pmatrix} w \\ w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_1) \\ \vdots \\ w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_N) \end{pmatrix} : w \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$$

Definiere

$$B = \left\{ (w, y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^{N+1} : w < \Pi^{\uparrow},\ y_i > \widetilde{C}(\omega_i) \right\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$$

offen und konvex. Behauptung: $A' \cap B = \varnothing$
Wäre dies nicht der Fall, so würde $w < \Pi^{\uparrow}$ existieren mit

$$w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \geq \widetilde{C}$$

Es gilt aber

$$\Pi^{\uparrow} = \inf\{w \in \mathbb{R} : w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T \geq \widetilde{C}\}$$

im Widerspruch zu $w < \Pi^{\uparrow}$
$\Rightarrow$ Behauptung korrekt

Mit dem Trennungssatz für konvexe Mengen existiert ein lineares Funktional

$$l : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \mapsto \sum_{i=0}^{N} l_i x_i$$

sodass

$$\sup\{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B\} < \inf\{l(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A'\} \tag{+}$$

Aus der Linearität von A' folgt $l(\mathbf{x}) = 0, \ \forall \mathbf{x} \in A'$ (vgl. Thm 2.1)
$\Rightarrow$ Aus (+) folgt:

$$l_0 w + \sum_{i=1}^{N} l_i (w + a_i) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}, \ \mathbf{a} \in A_0 \tag{I}$$

$$l_0 w + \sum_{i=1}^{N} l_i y_i < 0 \quad \forall w < \Pi^{\uparrow}, \ y_i > C(\omega_i) \tag{II}$$

Aus (I) folgt zunächst

$$l_0 \geq 0 \quad \text{und} \quad l_i \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

(Ansonsten wäre die linke Seite unbeschränkt $\Rightarrow$ Widerspruch)

Fall 1: $l_0 \neq 0$: Setze

$$q_i := -\frac{l_i}{l_0} \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

Aus $\frac{(\mathrm{I})}{l_0}$ folgt

$$w \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{N} q_i\right) - \sum_{i=1}^{N} q_i a_i = 0 \qquad \forall w \in \mathbb{R}, \ \mathbf{a} \in A_0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} q_i = 1 \text{ und } \sum_{i=1}^{N} q_i a_i = 0 \qquad \forall \mathbf{a} \in A_0$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}[\omega_i] = q_i$ ist W-Maß und

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T] = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \underbrace{(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T(\omega_i)}_{\in A_0} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar}$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{X}$ ist $\mathbb{Q}$-Martingal (nach Lemma 1.8)

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ ist Martingalmaß

Aus $\frac{(\mathrm{II})}{l_0}$ folgt

$$
\begin{aligned}
& w - \sum_{i_1}^{N} y_i q_i < 0 \qquad \forall w < \Pi^{\uparrow},\ y_i > \widetilde{C}(\omega_i) \\
\Rightarrow\ & \Pi^{\uparrow} - \sum_{i=1}^{N} \widetilde{C}(\omega_i) q_i \leq 0 \\
\Rightarrow\ & \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right] \geq \Pi^{\uparrow} \\
\Rightarrow\ & \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right] \geq \Pi^{\uparrow} \\
\Rightarrow\ & \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{C}\right] = \Pi^{\uparrow}
\end{aligned}
$$

Fall 2: $l_0 = 0$
Aus (I) folgt

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N} l_i (w + a_i) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ & \sum_{i=1}^{N} l_i = 0
\end{aligned}
$$

Aus (II) folgt

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N} l_i y_i < 0 \quad \forall y_i > \widetilde{C} \\
\Rightarrow\ & l_i \leq 0 \qquad\qquad \forall i \in \{1, \dots, N\}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow\ \mathbf{l} = \mathbf{0}\ \Rightarrow$ Widerspruch
(Fall 2 kann nicht eintreten)

$\square$

3 Nutzenoptimierung

3.1 Präferenzordnungen und Erwartungsnutzen

Ziel:

- Modellierung von Entscheidungen unter Unsicherheit
- Vergleichen zufälliger Auszahlungen ("Lotterien") X, Y

Wir vergleichen X, Y anhand ihrer Verteilungsfunktionen F, G.

$\mathcal{M}$:=Menge aller (1-dim) Verteilungsfunktionen auf dem gegebenen W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Definition. Eine Relation $\preccurlyeq$ auf $\mathcal{M}$ mit den Eigenschaften

- reflexiv: $F \preccurlyeq F \quad \forall F \in \mathcal{M}$
- transitiv: $(F \preccurlyeq G) \wedge (G \preccurlyeq H) \;\Rightarrow\; F \preccurlyeq H \quad \forall F, G, H \in \mathcal{M}$
- vollständig: es gilt immer $(F \preccurlyeq G)$ oder $(G \preccurlyeq F) \quad \forall F, G \in \mathcal{M}$

heißt **Präferenzordnung** auf $\mathcal{M}$.

Interpretation. $F \preccurlyeq G \;:\Leftrightarrow$ "G wird gegenüber F bevorzugt".

Bemerkung. Statt $\mathcal{M}$ können wir auch allgemeiner eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{M}$ betrachten.

Aus einer gegebenen Präferenzordnung (PO) lässt sich eine

- Äquivalenzrelation $F \sim G \;:\Leftrightarrow\; (F \preccurlyeq G) \wedge (G \preccurlyeq F)$ "Indifferent zwischen F und G"
- strikte Präferenzordnung $F \prec G \;:\Leftrightarrow\; (F \preccurlyeq G) \wedge \neg(G \preccurlyeq F)$

ableiten.

Wir definieren folgende Axiome, die das Hinzufügen einer dritten Wahlmöglichkeit betreffen.

Definition.

a) Eine Präferenzordnung '$\preccurlyeq$' erfüllt das **Stetigkeitsaxiom**, wenn für alle $F, G, H \in \mathcal{M}$ mit $F \preccurlyeq G \preccurlyeq H$ ein $\alpha \in [0, 1]$ existiert mit

$$(1 - \alpha)F + \alpha H \sim G$$

b) Eine Präferenzordnung '$\preccurlyeq$' erfüllt das **Unabhängigkeitsaxiom**, wenn für alle $F, G, H \in \mathcal{M}$ und $\alpha \in [0,1]$ gilt

$$F \preccurlyeq G \;\Leftrightarrow\; (1-\alpha)F + \alpha H \preccurlyeq (1-\alpha)G + \alpha H$$

Interpretation.

a) Eine „gute" und eine „schlechte" Verteilung können so gemischt werden, dass sie zu einer „mittelprächtigen" äquivalent sind.

b) Das Mischen mit einer dritten Verteilung H beeinflusst die Ordnung zwischen F und G nicht.

Bemerkung. Kahnemann & Tversky konnten in psychologischen Studien zeigen, dass menschliche Entscheidungen oft das Unabhängigkeitsaxiom verletzen.

Definition.

- Eine Präferenzordnung '$\preccurlyeq$' hat eine **numerische Darstellung**, wenn eine Abbildung $U : \mathcal{M} \to [-\infty, \infty)$ existiert mit

$$F \preccurlyeq G \;\Leftrightarrow\; U(F) \leq U(G)$$

- Die Darstellung ist eine **von Neumann-Morgenstern-(vNM-) Darstellung**, wenn eine Abbildung $u : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ existiert mit

$$U(F) = \int_{\mathbb{R}} u(x) dF(x)$$

Theorem 3.1 (von Neumann-Morgenstern)**.** *Sei $|\Omega| < \infty$ und $\preccurlyeq$ eine Präferenzordnung auf der Menge der Verteilungen auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann sind äquivalent:*

a) Die Präferenzordnung $\preccurlyeq$ erfüllt Stetigkeits- und Unabhängigkeitsaxiom

b) Die Präferenzordnung $\preccurlyeq$ hat eine vNM-Darstellung

Für den Beweis benötigen wir mehrere Lemmata.

Lemma 3.2. *Sei $F \preccurlyeq G$ und $\preccurlyeq$ eine Präferenzordnung welche das Unabhängigkeitsaxiom erfüllt. Dann ist die Funktion*

$$[0,1] \to \mathcal{M};\;\; \alpha \mapsto (1-\alpha)F + \alpha G$$

monoton bzgl. $\preccurlyeq$, d.h.

$$\alpha \leq \beta \;\Leftrightarrow\; (1-\alpha)F + \alpha G \preccurlyeq (1-\beta)F + \beta G$$

Beweis. Übungsaufgabe! $\square$

Lemma 3.3. *Sei $\preccurlyeq$ eine Präferenzordnung auf $\mathcal{M}$, die Stetigkeits- und Unabhänging-keitsaxiom erfüllt. Dann existiert eine affine numerische Darstellung U von $\preccurlyeq$ d.h.*

$$U((1-\alpha)F+\alpha G) = (1-\alpha)U(F)+\alpha U(G) \quad \forall F, G \in \mathcal{M},\ \alpha \in [0,1]$$

Für jede weitere affine numerische Darstellung V existieren $b \in \mathbb{R},\ c > 0$ sodass

$$U(F) = b + c \cdot V(F) \quad \forall F \in \mathcal{M}$$

Beweis. Seien $F, H \in \mathcal{M}$ mit $F \prec H$. Definiere das "Intervall"

$$[F,H] := \{G \in \mathcal{M} : F \preccurlyeq G \preccurlyeq H\}$$

Laut Übungsaufgabe 3.4 ist $[F,H]$ eine konvexe Teilmenge von $\mathcal{M}$.
Für jedes $G \in [F,H]$ existiert nach dem Stetigkeitsaxiom ein $\alpha \in [0,1]$ sodass

$$(1-\alpha)F + \alpha H \sim G$$

Setze $U(G) := \alpha$.
Behauptung : U ist affine numerische Darstellung von $\preccurlyeq$ auf $[F,H]$

- Seien $G, G' \in [F,H]$ mit $G \preccurlyeq G'$

$$\alpha := U(G), \quad \alpha' := U(G')$$

$$(1-\alpha)F + \alpha H \sim G \preccurlyeq G' \sim (1-\alpha')F + \alpha' H$$
$$\overset{Lem3.2}{\Longleftrightarrow} \alpha \le \alpha'$$

  $\Rightarrow$ U ist numerische Darstellung von $\preccurlyeq$.

- Noch zu zeigen ist die affine Eigenschaft. Sei $\beta \in [0,1]$. Setze

$$\begin{aligned} G_* &:= (1-\beta)G + \beta G' \\ \alpha_* &:= (1-\beta)\alpha + \beta\alpha' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_* &= (1-\beta)G + \beta G' \\ &\sim (1-\beta)[(1-\alpha)F + \alpha H] + \beta[(1-\alpha')F + \alpha' H] \\ &= (1-\alpha_*)F + \alpha_* H \end{aligned}$$

$\Rightarrow\; U(G_*) = \alpha_* = (1-\beta)U(G) + \beta U(G')$
$\Rightarrow\; U$ ist affin.

Sei V eine weitere affine numerische Darstellung von $\preccurlyeq$ auf $[F, H]$. Setze

$$c := \frac{1}{V(H) - V(F)}, \quad b := -V(F) \cdot c$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\; b + cV(G) &= b + cV((1-\alpha)F + \alpha H)\\ &= b + c(1-\alpha)V(F) + c\alpha V(H)\\ &= \underbrace{b + cV(F)}_{=0} + c\alpha[V(H) - V(F)]\\ &= \alpha\\ &= U(G) \quad \square\end{aligned}$$

Beweis von Theorem 3.1. Sei $|\Omega| = N$. Jede Verteilungsfunktion F über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist von der Form

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i D_{x_i}(x)$$

$$\text{mit } \sum_{i=1}^{N} a_i = 1 \quad \text{und } D_{x_i} := \mathbf{1}_{x > x_i}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

Setze $u(x) := U(D_x),\ x \in \mathbb{R}$ mit U eine affine numerische Darstellung von $\preccurlyeq$.

$$\begin{aligned}U(F) &= U\left(\sum_{i=1}^{N} a_i D_{x_i}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i U(D_{x_i})\\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i u(x_i)\\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) dF(x) \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung. Für $|\Omega| = \infty$ muss zusätzlich verlangt werden, dass $\preccurlyeq$ stetig bzgl. schwacher Verteilungskonvergenz ist, dann gilt Theorem 3.1 weiterhin.

Anstatt Verteilungsfunktionen F, G können wir auch direkt Zufallsvariablen X, Y vergleichen. Sei also $\preccurlyeq$ eine Präferenzordnung mit vNM-Darstellung, dann setzen wir für

$X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$X \preccurlyeq Y :\Leftrightarrow F \preccurlyeq G :\Leftrightarrow \mathbb{E}\left[u(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[u(Y)\right]$$

Definition. Eine Funktion $u : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ heißt **(Bernoullische) Nutzenfunktion** wenn u monoton steigend und strikt konkav ist.

Bemerkung. Aus monoton und strikt konkav folgt strikt monoton auf $\{x : u(x) > -\infty\}$

Proposition 3.4. *Sei $\preccurlyeq$ eine Präferenzordnung mit vNM-Darstellung*

$$X \preccurlyeq Y \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[u(X)\right] \leq \mathbb{E}\left[u(Y)\right]$$

Dann ist u Bernoullische Nutzenfunktion genau dann, wenn

a) $c \preccurlyeq d \Leftrightarrow c \leq d \quad \forall c, d \in \mathbb{R}$ *(“Mehr besser als weniger”)*

b) $X \prec \mathbb{E}\left[X\right] \quad \forall X \in L^1(\mathbb{P})$ *(Risikoaversion)*

Beweis. " $\Rightarrow$ " :

$$c \preccurlyeq d \Leftrightarrow u(c) \leq u(d) \overset{u \text{ mono.}}{\Longleftrightarrow} c \leq d$$

u strikt konkav: $\mathbb{E}\left[u(X)\right] < u(\mathbb{E}\left[X\right]) \;\Rightarrow\; X \prec \mathbb{E}\left[X\right]$
" $\Leftarrow$ " :

$$X = \begin{cases} a & \text{mit W-keit } \frac{1}{2} \\ b & \text{mit W-keit } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$X \succ \mathbb{E}\left[X\right] \;\Rightarrow\; \mathbb{E}\left[u(X)\right] > u(\mathbb{E}\left[X\right])$$

$\Rightarrow\; \frac{1}{2}(u(a) + u(b)) > u\left(\frac{a+b}{2}\right)$
$\Rightarrow\; u$ ist strikt konkav
$\Rightarrow\; u$ ist Bernoullische Nutzenfunktion. □

Definition. Sei u eine Bernoullische Nutzenfunktion und $\preccurlyeq_u$ die zugehörige Präferenzordnung

a) Für $X \in L^1(\mathbb{P})$ heißt

$$c := c_*(X, u) \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad c \sim X$$

certainty equivalent von X

b) Für $u \in C^2$ heißt

$$A_u(x) := -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Arrow-Pratt-Koeffizient der absoluten Risikoaversion.

Bemerkung. Das certainty equivalent ist jene deterministische Größe, die bzgl. $\preccurlyeq$ als äquivalent zur Zufallsvariablen X angesehen wird.

Proposition 3.5. *Seien u, v Bernoullische Nutzenfunktionen. Dann sind äquivalent:*

a) $X \preccurlyeq_v c \;\Rightarrow\; X \preccurlyeq_u c \quad \forall X \in L^1(\mathbb{P}), c \in \mathbb{R}$

b) $c_*(X,u) \leq c_*(X,v) \quad \forall X \in L^1(\mathbb{P})$

c) es existiert eine monoton wachsende, konkave Abbildung g, sodass

$$u = g \circ v$$

Sind $u, v \in C^2$, ist ebenfalls äquivalent:

d) $A_u(x) \geq A_v(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Bemerkung. Alle Punkte $a) - d)$ lassen sich interpretieren als: u "risikoaverser" als v

Beweis. $a) \Rightarrow b)$: Es gilt:

$$X \sim_v c_*(X,v) \quad \Rightarrow X \preccurlyeq_v c_*(X,v) \quad \overset{a)}{\Rightarrow} X \preccurlyeq_u c_*(X,v)$$

mit Transitivität und $c_*(X,u) \sim_u X$ folgt

$$c_*(X,u) \preccurlyeq_u c_*(X,v) \quad \Rightarrow c_*(X,u) \leq c_*(X,v)$$

Die restlichen Beziehungen sind Übungsaufgabe! □

Bemerkung. Analog zum Koeffizienten der absoluten Risikoaversion lässt sich der Koeffizient der relativen Risikoaversion

$$R_u(x) := x \cdot A_u(x)$$

definieren.

Beispiel.

- $u(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & x \geq 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0, \alpha \neq 1$
  ist Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion $R_u(x) = \alpha \neq 1$
  (CRRA-Nutzen, Potenznutzen)

- $u(x) = \begin{cases} \log x, & x \geq 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$
  ist Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion $R_u(x) = 1$
  (CRRA-Nutzen, logarithmierter Nutzen)

- $u(x) = -\exp(-\gamma x) \quad x \in \mathbb{R}, \gamma \geq 0$
  ist Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion $A_u(x) = \gamma$
  (CARA-Nutzen, Exponentialnutzen)

Beispiel. **St. Petersburger Paradoxon** (Nikolaus Bernoulli (1713))
Spiel. Eine faire Münze wird geworfen bis in der N-ten Runde das erste Mal Zahl fällt.
Der Spieler erhält die Auszahlung 2^{N-1}€.
Frage: Wieviel Einsatz sollte man zahlen um an dem Spiel teilzunehmen?
Antwort I: Der Einsatz sollte gleich dem erwarteten Gewinn sein.
$N \ldots$ geometrisch verteilt, d.h.

$$\mathbb{P}[N = k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad k \in \{1, 2, \ldots\}$$

$$\mathbb{E}\left[2^{N-1}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

Einsatz $= \infty$!?
Kritik: Tatsächlich sind nur wenige Leute bereit mehr als 20€zu zahlen, die meisten deutlich weniger!

Nikolaus Bernoulli sah dies als Schwäche der Wahrscheinlichkeitstheorie, die dieses Verhalten nicht erklären konnte.

Die Lösungsvorschläge von Gabriel Cramer und Daniel Bernoulli entsprechen (in heutiger Sprache) genau der Bewertung des Spiels anhand des certainty equivalent $c_*(2^{N-1}, u)$ mit Nutzenfunktion

$$u_1(x) = \sqrt{x} \qquad \text{(Cramer)}$$

$$u_2(x) = \log x \qquad \text{(Bernoulli)}$$

Berechnung 1.
$c_1 := c_*(2^{N-1}, u_1) \sim 2^{N-1}$
d.h. $u_1(c_1) = \mathbb{E}\left[u_1(2^{N-1})\right]$
oder $c_1 = u_1^{-1}\left(\mathbb{E}\left[u_1(2^{N-1})\right]\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_1(2^{N-1})\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{\frac{k-1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&= \frac{1}{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \;\; c_1 = (2-\sqrt{2})^{-2} \approx 2,914$
$\Rightarrow$ Einsatz $= 2,91$€

Berechnung 2.
$c_2 = u_2^{-1}\left(\mathbb{E}\left[u_2(2^{N-1})\right]\right)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u_2(2^{N-1})\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \cdot \log 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \log 2 \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
&\overset{\circledast}{=} \frac{\log 2}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \log 2
\end{aligned}$$

NR $\circledast$: $|z| < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} z^k &= \frac{1}{1-z} \quad \Big| \frac{\partial}{\partial z} \\
\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot z^{k-1} &= \frac{1}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \;\; c_2 = e^{\log 2} = 2$
$\Rightarrow$ Einsatz $= 2$€.

3.2 Nutzenoptimale Portfoliowahl

Gegeben.

- Finanzmarktmodell $\overline{\mathbf{S}} = \left(S^0, \ldots, S^d\right)$ mit Zeithorizont T
- Bernoullische Nutzenfunktion $\widetilde{u}$
- Anfangskapital $w \in \mathbb{R}$

Ziel. Investiere Anfangskapital w so in den Finanzmarkt, dass der Nutzen aus dem Endvermögen zum Zeitpunkt T maximal ist.
Formal:

$$\text{(NOP')} \qquad \begin{cases} \max \mathbb{E}\left[\widetilde{u}\left(\overline{\boldsymbol{\xi}}_T \cdot \overline{\mathbf{S}}_T\right)\right] \\ \overline{\boldsymbol{\xi}}_0 \cdot \overline{\mathbf{S}}_0 = w, \quad \overline{\boldsymbol{\xi}} \text{ selbstfinanzierend.} \end{cases}$$

Wir lösen (NOP') unter den folgenden zusätzlichen Annahmen:

- $|\Omega| < \infty$
- Numeraire S^0 ist deterministisch

Da S^0 deterministisch, ist $u(x) := \widetilde{u}(S_T^0 x)$ ebenfalls Nutzenfunktion und (NOP') ist äquivalent zu

$$\text{(NOP)} \qquad \begin{cases} \max \mathbb{E}\left[u\left(w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right)\right] \\ \boldsymbol{\xi} \text{ vorhersehbar} \end{cases}$$

Wie sieht es mit der Lösbarkeit von (NOP) aus?

Theorem 3.6. *Sei u eine Nutzenfunktion und $|\Omega| < \infty$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) Das Finanzmarkt-Modell $\overline{\mathbf{S}}$ ist arbitragefrei

b) Das Nutzenoptimierungsproblem (NOP) *mit Anfangskapital w besitzt eine Lösung $\boldsymbol{\xi}_*$*

Wenn zusätzlich $\mathbf{S}$ nicht-redundant ist, so ist $\boldsymbol{\xi}_*$ eindeutig

Beweis. "$a) \Leftarrow b)$" : (mit Widerspruch)
Angenommen $\boldsymbol{\xi}_*$ sei Lösung von (NOP) und $\boldsymbol{\gamma}$ Arbitragestrategie.
Dann gilt:

$$(\boldsymbol{\gamma} \circ \mathbf{X})_T \geq 0 \quad f.s.$$
$$\mathbb{P}\left[(\boldsymbol{\gamma} \circ \mathbf{X})_T > 0\right] > 0$$

Definiere $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_* + \boldsymbol{\gamma}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u\left(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T\right)\right] &\overset{optimal}{\geq} \mathbb{E}\left[u\left(w + (\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\Big[u\Big(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T + \underbrace{(\boldsymbol{\gamma} \circ \mathbf{X})_T}_{\substack{>0\ mit \\ pos.\ W-keit}}\Big)\Big] \\
&> \mathbb{E}\left[u\left(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T\right)\right]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch
"$a) \Rightarrow b)$" : Setze

$$\mathcal{A}_0 := \left\{(\boldsymbol{\xi} \circ \mathbf{X})_T : \boldsymbol{\xi}\ vorhersehbar\right\}$$

... linearer Vektorraum
(NOP) ist äquivalent zu

$$\max\left\{\mathbb{E}\left[u(w + X)\right] : X \in \mathcal{A}_0\right\} \tag{$*$}$$

Setze $c := \mathbb{E}\left[u(w)\right]$ und betrachte

$$N := \left\{X \in \mathcal{A}_0 : \mathbb{E}\left[u(w + X)\right] \geq c\right\}$$

$(*)$ ist äquivalent zu

$$\max\left\{\mathbb{E}\left[u(w + X)\right] : X \in N\right\} \tag{$**$}$$

Wir zeigen: N ist beschränkt.
Angenommen X_n sei unbeschränkte Folge in N, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_1 = \infty$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt $\frac{X_n}{\|X_n\|_1}$ eine konvergente Teilfolge $\frac{X_{n_k}}{\|X_{n_k}\|_1} \to \eta \in \mathcal{A}_0 \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
c &\leq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{E}\left[u\left(w + X_{n_k}\right)\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\limsup_{k\to\infty} u\left(w + X_{n_k}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\mathbb{E}\left[\limsup_{k\to\infty} u\left(w + \underbrace{\frac{X_{n_k}}{\|X_{n_k}\|_1}}_{\to\eta} \cdot \underbrace{\|X_{n_k}\|_1}_{\to\infty}\right)\right] \\
=&u(\infty)\cdot\mathbb{P}\left[\eta>0\right] + \underbrace{u(-\infty)}_{=-\infty}\cdot\mathbb{P}\left[\eta<0\right]
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}\left[\eta \geq 0\right] = 1$ und $\mathbb{P}\left[\eta > 0\right] > 0$
$\Rightarrow$ $\exists$ Arbitrage $\eta \in \mathcal{A}_0$ mit $\mathbb{P}\left[\eta > 0\right] = 1! \Rightarrow$ Widerspruch
$\Rightarrow N$ ist beschränkt und abgeschlossen
$\overset{|\Omega|<\infty}{\Rightarrow}$ N ist kompakt
$\Rightarrow (**)$ ist Maximierungsproblem mit stetiger Zielfunktion über einer kompakten Menge
$\Rightarrow$ Lösung $X_* \in \mathcal{A}_0$ existiert
$\Rightarrow$ $\exists\boldsymbol{\xi}_*$ vorhersehbar mit

$$X_* = w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T$$

Eindeutigkeit von $\boldsymbol{\xi}_*$:
Angenommen es existieren zwei optimale Strategien $\boldsymbol{\xi}_* \neq \boldsymbol{\eta}_*$ mit

$$
\begin{aligned}
Y_* =& w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T \\
Z_* =& w + (\boldsymbol{\eta}_* \circ \mathbf{X})_T \\
Y_* - Z_* =& (\underbrace{(\boldsymbol{\xi}_* - \boldsymbol{\eta}_*)}_{\neq 0} \circ \mathbf{X})_T
\end{aligned}
$$

Da das Finanzmarktmodell nicht redundant ist, folgt $Y_* \neq Z_*$ und beide lösen $(**)$
Setze

$$K_* = \frac{Y_* + Z_*}{2}$$

$$\mathbb{E}\left[u(K_*)\right] \overset{Jensen}{>} \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}\left[u(Y_*)\right] + \mathbb{E}\left[u(Z_*)\right]\right)$$

$\Rightarrow$ Widerspruch. $\square$

Theorem 3.7. *Sei u eine stetig differenzierbare Nutzenfunktion. Dann sind äquivalent:*

a) $\boldsymbol{\xi}_*$ *löst* (NOP)

b) Das durch

$$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}} = \frac{u'(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T)}{\mathbb{E}\left[u'(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T)\right]}$$

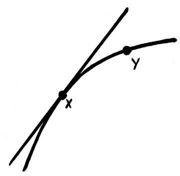
definierte Maß $\mathbb{Q}^*$ ist ein äquivalentes Martingalmaß.

Beweis. "a)⇒b)": Sei $\boldsymbol{\xi}_*$ optimal, η beliebige vorhersehbare Strategie.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u(w+((\boldsymbol{\xi}_*+\varepsilon\boldsymbol{\eta})\circ\mathbf{X})_T)\right]\Big|_{\varepsilon=0}\\
&\overset{\circledast}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}u(w+((\boldsymbol{\xi}_*+\varepsilon\boldsymbol{\eta})\circ\mathbf{X})_T)\Big|_{\varepsilon=0}\right]\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u'(w+(\boldsymbol{\xi}_*\circ\mathbf{X})_T)\cdot(\boldsymbol{\eta}\circ\mathbf{X})_T\right]\\
\Rightarrow &\quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[(\boldsymbol{\eta}\circ\mathbf{X})_T\right]=0\quad\forall\boldsymbol{\eta}\text{ vorhersehbar}\\
\Rightarrow &\quad \mathbf{X}\text{ ist }\mathbb{Q}^*-\text{Martingal}\\
\Rightarrow &\quad \mathbb{Q}^*\text{ ist äquivalentes Martingalmaß}
\end{aligned}$$

$\circledast$ Für $|\Omega|<\infty$ kann "$\mathbb{E}$" und "$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}$" immer vertauscht werden.
Für $|\Omega|=\infty$ muss Konkavität von u zur Begründung genutzt werden.

"a)⇐b)": u strikt konkav: setze $c=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u'(w+(\boldsymbol{\xi}\circ\mathbf{X})_T)\right]$
es gilt: $u(y)\le u(x)+(y-x)u'(x)$
Somit gilt für ein beliebiges vorhersehbares $\boldsymbol{\xi}$



$$\begin{aligned}
u(w+(\boldsymbol{\xi}\circ\mathbf{X})_T) \le{}& u(w+(\boldsymbol{\xi}_*\circ\mathbf{X})_T)\\
&+((\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)\circ\mathbf{X})_T\cdot u'(w+(\boldsymbol{\xi}_*\circ\mathbf{X})_T)\\
\Rightarrow\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u(w+(\boldsymbol{\xi}\circ\mathbf{X})_T)\right] \le{}& \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u(w+(\boldsymbol{\xi}_*\circ\mathbf{X})_T)\right]+\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[((\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}_*)\circ\mathbf{X})_T\right]}_{=0\ da\ \mathbb{Q}^*\ EMM}\cdot c
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\xi}_*$ ist optimal □

Bemerkung. Gemeinsam bilden Theorem 3.6 und Theorem 3.7 einen weiteren Beweis für den ersten Fundamentalsatz der Bewertungstheorie (Theorem 2.1) unter der Annahme $|\Omega|<\infty$, denn

$$\text{No-Arbitrage}\overset{3.6}{\iff}\text{(NOP) besitzt eine Lösung}\overset{3.7}{\iff}\text{es existiert ein EMM}$$

Korollar 3.8. *Betrachte einen arbitragefreien, vollständigen Finanzmarkt mit eindeutigem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und setze $L=\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Weiterhin seien ein Anfangsvermögen $w\in\mathbb{R}$ und eine Nutzenfunktion $u\in C^1$ gegeben. Definiere $I(y):=(u')^{-1}(y)$. Das optimale diskontierte Endvermögen $Y_*=w+(\boldsymbol{\xi}_*\circ\mathbf{X})_T$ erfüllt*

$$Y_*=I(cL)$$

dabei ist $c\in\mathbb{R}$ Lösung von

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[I(cL)\right]=w$$

Bemerkung. Wenn das optimale Endvermögen Y_* bekannt ist, so kann die optimale Strategie $\boldsymbol{\xi}_*$ als Replikationsstrategie für den „Claim“ Y_* berechnet werden.

Beweis. Aus Theorem 3.6 folgt die Existenz einer optimalen Strategie $\boldsymbol{\xi}_*$ mit diskontiertem Endvermögen $Y_* = w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T$.
Setze $c := \mathbb{E}\left[u'(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T)\right]$.
Nach Theorem 3.7 definiert die Dichte $\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{P}} \cdot \frac{1}{c} u'(Y_*)$ ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}^*$.
Aber $\mathbb{Q}$ ist eindeutig, d.h. $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^*$
$\Rightarrow\ L = \frac{1}{c} u'(Y_*)$
$\Rightarrow\ Y_* = I(cL)$
Außerdem gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[I(cL)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T)\right] = w. \qquad \square$$

Weitere Anwendung auf Derivatebewertung: **Grenznutzenpreis**
Gegeben sei ein Claim C mit Preisprozess Π_t. Wir betrachten NOP im erweiterten Finanzmarktmodell $(S^0, S^1, \ldots, S^d, \Pi_t)$ mit optimaler Strategie $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_* = (\xi_*^0, \ldots, \xi_*^d, \xi_*^{d+1})$
Wenn $\xi_*^{d+1} = 0$ gilt, so hat der Claim C keinen Einfluss auf die Nutzenoptimierung, er ist “Nutzenneutral”
$\Rightarrow$ Grenznutzenpreis

Korollar 3.9. *Der Grenznutzenpreisprozess Π_t eines Claims C ist gegeben durch*

$$\Pi_t = S_t^0 \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*}\left[\left.\frac{C}{S_T^0}\right| \mathcal{F}_t\right]$$

mit $\mathbb{Q}^*$ aus Theorem 3.7

Bemerkung. Der Grenznutzenpreis von C ist auch in unvollständigen Märkten eindeutig, hängt aber von der Nutzenfunktion u ab.

Beweis. Anwendung von Theorem 3.7 auf den erweiterten Markt liefert

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u'\left(w + \left(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_* \circ \widehat{\mathbf{X}}\right)_T\right) \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{\eta}} \circ \widehat{\mathbf{X}}\right)_T\right] = 0$$

für einen beliebigen $\mathbb{R}^{d+1}$-wertigen vorhersehbaren Prozess $\widehat{\boldsymbol{\eta}} = \left(\boldsymbol{\eta}, \eta^{d+1}\right)$. Nach Annahme gilt $\xi_*^{d+1} = 0$ und damit

$$\begin{aligned} &(I) \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u'\left(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T\right)(\boldsymbol{\eta} \circ \mathbf{X})_T\right] = 0 \\ &(II) \quad \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[u'\left(w + (\boldsymbol{\xi}_* \circ \mathbf{X})_T\right)\left(\eta^{d+1} \circ \widetilde{\Pi}\right)_T\right] = 0 \end{aligned}$$

Aus (I) folgt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}\left[(\boldsymbol{\eta} \circ X)_T\right] = 0$$

für alle vorhersehbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozesse $\boldsymbol{\eta}$, und damit stimmt das Martingalmaß $\mathbb{Q}_*$ des erweiterten Marktes mit dem Martingalmaß aus Theorem 3.7 überein. Aus (II) folgt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}\left[(\eta^{d+1} \circ \tilde{\Pi})_T\right] = 0$$

für alle vorhersehbaren $\mathbb{R}$-wertigen Prozesse η^{d+1} und damit ist $\tilde{\Pi}$ ein $\mathbb{Q}_*$-Martingal. Es folgt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_*}\left[\frac{\Pi_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \frac{\Pi_t}{S_t^0}$$

für alle $t \in \{0, \dots, T\}$ und mit $\Pi_T = C$ die Behauptung. □

3.3 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Optimale Investition unter Unsicherheit nach Markowitz (1952)

Wir leiten das CAPM als Spezialfall des NOP ab.
Annahmen:

- Einperiodenmodell $\mathcal{I} = \{0, T\}$
- Numeraire: $S_0^0 = 1,\ S_1^0 = 1 + r$
- Wertpapier: $\mathbf{S}^1 \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) \dots$ Multivariate Normalverteilung
- Investor $I(w, \gamma)$ mit Anfangsvermögen $w \in \mathbb{R}$ und CARA-Nutzen

$$u(x) = -\exp(-\gamma x)$$

Ziel.

I) Optimales Investment von $I(w, \gamma)$ ohne Anteil in Numeraire

II) Optimales Investment von $I(w, \gamma)$ mit Anteil in Numeraire

Betrachte zuerst das erste Markowitz-Problem

$$\begin{cases} \max \mathbb{E}\left[u\left(\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{S}_1\right)\right] \\ \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{S}_0 = w \end{cases} \tag{Mark-I}$$

Es gilt

$$\mathbb{E}\left[u\left(\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_1\right)\right] = \mathbb{E}\left[-\exp\left(-\gamma\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_1\right)\right] = -\exp\left(-\gamma\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{\gamma^2}{2}\boldsymbol{\xi}^T\Sigma\boldsymbol{\xi}\right)$$

$\Rightarrow$ (Mark-I) ist äquivalent zum "Mean-Variance" Optimierungsproblem

$$\begin{cases} \max\left(\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\xi}^T\Sigma\boldsymbol{\xi}\right) \\ \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_0 = w \end{cases} \tag{M-V}$$

Interpretation: Optimiert wird der Erwartungswert des Portfolios zum Zeitpunkt 1, verringert um einen Strafterm, der der Varianz des Portfolios, gewichtet mit dem Faktor γ entspricht.

$V_1^{\boldsymbol{\xi}} := \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_1 :\ \max\left(\mathbb{E}\left[V_1^{\boldsymbol{\xi}}\right] - \frac{\gamma}{2}\cdot\mathrm{Var}\left(V_1^{\boldsymbol{\xi}}\right)\right)\ldots$ Mean-Variance-Tradeoff

Wir definieren die Lagrange-Zielfunktion zum Optimierungsproblem (M-V):

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\xi},\lambda) := \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\xi}^T\Sigma\boldsymbol{\xi} + \lambda\left(\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_0 - w\right), \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Bedingungen für Optimalität:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\xi}}:\quad \boldsymbol{\mu} - \gamma\Sigma\boldsymbol{\xi} + \lambda\mathbf{S}_0 = 0 \tag{I}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}:\quad \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_0 - w = 0 \tag{II}$$

Aus (I): $\boldsymbol{\xi}_* = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} + \lambda\mathbf{S}_0\right)$
Aus(II): $\mathbf{S}_0^T\boldsymbol{\xi}_* = \mathbf{S}_0^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \lambda\mathbf{S}_0^T\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0 = w\gamma$

$$\lambda_* = \frac{w\gamma - \mathbf{S}_0^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{S}_0^T\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad \boldsymbol{\xi}_* &= \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left(w\underbrace{\frac{1}{\mathbf{S}_0^T\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0}}_{:=P} - \frac{1}{\gamma}\underbrace{\frac{\mathbf{S}_0^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}{\mathbf{S}_0^T\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0}}_{:=Q}\right)\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0 \\ &= \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left(wP - \frac{Q}{\gamma}\right)\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0 \end{aligned}$$

Two-Fund-Separation. Jeder Investor $I(\gamma,w)$ investiert in eine Linearkombination aus zwei Portfolios ('funds') $\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}$ und $\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0$ unabhängig von der Anzahl d der verfügbaren Wertpapiere.

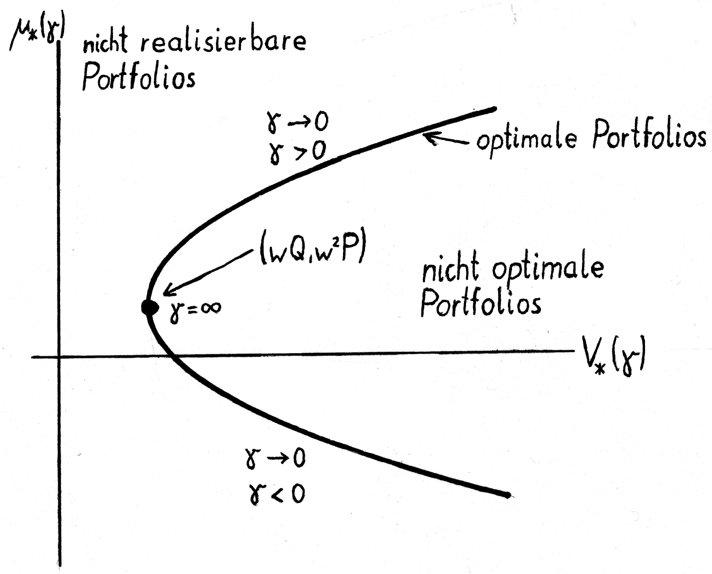
Bemerkung. Eine mögliche Erklärung für den Nutzen von Anlagefonds

Betrachte nun

$$\boldsymbol{\mu}_* = \mathbb{E}\left[V_1^{\boldsymbol{\xi}_*}\right]$$
$$V_*^2 = \mathrm{Var}(V_1^{\boldsymbol{\xi}_*})$$

Erwartungswert und Varianz des Optimalportfolios zum Zeitpunkt 1:

$$\mu_* = \mathbb{E}\left[\boldsymbol{\xi}_*^T \mathbf{S}_1\right] = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left(wP - \frac{Q}{\gamma}\right)\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1}\mathbf{S}_0$$
$$V_* = \mathrm{Var}(\boldsymbol{\xi}_*^T \mathbf{S}_1) = \frac{1}{\gamma^2}\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + 2\left(wP - \frac{Q}{\gamma}\right)\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1}\mathbf{S}_0 + \left(wP - \frac{Q}{\gamma}\right)^2 \mathbf{S}_0^T \Sigma^{-1}\mathbf{S}_0$$

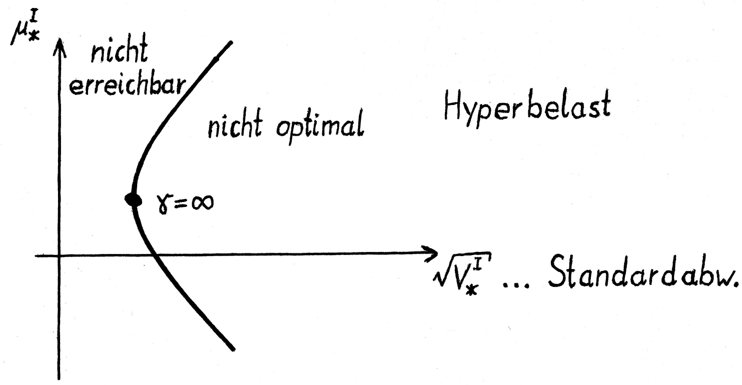


μ_* und V_* als Funktion der Risikoaversion γ

Zusammenfassung.
Markowitz-Problem I: Optimales Investment ohne Risikofreies Asset
Optimales Portfolio: $\boldsymbol{\xi}_* \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left(wP - \frac{Q}{\gamma}\right)\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0$
Two-Fund Separation: Optimale Anlage ist eine Linearkombination von $\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}$ und $\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0$.

Erwartungswert und Varianz des optimalen Portfolios:

$$\mu_*^I = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} + \left(wP - \frac{Q}{\gamma}\right)\boldsymbol{\mu}^T\Sigma^{-1}\mathbf{S}_0$$
$$V_*^I = \ldots quadratisches Polynom\ in\ \frac{1}{\gamma}$$



Markowitz-Problem II: Mit Investment in risikofreie Anlage S_0 ($S_0^0 = 1,\ S_0^1 = 1+r$)

$$\begin{cases} \max \mathbb{E}\left[u\left(\overline{\boldsymbol{\xi}}^T\overline{\mathbf{S}}_1\right)\right] \\ \text{NB: } \overline{\boldsymbol{\xi}}^T\overline{\mathbf{S}}_0 = w \end{cases} \tag{Mark-II}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[u\left(\overline{\boldsymbol{\xi}}^T\overline{\mathbf{S}}_1\right)\right] &= \mathbb{E}\left[-\exp\left(-\gamma\boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_1 - \gamma\xi_0(1+r)\right)\right] \\
&= -\exp\left(-\gamma\left(\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{\mu} + \xi_0(1+r)\right) + \frac{\gamma^2}{2}\boldsymbol{\xi}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\xi}\right) \\
&\quad \text{NB: } \xi_0 + \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_0 = w \\
&\quad\quad \Rightarrow \xi_0 = w - \boldsymbol{\xi}^T\mathbf{S}_0 \\
&= -\exp\left(-\gamma\left(w(1+r) + \boldsymbol{\xi}^T\left(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r)\right)\right) + \frac{\gamma^2}{2}\boldsymbol{\xi}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\xi}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (Mark-II) ist äquivalent zu

$$\begin{cases} \max \boldsymbol{\xi}^T\left(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r)\right) - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\xi}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\xi} \\ \text{keine NB} \end{cases} \tag{Mark-II'}$$

Optimalität: $F(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^T \left(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r)\right) - \frac{\gamma}{2}\boldsymbol{\xi}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{\xi}$

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r) - \gamma\Sigma^{-1}\boldsymbol{\xi}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{\xi}_* = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r)\right)$$

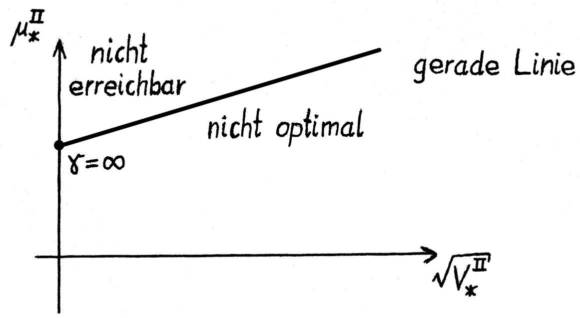
One-Fund-Theorem: Jeder Investor $I(\gamma, w)$ investiert in eine Linearkombination aus einem Wertpapierportfolio (dem "Marktportfolio")

$$\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r)\right)$$

und der risikofreien Anlage S^0 (unabhängig von der Anzahl d der verfügbaren Wertpapiere und vom Anfangskapital w)
Erwartungswert und Varianz des Optimalportfolios

$$\begin{aligned} V^* &= \boldsymbol{\xi}_*^T\mathbf{S}_1 + \xi_0(1+r) \\ &= w(1+r) + \boldsymbol{\xi}_*^T(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0(1+r)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mu_*^{II} = \mathbb{E}\left[V^*\right] = w(1+r) + \frac{1}{\gamma}\underbrace{\left(\mu - (1+r)\mathbf{S}_0\right)^T}_{=:R}\Sigma^{-1}\left(\mu - (1+r)\mathbf{S}_0\right) =$$
$$= w(1+r) + \frac{1}{\gamma}R^T\Sigma^{-1}R$$
$$V_*^{II} = \mathrm{Var}(V^*) = \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{R}^T\Sigma^{-1}\mathbf{R}$$



CAPM: Weitere Interpretation der Optimalität des Marktportfolios, Vergleich von

Marktportfolio und einzelnen Wertpapieren S^i.
Werteprozess des Marktportfolios: $M_t = \mathbf{S}_t^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r))\,, \quad t \in \{0,1\}$
Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_1] =& \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r)) = \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R} \\ \operatorname{Var}(M_1) =& \mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}\end{aligned}$$

In der Praxis müssen $\boldsymbol{\mu}$ und Σ nicht bekannt sein!
Als Ersatz für Marktportfolio kann Aktienindex, Anlagefund etc. dienen.

- Kennzahlen des Marktportfolios:
  Überschussrendite:

  $$\mathbb{E}[M_1] - M_0(1+r) = \boldsymbol{\mu}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R} - \mathbf{S}_0(1+r)\Sigma^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}$$

  $$\begin{aligned}&\text{"Erwartungswert von Investition in Marktportfolio"} \\ -\ &\text{"Investition in risikofreie Anlage"}\end{aligned}$$

  Sharpe-Ratio:

  $$SR(M_1) := \frac{\mathbb{E}[M_1] - M_0(1+r)}{\operatorname{Std}(M_1)} = \frac{\mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}}{\sqrt{\mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}}} = \sqrt{\mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}}$$

- Kennzahlen eines einzelnen Wertpapiers S^i:
  Überschussrendite:

  $$\mu_i - S_0^i(1+r)$$

  Sharpe-Ratio:

  $$SR(S^i) := \frac{\mu_i - S_0^i(1+r)}{\operatorname{Std}(S^i)}$$

  Beta: Skalierte Kovarianz zwischen Wertpapier und Marktportfolio

  $$\beta^i := \frac{\operatorname{Cov}(S_1^i, M_1)}{\operatorname{Var}(M_1)}$$

  kann zum Beispiel aus Zeitreihe geschätzt werden.

CAPM-Gleichung I:

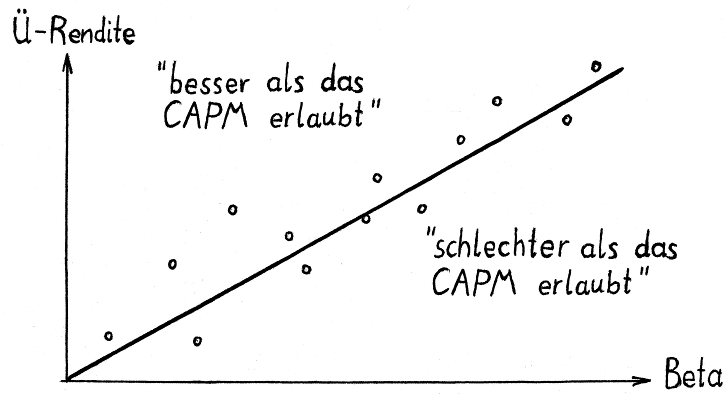
$$\begin{aligned}
\beta^i &= \frac{\operatorname{Cov}(S_1^i, M_1)}{\operatorname{Var}(M_1)} \\
&= \frac{\mathbf{e}_i^T \Sigma \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{S}_0(1+r))}{\mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}} \\
&= \frac{\mu_i - S_0^i(1+r)}{\mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}} \\
&= \frac{\mu_i - S_0^i(1+r)}{\mathbb{E}[M_1] - M_0(1+r)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_i \underbrace{(\mathbb{E}[M_1] - M_0(1+r))}_{\substack{\ddot{U}berschussrendite \\ Marktportfolio}} = \underbrace{\left(\mu_i - S_0^i(1+r)\right)}_{\substack{\ddot{U}berschussrendite \\ Wertpapier\ S^i}}$$

Interpretation als Regressionsgleichung.

- Angemessene Rendite von S^i lässt sich aus Beta und der Rendite des Marktportfolios erklären

- Liefert statistischen Test für Markowitz-Modell



Tatsächlich: Meist kein guter Fit!

CAPM-Gleichung II:

$$
\begin{aligned}
SR(S^i) &= \frac{\mu_i - S_0^i(1+r)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathbf{S}_i)}} \\
&= \frac{\mathrm{Cov}(S_1^i, M^i)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\mathbf{S}_i)}} \\
&= \mathrm{Cor}(S_1^i, M^i) \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(M)} \\
&= \mathrm{Cor}(S_1^i, M^i) \cdot \sqrt{\mathbf{R}^T \Sigma^{-1} \mathbf{R}} \\
&= \underbrace{\mathrm{Cor}(S_1^i, M^i)}_{\substack{Korrelation\ zw.\\ S^i\ \&\ Marktportfolio\\ \in[-1,1]}} \cdot \underbrace{SR(M)}_{\substack{Sharpe-Ratio\\ Marktportfolio}}
\end{aligned}
$$

Kein Wertpapier hat höhere Sharpe-Ratio als Marktportfolio!

Probleme bei Schätzung von erwarteten Returns

Beispiel. $W_t \ldots$ Brownsche Bewegung, d.h. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ unabhängig von $W_s - W_r$ $(r < s < t)$
$\log(S_t) = \sigma W_t + \alpha t$, $t \ldots$ in Jahren
Typisch: $\sigma \in 20\% \ - \ 80\%, \quad \alpha \in 5\% \ - \ 30\%$
z.B. $\sigma = 0,2$, $\alpha = 0,1$
n Beobachtungen pro Jahr, z.B. $n = 250$ (Beobachtungen/Jahr)
d.h. $X_j = \log\left(S_{\frac{j}{n}}\right) - \log\left(S_{\frac{j-1}{n}}\right) \ldots$ i.i.d. $\mathcal{N}\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

$$
\widehat{\alpha} = n\overline{X} := \frac{n}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j \sim \mathcal{N}\left(\alpha, \sigma^2 \frac{n}{N}\right)
$$

Wähle N ausreichend groß, damit α mit 95% Wahrscheinlichkeit im Konfidenzintervall $[\widehat{\alpha} - 0,01, \widehat{\alpha} + 0,01]$ liegt.

$$
\underbrace{1,96}_{95\%-Quantil} \cdot \sigma \sqrt{\frac{n}{N}} = 0,01
$$

$$
\Rightarrow \ \frac{N}{n} = \frac{\sigma^2 \cdot 1,96^2}{0,0001} = 0,2^2 \cdot 1,96^2 \cdot 10.000 \approx 1536,64
$$

Der Preisprozess S muss 1536 Jahre beobachtet werden!!

4 Optimales Stoppen und Amerikanische Optionen

Amerikanische Call-Option: verbrieftes Recht, das Basisgut S zu einem beliebigen Zeitpunkt $\tau \in \{0, 1, \ldots, T\}$ zum Preis K zu kaufen.
Amerikanische Put-Option: verbrieftes Recht, das Basisgut S zu einem beliebigen Zeitpunkt $\tau \in \{0, 1, \ldots, T\}$ zum Preis K zu verkaufen.

Frage. Wie bestimme ich den optimalen Zeitpunkt τ?
$\Rightarrow$ "Optimales Stoppen"

4.1 Optimale Stoppprobleme

Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum mit Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in I}$ und $(Z_n)_{n \in I}$ ein integrierbarer, adaptierter stochastischer Prozess ("Auszahlungsprozess").
Das Maximierungsproblem

$$\max\{\mathbb{E}[Z_\tau] : \tau \text{ Stoppzeit}, \ 0 \leq \tau \leq T\} \tag{OS}$$

heißt **optimales Stoppproblem** zu Z.
Eine Stoppzeit $\widehat{\tau}$ heißt optimal für (OS) wenn

$$\mathbb{E}[Z_{\widehat{\tau}}] = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[Z_\tau]$$

Frage.

- Wann existiert ein optimales $\widehat{\tau}$?
- Wie bestimmt man $\widehat{\tau}$?

Definition. Dem Stoppproblem (OS) ordnen wir den optimalen **Werteprozess**

$$V_t := \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}[\, Z_\tau | \, \mathcal{F}_t], \quad t \in I$$

zu. Eine Stoppzeit $\widehat{\tau}$ für die das Supremum angenommen wird heißt **optimal nach t**.

Bemerkung. Wir nehmen an, dass Ω abzählbar ist, sonst müssen wir "sup" durch das essentielle Supremum "ess sup" ersetzen!

Einige einfache Folgerungen aus dem Satz zum optionalen Stoppen (Theorem 1.11)

Proposition 4.1. *Für das optimale Stoppproblem (OS) gilt:*

a) Wenn Z ein Martingal ist, so ist jede Stoppzeit $0 \leq \tau \leq T$ optimal *b) Wenn Z ein Submartingal ist, so ist $\widehat{\tau} = T$ optimal*

c) Wenn Z ein Supermartingal ist, so ist $\widehat{\tau} = 0$ optimal

Beweis. Sei $0 \leq \tau \leq T$, dann gilt:

a) $\mathbb{E}\left[Z_\tau\right] = konst = \mathbb{E}\left[Z_0\right] = \mathbb{E}\left[Z_T\right]$

b) $\mathbb{E}\left[Z_\tau\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_T\right]$

c) $\mathbb{E}\left[Z_\tau\right] \geq \mathbb{E}\left[Z_0\right]$

□

Für die allgemeine Lösung brauchen wir folgende Definition:

Definition. Die **Snellsche Einhüllende** von Z ist das kleinste Supermartingal welches Z dominiert.

Bemerkung. "X dominiert Y" $\Leftrightarrow X_t \geq Y_t \quad \forall t \in I$

Theorem 4.2. *Zu jedem adaptierten, integrierbaren stochastischen Prozess $(Z_t)_{t\in I}$ existiert die Snellsche Einhüllende.*

Beweis. Definiere

$$\mathcal{D} := \{(D_t)_{t\in I} : D \text{ Supermartingal, } D \text{ dominiert } Z\}$$

Behauptung: $\mathcal{D} \neq \varnothing$
Setze $Y_n := \mathbb{E}\left[\sum_{k=n}^{T}(Z_k)_+ \middle| \mathcal{F}_t\right]$

- Es gilt: $Y_n \geq (Z_n)_+ \geq Z_n \quad \forall n \in I$
  $\Rightarrow$ Y dominiert Z
- Weiterhin gilt: $\mathbb{E}\left[Y_{n+1} - Y_n \middle| \mathcal{F}\right] = -(Z_n)_+ \leq 0$
  $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[Y_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] \leq Y_n$
  $\Rightarrow$ Y ist Supermartingal

Setze $S_n := \inf_{D\in\mathcal{D}} D_n$
Behauptung: S_n ist Snellsche Einhüllende
klar: S dominiert Z
Bleibt noch zu zeigen: S ist Supermatingal

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|S_n|\right] &\leq \mathbb{E}\left[|Z_n|\right] + \mathbb{E}\left[|D_n|\right] < \infty \quad \forall D \in \mathcal{D} \\
\mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] &\leq \mathbb{E}\left[D_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] \leq D_n \quad \forall D \in \mathcal{D} \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] &\leq \inf_{D\in\mathcal{D}} D_n = S_n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ S ist Supermatingal
$\Rightarrow$ S ist Snellsche Einhüllende $\square$

Theorem 4.3. *Die Snellsche Einhüllende S_n von Z kann rekursiv definiert werden durch:*

$$\begin{aligned} S_T &= Z_T \\ S_n &= \max\left\{Z_n, \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right]\right\} \end{aligned}$$

Beweis. Man sieht leicht, dass

- S dominiert Z
- $S_n \geq \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right] \Rightarrow S$ ist Supermartingal

Bleibt noch zu zeigen, dass S das kleinste Supermartingal ist, das Z dominiert. Sei dazu D ein weiteres Z dominierendes Supermartingal. Wir benutzen Rückwärtsinduktion nach n. Für den Induktionsstart gilt:

$$D_T \geq Z_T = S_T.$$

Unter der Induktionsvoraussetzung $D_k \geq S_k$ für alle $k \in \{n+1, \ldots, T\}$ folgt

$$\begin{aligned} D_n &\geq \max\left\{Z_n, \mathbb{E}\left[D_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right]\right\} \\ &\overset{I.V.}{\geq} \max\left\{Z_n, \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n\right]\right\} \\ &= S_n. \end{aligned}$$

$\square$

Theorem 4.4. *Der optimale Werteprozess ist die Snellsche Einhüllende von Z und die Stoppzeit*

$$\eta_n := \inf\{k \in \{n, \ldots, T\} : \ Z_k = V_k\}$$

ist optimal nach n.

Beweis. Per Induktion: Sei dazu S die Snellsche Einhüllende und V der Werteprozess.
Start: $S_T = Z_T = V_T$ und $\eta_T = T$ ist optimal.
Schritt: Wir nehmen an, dass $S_{n+1} = V_{n+1}$ und η_{n+1} optimal nach $n+1$.

Sei τ Stoppzeit mit $n \leq \tau \leq T$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_\tau \middle| \mathcal{F}_n \right] &= Z_n \cdot \mathbf{1}_{\tau=n} + \mathbb{E}\left[Z_{\tau \wedge (n+1)} \cdot \mathbf{1}_{\tau>n} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\
&= Z_n \cdot \mathbf{1}_{\tau=n} + \mathbf{1}_{\tau>n} \cdot \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}\left[Z_{\tau \wedge (n+1)} \middle| \mathcal{F}_{n+1} \right]}_{\leq V_{n+1} = S_{n+1}} |\mathcal{F}_n] \\
&\leq Z_n \cdot \mathbf{1}_{\tau=n} + \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] \cdot \mathbf{1}_{\tau>n} \\
&\leq \max\{Z_n, \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right]\} \\
&= S_n \\
\Rightarrow V_n &= \sup_{n \leq \tau \leq T} \mathbb{E}\left[Z_\tau \middle| \mathcal{F}_n \right] \leq S_n
\end{aligned}$$

Betrachte nun $\eta_n = \inf\{k \in \{n, \dots, T\} : \ S_k = Z_k\}$

$$\{\eta_n = n\} = \{S_n = Z_n\} = \{Z_n \geq \mathbb{E}\left[S_{k+1} \middle| \mathcal{F}_n \right]\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Z_{\eta_n} \middle| \mathcal{F}_n \right] &= \mathbf{1}_{\eta_n=n} \cdot Z_n + \mathbf{1}_{\eta_n>n} \cdot \mathbb{E}\left[Z_{\eta_n} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\
&\overset{I.V.}{=} \mathbf{1}_{Z_n \geq \mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n]} \cdot Z_n + \mathbf{1}_{Z_n \leq \mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n]} \cdot \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\
&= \max\{Z_n, \mathbb{E}\left[S_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right]\} \\
&= S_n \\
\Rightarrow \ V_n &= \sup_{n \leq \tau \leq T} \mathbb{E}\left[Z_\tau \middle| \mathcal{F}_n \right] \geq S_n
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \ V_n = S_n$ und $V_n = \mathbb{E}\left[Z_{\eta_n} \middle| \mathcal{F}_n \right]$
$\Rightarrow \ \eta_n$ ist optimal nach n. $\square$

Theorem 4.5. *a) Der optimale Werteprozess V im Stoppproblem ist die Snellsche Einhüllende von Z.*

b) Eine Stoppzeit $\widehat{\tau}$ ist optimal genau dann wenn

i) $Z_{\widehat{\tau}} = V_{\widehat{\tau}}$ gilt und

ii) $(V_{\widehat{\tau} \wedge t})_{t \in I}$ ein Martingal ist

Beweis. a) Betrachte $V_t = \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}\left[Z_\tau \middle| \mathcal{F}_t \right]$
Es gilt:

- $V_t \geq Z_t$ d.h. V dominiert Z
- $V_t \geq \mathbb{E}\left[Z_T \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}\left[V_T \middle| \mathcal{F}_t \right]$
  $\Rightarrow \ V$ ist Supermartingal

- Sei D ein weiteres Supermartingal welches Z dominiert:

$$\mathbb{E}\left[Z_\tau | \mathcal{F}_t\right] \overset{(dominiert)}{\leq} \mathbb{E}\left[D_\tau | \mathcal{F}_t\right] \overset{(Superm.)}{\leq} D_t \quad \forall \text{Stoppzeiten } t \leq \tau \leq T$$
$$\Rightarrow \sup_{t \leq \tau \leq T} \mathbb{E}\left[Z_\tau | \mathcal{F}_t\right] \leq D_t$$
$$\Rightarrow V_t \leq D_t \quad \forall t \in I$$

$\Rightarrow$ D dominiert V
$\Rightarrow$ V ist Snellsche Einhüllende

b) "$\Rightarrow$": Sei $\widehat{\tau}$ optimal für (OS)
Es gilt:

$$V_0 = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}\left[Z_\tau\right] = \mathbb{E}\left[Z_{\widehat{\tau}}\right]$$

Andererseits gilt: $V_0 \geq \mathbb{E}\left[V_{\widehat{\tau}}\right]$ wegen Supermartingal-Eigenschaft
$\Rightarrow \mathbb{E}\left[V_{\widehat{\tau}}\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_{\widehat{\tau}}\right]$
Aber V dominiert Z, d.h. $V_t \geq Z_t \ \forall t \in I$
$\Rightarrow \mathbb{E}\left[V_{\widehat{\tau}}\right] = \mathbb{E}\left[Z_{\widehat{\tau}}\right] \Rightarrow (i)$
Des weiteren gilt:

$$\mathbb{E}\left[Z_{\widehat{\tau}}\right] = V_0 \overset{(Superm.)}{\geq} \mathbb{E}\left[V_{t \wedge \widehat{\tau}}\right] \overset{(Superm.)}{\geq} \mathbb{E}\left[V_{\widehat{\tau}}\right] = \mathbb{E}\left[Z_{\widehat{\tau}}\right]$$

$\Rightarrow t \mapsto \mathbb{E}\left[V_{t \wedge \widehat{\tau}}\right]$ ist konstant
Ein Supermartingal mit konstantem Erwartungswert ist ein Martingal
$\Rightarrow V_{t \wedge \widehat{\tau}}$ ist Martingal $\Rightarrow$ (ii)
"$\Leftarrow$":

$$V_0 = V_{0 \wedge \widehat{\tau}} \overset{(ii)}{=} \mathbb{E}\left[V_{T \wedge \widehat{\tau}}\right] = \mathbb{E}\left[V_{\widehat{\tau}}\right] \overset{(i)}{=} \mathbb{E}\left[Z_{\widehat{\tau}}\right]$$
$$\text{d.h. } \mathbb{E}\left[Z_{\widehat{\tau}}\right] = V_0 = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}\left[Z_\tau\right]$$

$\Rightarrow \widehat{\tau}$ ist optimal □

Für die Existenz einer optimalen Stoppzeit benötigen wir die Doobsche Zerlegung:

Theorem 4.6. *Sei X ein Sub/Super-Martingal.*
Dann existiert eine Zerlegung

$$X = M + A$$

wobei M ein Martingal ist und A ein vorhersehbarer, integrierbarer, monton steigender/fallender stochastischer Prozess mit $A_0 = 0$.
Die Zerlegung ist fast sicher eindeutig.

Beweis. Übung! $\square$

Theorem 4.7. *Sei $V = M + A$ die Doob-Zerlegung des optimalen Werteprozesses V. Dann ist*

$$\nu := \inf\{n \in \{0, \dots, T-1\} : A_{n+1} < 0\}$$

eine optimale Stoppzeit für (OS).
Für jede weitere optimale Stoppzeit gilt $\widehat{\tau} \leq \nu$ f.s., d.h. ν ist maximal optimal.

Beweis. Es gilt:

$$V_{n\wedge\nu} = M_{n\wedge\nu} + \underbrace{A_{n\wedge\nu}}_{=0} = M_{n\wedge\nu}$$

d.h. $(V_{n\wedge\nu})_n \in \mathbb{N}$ ist Martingal.
Wir zeigen des weiteren: $Z_\nu = V_\nu$ f.s.
Auf $\{\nu = T\}$ gilt $Z_T = V_T$.
Auf $\{\nu = n\}$, $n < T$ gilt

$$V_n = M_n + \underbrace{A_n}_{=0} = M_n = \mathbb{E}\left[M_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right] > \mathbb{E}[M_{n+1} + \underbrace{A_{n+1}}_{<0}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\left[V_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right]$$

Andererseits gilt mit Theorem 4.3

$$V_n = \max\{Z_n, \mathbb{E}\left[V_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right]\}$$

$\Rightarrow\ V_n = Z_n$ auf $\{\nu = n\}$
$\Rightarrow\ V_\nu = Z_\nu$ f.s
$\overset{Thm4.5b)}{\Rightarrow}\ \nu$ ist optimal
Sei $\widehat{\tau}$ eine weitere optimale Stoppzeit.
Dann gilt (nach Theorem 4.5): $V_{n\wedge\widehat{\tau}}$ ist Martingal, d.h.

$$V_0 = \mathbb{E}\left[V_{\widehat{\tau}}\right] = \mathbb{E}\left[M_{\widehat{\tau}} + A_{\widehat{\tau}}\right] = M_0 + \mathbb{E}\left[A_{\widehat{\tau}}\right]$$

$\Rightarrow\ \mathbb{E}\left[A_{\widehat{\tau}}\right] = 0\ \Rightarrow\ A_{\widehat{\tau}} = 0$
$\Rightarrow\ \widehat{\tau} \leq \nu$ $\square$

4.2 Amerikanische Optionen

Call-Option: Auszahlung zum Zeitpunkt k: $(S_\tau - K)_+ \cdot \mathbf{1}_{\tau=k}$
d.h. der faire Preis bei Ausübung zum (Stopp-)Zeitpunkt τ ist

$$\Pi^{AC}(\tau) = \sum_{k=0}^{T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_\tau - K)_+ \cdot \frac{1}{S_\tau^0}\mathbf{1}_{\tau=k}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{S_\tau^0}(S_\tau - K)_+\right]$$

Der optimale Ausübungszeitpunkt $\widehat{\tau}$ ist gegeben durch das optimale Stoppproblem

$$\Pi^{AC} = \max_{0 \leq \tau \leq T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{S_\tau^0} (S_\tau - K)_+ \right]$$

Notation: $Z_k = \frac{1}{S_k^0}(S_k - K)_+ \ldots$ Auszahlungsprozess

Theorem 4.8. *Die risikofreie Anlage S_t^0 sei f.s. steigend (z.B. $S_t^0 = (1+r)^t$). Dann gilt*

$$\Pi^{AC} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{S_T^0} (S_T - K)_+ \right]$$

d.h. der Preis des Amerikanischen Calls ist gleich dem des Europäischen Calls und der Ausübungszeitpunkt entspricht der Endfälligkeit, d.h. $\widehat{\tau} = T$ ist optimal.

Bemerkung. Die Annahme S_t^0 steigend ist fast immer gegeben.

Beweis. Da S_t^0 steigend, gilt:

$$\frac{1}{S_n^0}(S_n - K)_+ = \left(\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_n^0} \right)_+ \geq \left(\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_{n-1}^0} \right)_+ \qquad (+)$$

Die Funktion $x \mapsto \left(x - \frac{K}{S_{n-1}^0} \right)_+$ ist konvex, daher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{S_n^0}(S_n - K)_+ \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] &\overset{(+)}{\geq} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{S_n}{S_n^0} - \frac{K}{S_{n-1}^0} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] \\
&\geq \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_n}{S_n^0} \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right] - \frac{K}{S_{n-1}^0} \right)_+ \qquad (\textit{wg. Jensen}) \\
&= \left(\frac{S_{n-1}}{S_{n-1}^0} - \frac{K}{S_{n-1}^0} \right)_+ \qquad (\textit{da } \mathbb{Q} \textit{ Martingalmaß}) \\
&= \frac{1}{S_{n-1}^0}(S_{n-1} - K)_+
\end{aligned}$$

d.h. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] \geq Z_{n-1}$
$\Rightarrow$ Der Auszahlungsprozess Z_k ist ein Submartingal
$\overset{Prop.\ 4.1}{\Rightarrow}$ $\widehat{\tau} = T$ ist optimal □

Put-Option:

$$\Pi^{AP}(\tau) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{S_\tau^0}(K - S_\tau)_+\right]$$
$$\Pi^{AP} = \sup_{0\le\tau\le T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{S_\tau^0}(K - S_\tau)_+\right]$$
$$Z_k = \frac{1}{S_k^0}(K - S_k)_+$$

Der Preis der Amerikanischen Put-Option entspricht im Allgemeinen nicht dem Preis der Europäischen Put-Option.
Ausnahme: S_t^0 konstant (d.h. Zinsrate $= 0$)

Der Preis muss über das optimale Stoppproblem berechnet werden.
Lösung z.B. über Rekursion im CRR-Modell.

Theorem 4.9. *Betrachte eine Amerikanische Put-Option im CRR-Modell und V_n, den Werteprozess des zugehörigen optimalen Stoppproblems. Dann existieren Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass*

$$V_n = f_n(S_n)$$

und die Werte von f_n in den Knoten des Baumdiagramms lassen sich rekursiv berechnen durch

- $f_T(S_T) = \dfrac{1}{(1+r)^T}(K - S_T)_+$
- $f_n(S_n) = \max\left\{\dfrac{1}{(1+r)^n}(K - S_n)_+; \underbrace{\dfrac{b-r}{b-a} f_{n+1}(S_n(1+a)) + \dfrac{r-a}{b-a} f_{n+1}(S_n(1+b))}_{\text{“continuation value''}}\right\}$

Insbesondere gilt $V_0 = f_0(S_0)$
Der optimale Ausübungszeitpunkt ist gegeben durch

$$\hat{\tau} = \inf\left\{n \in \{0, \dots, T\} : f_n(S_n) = \frac{1}{(1+r)^n}(K - S_n)_+\right\}$$

Beweis. Folgt aus Theorem 4.3 mit $Z_k = \frac{1}{(1+r)^k}(K - S_k)_+$ und

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f_{n+1}(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{Q}[R_{n+1} = a] \cdot f_{n+1}(S_n(1+a)) + \mathbb{Q}[R_{n+1} = b] \cdot f_{n+1}(S_n(1+b))\end{aligned}$$

□

Bemerkung. $\frac{1}{(1+r)^n}(K - S_n)_+$ heißt “exercise value”

... diskontierter Wert bei sofortiger Ausübung

... in jedem Knoten bekannt

”continuation value”

... Wert der bei Verzicht auf sofortige Ausübung noch in der Zukunft erzielt werden kann

... muss durch Rückwärtsrekursion als risikoneutraler bedingter Erwartungswert des zukünftigen Preises berechnet werden

In jedem Knoten des Baumes werden continuation value und exercise value verglichen:

- exercise value größer $\Rightarrow$ optimal auszuüben
- continuation value größer $\Rightarrow$ optimal abzuwarten

5 Black-Scholes-Formel

Ziele.

- Übergang zu Finanzmarktmodellen in stetiger Zeit mittels Grenzwertbildung
- Herleitung der Black-Scholes-(BS-)Formel für europäische Put- und Call-Optionen

Wir betrachten eine Folge von CRR-Modellen $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit kleiner werdenden Schrittweiten $\Delta_n := \frac{T}{n}$
Wähle $\sigma > 0,\ r \geq 0$ und setzte

Zinsrate: $r_n = r \cdot \Delta_n$

Rendite bei Aufwärtsbewegung: $b_n = r \cdot \Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}$

Rendite bei Abwärtsbewegung: $a_n = r \cdot \Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}$

Es gilt also (siehe Kapitel 2.3)

$$S_T^n = S_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (1 + R_i^n) \tag{CRR^n}$$

R_i^n nimmt Werte a_n und b_n jeweils mit strikt positiver Wahrscheinlickeit an.
Wähle n ausreichend groß, sodass $-1 < a_n$ gilt.
Aus Kapitel 2.3: Unter den jeweiligen Martingalmaßen $\mathbb{Q}^n$ sind die $(R_i^n)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ stochastisch unabhängig und

$$\mathbb{Q}^n\left[R_i^n = b_n\right] = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n} = \frac{\sigma\sqrt{\Delta_n}}{2\sigma\sqrt{\Delta_n}} = \frac{1}{2}$$

Frage. Wogegen konvergiert die Verteilung von S_T^n unter $\mathbb{Q}^n$ für $n \to \infty$?

Übergang zu Logarithmus:

$$Z_n := \log\left(\frac{S_T^n}{S_0}\right) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\log\left(1 + R_i^n\right)}_{=:L_i^n}$$

... Summe von unabhängig, identisch verteilten (aber von n abhängigen) Zufallsgrößen
$\Rightarrow$ Zentraler Grenzwertsatz?

Es liegt ein sogenanntes Dreiecksschema vor:

$$
\begin{array}{lll}
Z_1 = & L_1^1 & \text{Zufallsgrößen in einer} \\
Z_2 = & L_1^2 + L_2^2 & \text{Zeile sind stoschastisch} \\
Z_3 = & L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 & \text{unabhängig} \\
\vdots & \quad . \quad . \quad . &
\end{array}
$$

Theorem 5.1 (Zentraler Grenzwertsatz für Dreiecksschemata)**.**
Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $L^n = (L_1^n, \ldots, L_n^n)$ von Zufallsgrößen gegeben ("Dreiecksschema") mit folgenden Eigenschaften:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ sind $(L_i^n)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ unabhängig mit identischer Verteilung

b) $\exists$ Folge von Konstanten $K^n \to 0$, sodass

$$|L_i^n| \leq K^n \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

c) Mit $Z^n := \sum_{i=1}^n L_i^n$ gilt

$$\mathbb{E}[Z^n] \to \mu$$
$$Var(Z^n) \to \sigma^2$$

Dann konvergiert $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen eine Normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

Beweis. Übung! □

Zur Erinnerung.
Dichte der Standardnormalverteilung:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Verteilungsfunktion:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Die Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 hat die Verteilungsfunktion $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Definition. Eine strikt positive Zufallsgröße X heißt **lognormalverteilt** mit Parametern μ und σ^2 wenn $\log(X)$ normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist.

Theorem 5.2. *Betrachte eine Folge von CRR-Modellen S_T^n wie in (CRR^n) beschrieben. Dann konvergiert $\frac{S_T^n}{S_0}$ unter $\mathbb{Q}^n$ für $n \to \infty$ gegen eine Lognormalverteilte Zufallsgröße mit Parametern $T\mu = T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)$ und $T\sigma^2$.*
Äquivalent dazu gilt mit $Z^n = \log\left(\frac{S_T^n}{S_0}\right)$

$$\mathbb{Q}^n\left[Z^n \leq x\right] \xrightarrow{n\to\infty} \Phi\left(\frac{x - \mu T}{\sigma^2\sqrt{T}}\right)$$

Beweis. Das Dreiecksschema $L^n = (L_1^n, \ldots, L_n^n)$ mit $L_i^n = \log\left(1 + R_i^n\right)$ erfüllt unter $\mathbb{Q}^n$ offensichtlich die Bedingungen (a) und (b) von Theorem 5.1
(Wähle z.B. $K_n := r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}$)
Wir berechnen Erwartungswert und Varianz:
Taylorentwicklung für log:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{für } x \to 0$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[L_i^n\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[\log\left(1 + R_i^n\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\log(1+b_n) + \frac{1}{2}\log(1+a_n) \\
&= \frac{1}{2}(b_n + a_n) - \frac{1}{4}\left(b_n^2 + a_n^2\right) + \ldots \\
&= r\Delta_n - \frac{1}{2}\left(r^2\Delta_n^2 + \sigma^2\Delta_n\right) + \mathcal{O}\left(\Delta_n^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= r\Delta_n - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}\left(\Delta_n^{\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[\left(L_i^n\right)^2\right] &= \frac{1}{2}\log^2(1+b_n) + \frac{1}{2}\log^2(1+a_n) \\
&= \frac{1}{2}(b_n^2 + a_n^2) + \ldots \\
&= \sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}\left(\Delta_n^{\frac{3}{2}}\right) \\
\Rightarrow \operatorname{Var}^{\mathbb{Q}^n}\left(L_i^n\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[\left(L_i^n\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[L_i^n\right]\right)^2 \\
&= \sigma^2\Delta_n + \mathcal{O}\left(\Delta_n^{\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[Z^n\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[L_1^n + \ldots + L_n^n\right] &= n \cdot \Delta_n \cdot \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + n \cdot \mathcal{O}\left(\Delta_n^{\frac{3}{2}}\right) \\
&\to T \cdot \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) =: T\mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}^n}(Z^n) = \mathrm{Var}^{\mathbb{Q}^n}(L_1^n + \ldots + L_n^n) &= n \cdot \sigma^2 \Delta_n + n \cdot \mathcal{O}\left(\Delta_n^{\frac{3}{2}}\right) \\
&\to T \cdot \sigma^2
\end{aligned}
$$

Mit Theorem 5.1 folgt:
Z^n konvergiert unter $\mathbb{Q}^n$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße $Z \sim \mathcal{N}\left(T\mu, T\sigma^2\right)$
Mit $Z^n = \log\left(\frac{S_T^n}{S_0}\right)$ folgt die Behauptung. $\square$

Wir fixieren den Ausübungspreis K und die Fälligkeit T und schreiben

> $C^n(t_n, S_{t_n}) \ldots$ Preis einer europäische Call-Option im CRR-Modell (CRR^n) zum Zeitpunkt $t_n := \frac{1}{n}\lfloor tn \rfloor$ in Abhängigkeit vom Preis S_{t_n} des Basisguts
>
> $P^n(t_n, S_{t_n}) \ldots$ analog für Put-Option

Theorem 5.3. *Die Preise C^n, P^n konvergieren für $n \to \infty$ gegen den Black-Scholes-Preis*

$$
\begin{aligned}
C_{BS}(t, S_t) &:= \lim_{n \to \infty} C^n(t_n, S_{t_n}) \\
P_{BS}(t, S_t) &:= \lim_{n \to \infty} P^n(t_n, S_{t_n})
\end{aligned}
$$

und es gilt die ***Black-Scholes-Formel***

$$
\begin{aligned}
C_{BS}(t, S_t) &= S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \\
P_{BS}(t, S_t) &= -S_t \Phi(-d_1) + K e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2)
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
d_1 = d_1(t, S_t) &= \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 = d_2(t, S_t) &= \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

Bemerkung.

- Geschlossener Ausdruck für die Bewertung europäischer Put- und Call-Optionen

- Herleitung als Grenzwert aus CRR-Modell entspricht nicht der ürsprünglichen Herleitung von Black und Scholes mittels stochastischer Analysis (nächstes Kapitel)

- Für die Entwicklung der BS-Formel und des BS-Modells erhielten Scholes und Merton den Wirtschaftsnobel(-gedenk)preis 1997

- Der Parameter σ heißt **Volatilität** und entspricht der Schwankungsbreite der Preisänderung

Beweis. Wir beweisen das Resultat für $t = 0$, der Beweis für beliebiges $t \in [0, T]$ erfolgt analog.
Nach Korollar 2.4 gilt für den Preis der Put-Option

$$\begin{aligned} P^n(0, S_0) &= (1 + r\Delta_n)^{-n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[(K - S_T^n)_+\right] \\ &= (1 + r\Delta_n)^{-n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[\left(K - S_0 e^{Z^n}\right)_+\right] \\ &= (1 + r\Delta_n)^{-n}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[f(Z^n)\right] \end{aligned}$$

mit $f(z) = (K - S_0 e^z)_+$ stetig und beschränkt.

- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + r\Delta_n)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + r\frac{T}{n}\right)^{-n} = e^{-rT}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^n}\left[f(Z^n)\right] \overset{Thm\ 5.2}{=} \mathbb{E}\left[f(Z)\right] \quad$ mit $Z \sim \mathcal{N}\left(\mu T, \sigma^2 T\right)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[f(Z)\right] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (K - S_0 e^z)_+ \exp\left(-\frac{(z - \mu T)^2}{2\sigma^2 T}\right) dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\int_{-\infty}^{\log\left(\frac{K}{S_0}\right)} (K - S_0 e^z) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right) dz \\ &\text{Substitution: } y = \frac{z - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad dy = \frac{dz}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} \left(K - S_0 \exp\left(\sigma\sqrt{T}y + \mu T\right)\right) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= K\Phi(-d_2) - S_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2} \exp\left(\sigma\sqrt{T}y + \mu T - \frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \circledast \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\sigma\sqrt{T}y + \mu T - \frac{y^2}{2} = \sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}T + rT - \frac{y^2}{2} = rT - \frac{\left(y - \sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\circledast &= K\Phi(-d_2) - S_0 e^{rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} \exp\left(-\frac{\left(y-\sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}\right) dy \\
&= K\Phi(-d_2) - S_0 e^{rT} \Phi\left(-d_2 + \sigma\sqrt{T}\right) \\
&= K\Phi(-d_2) - S_0 e^{rT} \Phi(-d_1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Formel für Put gezeigt.
Mit Put-Call-Parität (Lemma 0.2) gilt:

$$C^n(0, S_0) = P^n(0, S_0) + S_0 - K(1 + r\Delta_n)^{-n}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} C^n(0, S_0) &= -S_0\Phi(-d_1) + e^{-rT}K\Phi(-d_2) + S_0 - Ke^{-rT} \\
&= S_0(1 - \Phi(-d_1)) - e^{-rT}K(1 - \Phi(-d_2)) \\
&= S_0\Phi(d_1) - e^{-rT}K\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

Wegen $1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$ (Symmetrie der Normalverteilung) □

Weitere Aspekte der Black-Scholes-Formel:
Wir haben gezeigt: CRR-Preise konvergieren gegen BS-Preise

Frage. Was gilt für die Replikationsstrategie aus dem CRR-Modell?
Konvergiert diese auch?

Korollar 5.4. *Für den Aktienanteil $\xi^n_{t_n}$ im Replikationsportfolio der Put- bzw. Call-Option im CRR-Modell (CRR^n) gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \xi^n_{t_n} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t, S_t) = -\Phi(-d_1) \qquad \text{(Put)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \xi^n_{t_n} = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S_t) = \Phi(d_1) \qquad \text{(Call)}$$

d.h. die Replikationsstrategie entspricht der partiellen Ableitung des Put- bzw. Call-Preises nach S ("Delta")

Beweis. Wir betrachten den Zeitpunkt $t = 0$, der Beweis für allgemeines $t \in [0, T]$ erfolgt analog.
Nach Theorem 2.8 ist ξ_0^n (für den Put) gegeben durch

$$\begin{aligned} \xi_0^n &= \frac{P^n(\Delta_n, S_0(1+b_n)) - P^n(\Delta_n, S_0(1+a_n))}{S_0(b_n - a_n)} \\ &= \frac{P^n\left(\Delta_n, S_0\left(1 + r\Delta_n + \sigma\sqrt{\Delta_n}\right)\right) - P^n\left(\Delta_n, S_0\left(1 + r\Delta_n - \sigma\sqrt{\Delta_n}\right)\right)}{2S_0\sigma\sqrt{\Delta_n}} \end{aligned}$$

mit $\Delta_n \to 0$ $\quad\ldots$ Differenzenquotient
Es gilt $P^n(\Delta_n, S_0(1 + r\Delta_n)) \to P_{BS}(0, S_0)$
Unter geeigneten Annahmen an gleichmäßige Konvergenz gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} \xi_0^n = \frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(0, S_0)$$

Analog für Call und $t \in [0, T]$ allgemein.
Wir berechnen nun $\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}$ explizit.
Mit $\Phi'(x) = \varphi(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) &= \Phi(d_1) + S\varphi(d_1) \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{-r(T-t)} K\varphi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} \\ &= \Phi(d_1) + \frac{\varphi(d_1)}{\sigma\sqrt{T-t}} - e^{-r(T-t)} \frac{K}{S} \frac{\varphi(d_2)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Nebenrechnung: Setze $\tau = T - t$

$$\begin{aligned} & e^{-r\tau} \frac{K}{S} \varphi(d_2) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\log\left(\frac{S}{K}\right) - r\tau - \frac{d_2^2}{2}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\log\left(\frac{S}{K}\right) - r\tau - \frac{\left(\log\left(\frac{S}{K}\right) + r\tau\right)^2}{2\sigma^2\tau} + \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{S}{K}\right) + r\tau\right) - \frac{\sigma^2\tau}{8}\right) \\ =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right) \\ =& \varphi(d_1) \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) = \Phi(d_1)$$

Analog für Put. $\square$

Bemerkung.

- $\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}$ bzw. $\frac{\partial P_{BS}}{\partial S}$ lassen sich auch als Sensitivität des Put- bzw. Call-Preises gegenüber Preisänderungen des Underlyings interpretieren.

- $\frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t, S)$ liegt zwischen -1 und 0 und fällt mit S.
$\Rightarrow$ Shortposition in Replikationsstrategie notwendig.
Wenn Basisgut steigt fällt der Put-Preis.

- $\frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S)$ liegt zwischen 0 und 1 und steigt mit S.
$\Rightarrow$ keine Shortposition in Replikationsstrategie notwendig.
Wenn Basisgut steigt, steigt auch der Call-Preis.

Analog lassen sich die Sensitivitäten der BS-Preise gegenüber den weiteren Parametern berechnen und interpretieren.

Definition. Die Parameter-Sensitivitäten (”Greeks”) des BS-Preises sind die partiellen Ableitungen:

Bezeichnung	Definition als part. Ableitung	Wert		Interpretation
		Call	Put	
Delta	$\frac{\partial}{\partial S}$	$\Phi(d_1)$	$-\Phi(-d_1)$	Aktienanteil in Replikationsstrategie/ Sensitivität gegenüber Preisänderung Basisgut
Gamma	$\frac{\partial^2}{\partial S^2}$	Übung		Sensitivität der Replikationsstrategie gegenüber Preisänderung Basisgut
Vega	$\frac{\partial}{\partial \sigma}$	Übung		Sensitivität des Optionspreises gegenüber Änderungen der Volatilität σ
Theta	$\frac{\partial}{\partial t}$	Übung		Änderung des Optionspreises in der Zeit
Rho	$\frac{\partial}{\partial r}$	$K(T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(d_2)$	$-K(T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi(-d_2)$	Sensitivität des Optionspreises gegenüber Änderungen der Zinsrate r

Bemerkung. ”Vega” ist kein Buchstabe des griechischen Alphabets.

Korollar 5.5. *Der BS-Preis $C_{BS}(t,S)$ erfüllt folgende partielle Differentialgleichung*

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial t} + rS\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} - rC_{BS} = 0 \tag{BS-PDE}$$

auf $(t,S) \in [0,T) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit der Endwertbedingung*

$$\lim_{t \to T} C_{BS}(t,S) = (K-S)_+$$

Der Put-Preis erfüllt die selbe partielle DGL mit der Endwertbedingung

$$\lim_{t \to T} P_{BS}(t,S) = (S-K)_+$$

Beweis. Übung □

Bemerkung. In den meisten komplexen Modellen die als Erweiterung des BS-Modells verwendet werden gibt es keine geschlossene Formel für die Put- und Call-Preise mehr. ABER: Partielle DGL ähnlich zu (BS-PDE) gelten auch in diesen Modellen (mehr dazu: Kapitel 6)

Im nächsten Resultat schreiben wir etwas ausführlicher

$$C_{BS}(t,S_t;T,K,\sigma) := C_{BS}(t,S_t)$$

um die Abhängigkeit von T,K,σ zu verdeutlichen.

Theorem 5.6 (Implizite Volatilität)**.** *Sei $C^*(0,S_0;T,K)$ ein vorgegebener Preis für eine Call-Option mit Fälligkeit T und Ausübungspreis K der strikt innerhalb der Arbitragegrenzen (siehe Lemma 0.1) liegt, d.h.*

$$\left(S_0 - e^{-rT}K\right)_+ < C^*(0,S_0;T,K) < S_0$$

Dann existiert ein eindeutiges $\sigma^*(T,K) \in (0,\infty)$, die ***implizite Volatilität*** *von C^*, sodass*

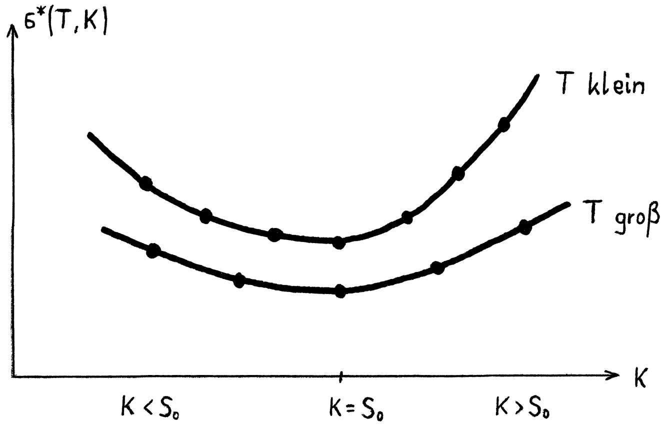
$$C^*(0,S_0;T,K) = C_{BS}(0,S_0;T,K,\sigma^*(T,K))$$

gilt.

Beweis. Übung □

Bemerkung. Mithilfe der impliziten Volatilität lässt sich bei mehreren gegebenen Optionspreisen testen, ob das BS-Modell eine gute Anpassung liefert.
BS-Modell passt gut: $\sigma^*(T,K)$ annähernd konstant in T,K
BS-Modell passt nicht gut: $\sigma^*(T,K)$ variiert mit T,K

Typische tatsächliche Beobachtung: "Volatilitäts-Smile"



Vola-Smile ist

- immer konvex
- nicht immer symmetrisch
- flacher für lange Laufzeiten, steiler für kurze Laufzeiten

Die Form weist darauf hin, dass große Preissprünge des Basisguts vom BS-Modell unterschätzt werden
$\Rightarrow$ zeigt Defizite des BS-Modells auf

genaue Form des Vola-Smiles $\rightarrow$ aktuelles Forschungsthema

6 Finanzmarktmodelle in stetiger Zeit

Letztes Kapitel. Herleitung der BS-Formel mittels Grenzwertbildung aus diskreter Zeit

Frage. Können wie die Finanzmarkttheorie wie in Kapitel 5 für diskrete Zeit entwickelt auch direkt für zeitstetige Modelle formulieren?

Antwort. Ja, aber wir benötigen völlig neue mathematische Werkzeuge
$\rightarrow$ Stochastische Analysis und Ito-Kalkül

Die ursprüngliche Herleitung des BS-Modells und alle Erweiterungen basieren auf diesem Kalkül.

Hier nur eine kurze Einführung, viele Beweise werden nur skizziert.
Wen die Details und weiterführendes interessiert sei verwiesen auf die Vorlesung Stochastische Analysis im Sommersemester.

6.1 Brownsche Bewegung

Wir betrachten nun stochastische Prozesse in stetiger Zeit, d.h. messbare Abbildungen

$$X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d; \quad (t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$$

Messbarkeit bezieht sich dabei auf die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}$
Die Definitionen der Begriffe **Filtration**, **adaptiert**, **Stoppzeit**, **Martingal**, **Sub-** und **Supermartingal** lassen sich direkt aus diskreter Zeit in stetige Zeit übertragen. Wir betrachten vorerst nur stetige stochastische Prozesse.

Definition. Existiert eine $\mathbb{P}$-Nullmenge A, sodass für alle $\omega \in \Omega \setminus A$ der Pfad $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig ist, so heißt X **stetiger stochastischer Prozess**

Unter technischen Bedingungen an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gelten für Martingale folgende Sätze aus Kapitel 1 weiterhin:

- Satz vom optionalen Stoppen
- Doob'sche Maximal- und L_p-Ungleichung
- Satz über konvexe Transformation

Das wichtigste Beispiel für einen stetigen stochastische Prozess ist die Brownsche Bewegung

Definition. Ein stochastischer Prozess $(B_t)_{t\in[0,T]}$ heißt (standardisierte) **Brownsche Bewegung** auf $[0,T]$ wenn folgendes gilt:

- $B_0 = 0$
- B hat unabhängige Inkremente, d.h. für beliebige Zeitpunkte $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n \leq T$ sind die Zufalls größen $(B_{t_2} - B_{t_1}), (B_{t_3} - B_{t_2}), \ldots, \left(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\right)$ unabhängig
- $(B_t - B_s)$ ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $(t-s)$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$
- B ist ein stetiger stochastischer Prozess

Alternative Charakterisierung als Gaußscher Prozess

Definition. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ heißt **Gaußscher Prozess**, wenn für beliebige $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$ der Vektor $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ multivariat normalverteilt ist

Lemma 6.1. *Sei $(X_t)_{t\in 0,T}$ ein stetiger Gaußscher Prozess mit $X_0 = 0$*

- $\mathbb{E}[X_t] = 0 \quad \forall t \in [0,T]$
- $\operatorname{Cov}(X_t, X_s) = \min(s,t) \quad \forall s,t \in [0,T]$

Dann ist X eine Brownsche Bewegung.

Beweis. Zu zeigen ist: Inkremente sind unabhängig und $\operatorname{Var}(X_t - X_s) = t - s$
X Gaußscher Prozess $\Rightarrow$ $\left(X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\right)$ ist multivariat normalverteilt. Die Inkremente sind also unabhängig, wenn sie unkorreliert sind. Sei $i < j$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\right) &= \mathbb{E}\left[\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)\left(X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X_{t_i} X_{t_j}\right] - \mathbb{E}\left[X_{t_{i-1}} X_{t_j}\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[X_{t_i} X_{t_{j-1}}\right] + \mathbb{E}\left[X_{t_{i-1}} X_{t_{j-1}}\right] \\
&= \min(t_i, t_j) - \min(t_{i-1}, t_j) \\
&\quad - \min(t_i, t_{j-1}) + \min(t_{i-1}, t_{j-1}) \\
&= t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ unabhängige Inkremente

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X_t - X_s) &= \mathbb{E}\left[(X_t - X_s)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X_t^2\right] - 2\mathbb{E}\left[(X_t - X_s) X_s\right] - \mathbb{E}\left[X_s^2\right] \\ &= t - 0 - s \\ &= t - s\end{aligned}$$

$\square$

Existenz der Brownschen Bewegung auf $[0,1]$ (Skizze)
Betrachte Hilbertraum $L_2[0,1]$ mit beliebiger Orthonormalbasis $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Zur Erinnnerung: Parsevalsche Gleichung

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \psi_k\rangle\langle g, \psi_k\rangle \quad \forall f, g \in L_2[0,1]$$

Seien $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen. Definiere

$$B_t := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^t \psi_n(x) dx \tag{$*$}$$

Behauptung: B ist Brownsche Bewegung
zu zeigen:

a) Summe in $(*)$ konvergiert

b) B ist Gaußscher Prozess

c) $\mathbb{E}[B_t] = 0$, $\operatorname{Cov}(B_t, B_s) = \min(t, s)$

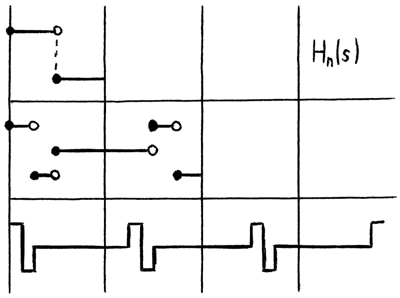
d) B ist stetiger stochastischer Prozess

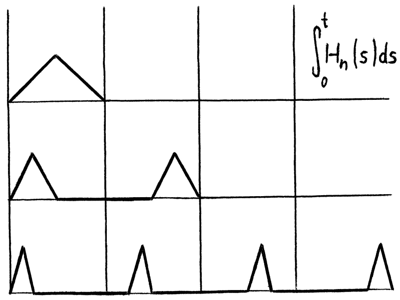
Es ist leicht zu sehen, dass $a) \Rightarrow b)$ gilt.
Wir zeigen c):

$$\mathbb{E}[B_t] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_k] \int_0^t \psi_k(x) dx = 0$$

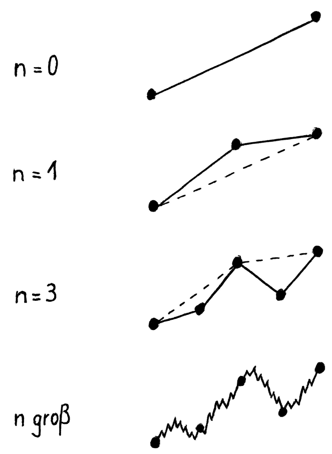
$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} Z_k \int_0^t \psi_k(x)dx \cdot \sum_{n=0}^{\infty} Z_n \int_0^s \psi_n(x)dx\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}\left[Z_k Z_n\right]}_{=\delta_{k,n}} \int_0^t \psi_k(x)dx \int_0^s \psi_n(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^t \psi_k(x)dx \int_0^s \psi_k(x)dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \mathbf{1}_{[0,t)}, \psi_k\rangle \cdot \langle \mathbf{1}_{[0,s)}, \psi_k\rangle \\
&= \langle \mathbf{1}_{[0,t)}, \mathbf{1}_{[0,s)}\rangle \\
&= \int_0^{\min(t,s)} 1dx \\
&= \min(t,s)
\end{aligned}$$

Beispiel für Orthonormalbasis: Haarbasis $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$





⇒ Konstruktion der Brownschen Bewegung



Es lässt sich zeigen:

$$\mathbb{P}\left[\text{Funktion } t \mapsto B_t(\omega) \text{ differenzierbar an Stelle } t\right] = 0$$

d.h. Mit Wahrscheinlichkeit 1 ist die Brownsche Bewegung nirgendwo differenzierbar!

Es gelten folgende Invarianzeigenschaften der Browschen Bewegung unter Spiegelung, Translation, Skalierung und Inversion.

Proposition 6.2. *Sei B eine Brownsche Bewegung auf $[0,\infty)$. Dann sind*

a) $(-B_t)_{t\geq 0}$

b) $(B_{t+s} - B_s)_{t\geq 0}$

c) $\left(\frac{1}{c} B_{tc^2}\right)_{t\geq 0} \quad \forall c > 0$

d) $\overline{B}_t := \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t \cdot B_{\frac{1}{t}} & t > 0 \end{cases}$

wieder Brownsche Bewegungen auf $[0,\infty)$.

Beweis. Übung □

Die Filtration die von der Brownschen Bewegung und allen $\mathbb{P}$-Nullmengen erzeugt wird heißt **Brownsche Standardfiltration** (BSF), d.h.

$$\mathcal{F}_t := \sigma\left((B_s)_{0\leq s\leq t}\right) \vee N$$

($N \ldots \sigma$-Algebra der $\mathbb{P}$-Nullmengen)

Theorem 6.3. *Folgende Prozesse sind stetige Martingale bzgl. der BSF:*

a) die Brownsche Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ *selbst*

b) $B_t^2 - t$

c) $\exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right) \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$

Beweis. Übung □

Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein W-Raum mit Brownscher Bewegung $(B_t)_{t\geq 0}$ und Brownscher Standardfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Das **Black-Scholes-Modell** mit Zinsrate r, Volatilität $\sigma > 0$ und Drift $\mu \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$S_t^0 = e^{rt} \ldots \text{für die risikofreie Anlage}$$

$$S_t^1 = \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \ldots \text{für den Wertpapierprozess}$$

Bemerkung.

- $\left(S_t^1\right)_{t\geq 0}$ heißt auch geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität σ und Drift μ
- S_t^1 ist für alle $t \geq$ log-normalverteilt (vergleich Kapitel 5 zum Grenzübergang in CRR-Modell)

Unser Ziel. Bewertung von Derivaten im BS-Modell mittels Replikation
$\Rightarrow$ alternative Herleitung der BS-Formel

Definition. Ein adaptierter stochastischer Prozess $\left(\xi_t^0, \xi_t^1\right)_{t\geq 0}$ heißt **Strategie** für das BS-Modell.

Was wird aus Selbstfinanzierungsbedingung in stetiger Zeit?
Zur Erinnerung: In diskreter Zeit sind äquivalent:

a) $\left(\overline{\xi}_k\right)_{k\in\{0,\ldots,T\}}$ selbstfinanzierend

b) $V_t - V_{t-1} = \overline{\xi}_t \cdot \left(\overline{S}_t - \overline{S}_{t-1}\right)$

c) $V_t = V_0 + \sum_{k=0}^t \overline{\xi}_k \cdot \left(\overline{S}_k - \overline{S}_{k-1}\right) = V_0 + \left(\overline{\xi} \circ \overline{S}\right)_t$
(diskretes stochastisches Integral)

Schlüssel zur Verallgemeinerung des stochastischen Integrals in stetiger Zeit
$\Rightarrow$ "Itô-Integral"

6.2 Itô-Integral und Itô-Formel

Ziel 1. Definition des stochastischen Integrals bzgl. der Brownschen Bewegung auf festem Intevall $[0,T]$:

$$I(f) = \int_0^T f(s,\omega)dB_s$$

für geeignete Integranden

Ziel 2. Interpretation des Integrals als stochastischer Prozess

$$t \mapsto \int_0^t f(s,\omega)dB_s$$

Ziel 3. Verallgemeinerung auf andere Integranden wie z.B. $S_t^1 = \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$ in BS-Modell
$\Rightarrow$ definieren von Werteprozess, selbstfinanzierend in stetiger Zeit.

Bemerkung. Wieso nicht bestehenden Integralbegriff verwenden?
definiere z.B.

$$\int_0^T f(s,\omega)dB_s(\omega) \quad \text{für festes } \omega \in \Omega$$

als Riemann-Stieltjes-Integral, d.h.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum f(t_i,\omega)\left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)\right)$$

B_t ist nirgends differenzierbar $\Rightarrow$ B hat unendliche Totalvariation
$\Rightarrow$ das Riemann-Stieltjes-Integral existiert nicht für stetige Integranden f

Zunächst: Zusammenhang zu diskretem stochastischen Integral

Definition. Der Vektorraum $\mathcal{H}_0^2[0,T]$ der **einfachen Integranden** besteht aus allen stochastischen Prozessen $f(t,\omega)$ der Form

$$f(t,\omega) = \sum a_i(\omega) \cdot \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t)$$

mit $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ und $\mathbb{E}\left[a_i^2\right] < \infty,\ 0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$

Bemerkung.

- $a_i \in \mathcal{F}_{t_i}$ macht $f(t,\omega)$ adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$
- einfache Integranden: stückweise konstante, adaptierte, quadratintegriebare stochastische Prozesse

Definition. Für $f \in \mathcal{H}_0^2[0,T]$ ist das Itô-Integral definiert als

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

und entspricht dem diskreten stochastsichen Integral auf dem Gitter $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$.

Wir wollen diesen Integralbegriff auf folgenden Raum verallgemeinern:

Definition. Es sei $\mathcal{H}^2[0,T]$ der Vektorraum aller $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$-adaptierten stochastischen Prozesse f, welche die Integrierbarkeitsbedingung

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(\omega,t)^2 dt\right] < \infty$$

erfüllen.

Bemerkung.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(\omega,t)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega \times [0,T]} f(\omega,t)^2 d\mathbb{P} \otimes dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist die L^2-Norm auf dem Hilbertraum $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$. Demnach ist $\mathcal{H}^2[0,T]$ ein linearer Unterraum von $L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$.
Außerdem ist $\mathcal{H}_0^2[0,T]$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{H}^2[0,T]$, d.h.

$$\mathcal{H}_0^2[0,T] \subseteq \mathcal{H}^2[0,T] \subseteq \underbrace{L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)}_{\text{Hilbertraum}}$$

Lemma 6.4. *Das elementare Ito-Integral I ist eine Isometrie von $\mathcal{H}_0^2 \subset L^2(d\mathbb{P} \otimes dt)$ in $L^2(d\mathbb{P})$, das heisst*

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP \times dt)} \qquad \forall f \in \mathcal{H}_0^2.$$

(Isometrie $\hat{=}$ normerhaltende Abbildung)

Beweis. Für die L^2-Norm von $I(f)$ gilt

$$\|I(f)\|^2_{L^2(dP)} = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right].$$

Für die gemischten Terme des Quadrats gilt (mit $i < j$):

$$\mathbb{E}\left[a_i a_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] = \mathbb{E}\big[a_i a_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \underbrace{\mathbb{E}\left[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right]}_{=0}\big] = 0.$$

Für die Diagonalterme gilt

$$\mathbb{E}\left[a_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2\right] = \mathbb{E}\left[a_i^2 \mathbb{E}\left[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]\right] = \mathbb{E}\left[a_i^2\right](t_{i+1} - t_i),$$

und somit

$$\begin{aligned}
\|I(f)\|^2_{L^2(dP)} &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[a_i^2\right](t_{i+1} - t_i) \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(\omega, t) dt\right] \\
&= \|f\|^2_{L^2(dP \times dt)}
\end{aligned}$$

□

Nächster Schritt: Approximation

Lemma 6.5. *$\mathcal{H}_0^2$ ist dicht in $\mathcal{H}^2$, das heisst für jedes $f \in \mathcal{H}^2$ existiert eine Folge $f_n \in \mathcal{H}_0^2$ sodass*

$$\|f - f_n\|_{L^2(dP \times dt)} \to 0.$$

Beweis. siehe z.B. "Stochastic Calculus and Financial Applications"
von Michael Steele □

Definition. Das **Itô-Integral** $I(f)$ einer Funktion $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$ ist folgendermaßen definiert:

- Wähle eine Approximationsfolge $f_n \in \mathcal{H}_0^2$ mit $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$ gemäß Lemma 6.5
- Setze $I(f)$ gleich dem Limes von $I(f_n)$ in $L^2(d\mathbb{P})$

Theorem 6.6. *Das Itô-Integral $I(f)$ ist wohldefiniert für alle $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$, d.h. es existiert und ist eindeutig (als Element von $L^2(d\mathbb{P})$) festgelegt.*
Außerdem ist es eine Isometrie von $\mathcal{H}^2[0,T]$ in $L^2(dP)$, d.h.

$$\|I(f)\|_{L^2(dP)} = \|f\|_{L^2(dP \times dt)} \qquad \forall f \in \mathcal{H}^2.$$

Bemerkung. Dieses Theorem erweitert die Itô-Isometrie von $\mathcal{H}_0^2$ auf $\mathcal{H}^2$.

Beweis. Existenz: Laut Lemma 6.5 gilt $\|f - f_n\|_{L^2} \to 0$ daher ist (f_n) eine Cauchy-Folge in $L^2(dP \times dt)$:
$\forall \varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\|f_n - f_m\|_{L^2(dP\times dt)} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$

Mit Itô-Isometrie auf $\mathcal{H}_0^2$ folgt

$$\|I(f_n) - I(f_m)\|_{L^2(dP)} = \|f_n - f_m\|_{L^2(dP\times dt)} < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

d.h. $I(f_n)$ ist Cauchy-Folge in $L^2(d\mathbb{P})$.
Da $L^2(d\mathbb{P})$ vollständig ist existiert der Grenzwert $I(f)$.

Eindeutigkeit: Sei $f_n' \in \mathcal{H}_0^2$ eine weitere Approximationsfolge für f. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|I(f_n) - I(f_n')\|_{L^2(dP)} &= \|f_n - f_n'\|_{L^2(dP\times dt)} \\ &\overset{Dreiecks-UG}{\leq} \|f_n - f\|_{L^2(dP\times dt)} + \|f_n' - f\|_{L^2(dP\times dt)} \to 0\end{aligned}$$

Isometrie: Für jede Approximationsfolge gilt

$$\begin{aligned}&\|f\|_{L^2} - \|f - f_n\|_{L^2} \leq \|f_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|f - f_n\|_{L^2} \\ \Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}\end{aligned}$$

und analog

$$\lim_{n\to\infty} \|I(f_n)\|_{L^2} = \|I(f)\|_{L^2}\,.$$

Damit folgt auch

$$\|I(f)\| = \lim_{n\to\infty} \|I(f_n)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\|\,.$$ □

Das Itô-Integral über $[0, t] \subseteq [0, T]$ kann durch Anbschneiden des Integranden definiert werden. Setzte

$$m_t(s) = \begin{cases} 1 & s \leq t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

(Indikatorfunktion von $[0, t]$)
Wir wollen $t \mapsto I(m_t f)$ als stochastischen Prozess betrachten.

Theorem 6.7. *Für jedes $f \in \mathcal{H}^2[0, T]$ existiert ein* stetiges Martingal X, *adaptiert* *bezüglich der Brownschen Standardfiltration sodass*

$$\mathbb{P}\left[X_t = I(m_t f)\right] = 1, \qquad \forall\, t \in [0, T].$$

Bemerkung. Ab nun schreiben wir

$$X_t := \int_0^t f(s) dB_s$$

$$X_t - X_s := \int_s^t f(r) dB_r$$

Proposition 6.8. *Das Itô-Integral besitzt folgende Eigenschaften:*

a) Linearität:

$$\int_0^t \left(a \cdot g(s) + b \cdot f(s)\right) dB_s = a \cdot \int_0^t g(s) dB_s + b \cdot \int_0^t f(s) dB_s$$

b)

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t f(s) dB_s\right] = 0 \quad \textit{und}$$

$$Var\left(\int_0^t f(s) dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t f^2(s) ds\right]$$

Theorem 6.9 (Ito-Formel)**.** *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt*

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds \tag{$\circledast$}$$

fast sicher für alle $t \geq 0$.

Bemerkung.

- Das Itô-Integral in ($\circledast$) ist wohldefiniert, denn

$$f' \text{ stetig } \Rightarrow f' \in \mathcal{L}^2_{loc}[0, t] \quad \forall t \geq 0$$

- Würde in ($\circledast$) statt B_t eine differenzierbare Funktion b_t stehen, dann würde gelten:

$$db_t = b_t' dt$$

und somit mit dem Hauptsatz der Integralrechnung

$$f(b_t) = f(0) + \int_0^t f'(b_s)db_s$$

Der Term $\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$ hängt also mit der Nichtdifferenzierbarkeit der Brownschen Bewegung zusammen!
Itô-Formel $\hat{=}$ Hauptsatz der Integralrechnung für Itô-Integrale!

Korollar 6.10 (Ito-Formel mit Zeitabhängigkeit)**.** *Sei* $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R})$, *(*$f : (t, x) \mapsto f(t, x)$*). Dann gilt*

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)ds \quad (\circledast\circledast)$$

fast sicher für alle $t \geq 0$.

Bemerkung. $C^{1,2}(\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times \mathbb{R})$ bezeichnet dabei den Raum aller Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die in der ersten Variable einmal stetig differenzierbar und in der zweiten Variable zweimal stetig differenzierbar sind.
Kurzschreibweise für $(\circledast\circledast)$

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t)dt$$

Beispiel. Betrachte den Wertpapierprozess

$$S_t^1 = \exp\left(\sigma B_t - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$$

im Black-Scholes-Modell

- Darstellung als 'stochastische Differentialgleichung'
- Charakterisierung der Martingaleigenschaft

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \exp\left(\sigma x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot f(t, x) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) &= \sigma \cdot f(t, x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) &= \sigma^2 \cdot f(t, x) \end{aligned}$$

Itô-Formel:

$$\begin{aligned}
S_t^1 = f(t, B_t) &= 1 + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot f(r, B_r) dr \\
&+ \int_0^t \sigma \cdot f(r, B_r) dB_r + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 \cdot f(r, B_r) dr \\
&= 1 + \mu \int_0^t S_r^1 dr + \sigma \int_0^t S_r^1 dB_r
\end{aligned}$$

$$\underbrace{dS_t^1}_{\substack{\text{Wachstum} \\ \text{von } S_t^1}} = \underbrace{\mu S_t^1}_{\substack{\text{Trend-} \\ \text{komponente}}} dt + \underbrace{\sigma S_t^1}_{\substack{\text{Volatilitäts-} \\ \text{komponente}}} dB_t$$

Da $f(t, B_t) \in \mathcal{H}^2$ gilt

$$\mu = 0 \;\Rightarrow\; S_t^1 = 1 + \underbrace{\sigma \int_0^t S_r^1 dB_r}_{\text{Martingal!}}$$

Beweis von Theorem 6.9. Wir nehmen zunächst an, dass f außerhalb eines Intervalls $[-M, M]$ gleich 0 ist.
Setze $t_k = k\frac{t}{N}$ und schreibe $f(B_r) - f(B_0)$ als Teleskopsumme:

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(f\left(B_{t_{k+1}}\right) - f\left(B_{t_k}\right)\right) \qquad (\circledast)$$

f zweimal stetig diffbar $\Rightarrow$ Taylor-Entwicklung

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(x)(y - x)^2 + h(x, y)(y - x)^2 \quad x, y \in \mathbb{R}$$

wobei h gleichmäßig stetig ist mit $h(x, x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
Einsetzen in $\circledast$:

$$\begin{aligned}
f(B_t) - f(B_0) &= I_n + J_n + K_n \quad \text{mit} \\
I_n &= \sum_{i=0}^{N-1} f'\left(B_{t_i}\right)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) \\
J_n &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} f''\left(B_{t_i}\right)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2 \\
J_n &= \sum_{i=0}^{N-1} h\left(B_{t_i}, B_{t_{i+1}}\right)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)^2
\end{aligned}$$

Weiteres vorgehen: Zeige

$$
\begin{aligned}
I_n &\overset{L^2(d\mathbb{P})}{\longrightarrow} \int_0^t f'(B_s)dB_s \\
J_n &\overset{L^2(d\mathbb{P})}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds \\
K_n &\overset{L^2(d\mathbb{P})}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung. Beweis von Korollar 6.10 ist analog unter Verwendung der gemischten Taylor-Entwicklung

$$f(s,y)-f(t,x) = (s-t)\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)+(y-x)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)+\frac{(y-x)^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)+(s-t)(y-x)^2\cdot h(x,y,s,t)$$

Definition. Ein (ein-dimensionaler) **Itô-Prozess** ist ein stochastischer Prozess der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(\omega,s)ds + \int_0^t b(\omega,s)dB_s$$

Wir schreiben auch in Differentialnotation

$$dX_t = a_t dt + b_t dB_t$$

Bemerkung. Der Preisprozess S_t^1 im Black-Scholes-Modell ist ein Itô-Prozess mit

$$a(\omega,s) = \mu S_s^1(\omega), \quad b(\omega,s) = \sigma S_s^1(\omega)$$

Definition. Sei X ein Itô-Prozess und $f(\omega,s)$ ein adaptierter stochastischer Prozess, sodass

$$
\begin{aligned}
a)\ \mathbb{P}\left[\int_0^t |a(\omega,s)f(\omega,s)|\,ds < \infty\right] = 1 \\
b)\ \mathbb{P}\left[\int_0^t |b(\omega,s)f(\omega,s)|^2\,ds < \infty\right] = 1
\end{aligned}
$$

Dann können wir das stochastische Integral von $f(\omega,s)$ bzgl. X definieren als

$$f_t dX_t = f_t a_t dt + f_t b_t dB_t$$

Theorem 6.11 (Itô-Formel für Itô-Prozesse)**.** *Sei X ein eindimensionaler Ito-Prozess, d.h. $dX_t = a_t dt + b_t dB_t$ und $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\mathbb{R})$. Dann ist auch $f(t,X_t)$ ein Itô-Prozess* *und es gilt*

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)b_t^2 dt$$

Der Beweis erfolgt analog zur Itô-Formel für Brownsche Bewegungen, nur verwendet man statt der Martingaleigenschaft von $B_t^2 - t$ die Martingaleigenschaft von

$$\left(\int_0^t b(\omega, s)dB_s\right)^2 - \int_0^t b^2(\omega, s)ds$$

6.3 Replikation im Black-Scholes-Modell

Zur einfacheren Notation schreiben wir nun das Black-Scholes-Modell als

$$\begin{aligned} \beta_t &= e^{rt} && \text{(risikofreie Anlage)} \\ S_t &= \exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) && \text{(Aktie)} \end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungen können wir in Differentialform schreiben:

$$\begin{aligned} d\beta_t &= r\beta_t dt, \quad \beta_0 = 1 && \text{(gew. DGL)} \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad S_0 = 1 && \text{(stoch. DGL)} \end{aligned} \tag{BS}$$

Insbesondere folgt, dass β_t und S_t Itô-Prozesse sind.

Wir betrachten eine Strategie (ξ^0, ξ^1), d.h. einen $\mathbb{R}^2$-wertigen, adaptierten stochastischen Prozess.
Zugeordnet ist der Werteprozess

$$V_t = \xi_t^0 \cdot \beta_t + \xi_t^1 \cdot S_t$$

Mithilfe des Itô-Kalküls (Itô-Integral, etc.) können wir nun endlich die Selbstfinanzierungs-Eigenschaft definieren.

Definition. Die Strategie $\boldsymbol{\xi}$ heißt **selbstfinanzierend**, wenn

$$V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s^0 d\beta_s + \int_0^t \xi_s^1 dS_s$$

oder äquivalent (in Differentialschreibweise)

$$dV_t = \xi_t^0 d\beta_t + \xi_t^1 dS_t$$

Sei nun ein europäisches Derivat $C = h(S_T)$ im Black-Scholes-Modell gegeben, z.B.

Call: $h(x) = (x - K)_+$

Put: $h(x) = (K - x)_+$

Ziel.

- Finde eine selbstfinanzierende Strategie $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi^0, \xi^1\right)$ welche C repliziert
- Bestimme den zugehörigen Preisprozess Π_t, Werteprozess V_t zu $\boldsymbol{\xi}$

Methode. Sei $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi^0, \xi^1\right)$ eine selbstfinanzierende Strategie mit Werteprozess

$$V_t = \xi_t^0 \beta_t + \xi_t^1 S_t \tag{WP}$$

Wegen Selbstfinanziertheit muss gelten

$$dV_t = \xi_t^0 d\beta_t + \xi_t^1 dS_t \tag{SF}$$

Wir machen den Ansatz

$$V_t = f(t, S_t), \quad f \in C^{1,2}\left(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}\right) \tag{M}$$

Aus (SF) und (BS) erhalten wir

$$\begin{aligned} dV_t &= \xi_t^0 r \beta_t dt + \xi_t^1 \left(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t\right) \\ &= \left(\xi_t^0 r \beta_t + \xi_t^1 \mu S_t\right) dt + \xi_t^1 \sigma S_t dB_t \end{aligned} \tag{SF'}$$

Andererseits folgt aus Anwendung der Itô-Formel auf (M)

$$\begin{aligned} dV_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t)\sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \left(\partial_t f(t, S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{xx} f(t, S_t) + \mu S_t \partial_x f(t, S_t)\right) dt + \partial_x f(t, S_t) dB_t \end{aligned} \tag{M'}$$

Durch Gleichsetzen der dB_t-Terme in (SF') und (M') erhalten wir für den Aktienanteil ξ^1 der Strategie

$$\xi_t^1 = \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t) \tag{Δ-Hedge}$$

Durch Gleichsetzen der dt-Terme in (SF') und (M') erhalten wir für den Anteil ξ^0 der

Strategie

$$
\begin{aligned}
\xi_t^0 r\beta_t + \xi_t^1 \mu S_t &= \partial_t f(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{xx} f(t,S_t) + \xi_t^1 \mu S_t \\
\Rightarrow \ \xi_t^0 &= \frac{1}{r\beta_t}\left(\partial_t f(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{xx} f(t,S_t)\right)
\end{aligned}
$$

Nun setzen wir wieder in (M) und (WP) ein:

$$
\begin{aligned}
f(t,S_t) \overset{(M)}{=} V_t \overset{(WP)}{=} \xi_t^0\beta_t + \xi_t^1 S_t \\
&= \frac{1}{r}\left(\partial_t f(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2} S_t^2 \partial_{xx} f(t,S_t)\right) + \partial_x f(t,S_t) S_t
\end{aligned}
$$

Wir ersetzen wieder S_t durch x und erhalten eine partielle Differentialgleichung für f.

$$
rf(t,x) = \frac{\sigma^2}{2} x^2 \partial_{xx} f(t,x) + rx\partial_x f(t,x) + \partial_t f(t,x), \ \forall (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{(BS-PDE)}
$$

Da $\boldsymbol{\xi}$ den Claim replizieren soll muss die Endwertbedingung

$$
f(T,x) = h(x)
$$

gelten.

Bemerkung. Es ist erstaunlich, dass der Modellparameter μ weder im (Δ-Hedge) noch in der Formel für ξ^0 oder in der (BS-PDE) auftaucht!